

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кафедра "Информатика и управление в технических системах"

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
по дисциплине "Основы управления в технических системах"
для студентов направления подготовки
27.03.04 – Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2025

УДК 681.51:519.876.2(076.5)

ББК 32.965я73

М744

Р е ц е н з е н т:

А. А. Кабанов – канд. техн. наук, доцент,
заведующий кафедрой "Информатика и управление в технических системах"

Составители: В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь

М744 Моделирование движения динамических управляемых объектов : методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Основы управления в технических системах" для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах / Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и интеллектуальных технических систем, кафедра "Информатика и управление в технических системах" ; сост.: В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь. – Севастополь : СевГУ, 2025. – 22 с. – Текст : электронный.

Приводится описание лабораторной работы, целью которой является получение практических навыков формирования математических моделей динамических управляемых объектов и построения их движений средствами среды Matlab&Simulink.

Предназначены для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах.

УДК 681.51:519.876.2 (076.5)
ББК 32.965я73

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры "Информатика и управление в технических системах", протокол № 5 от 28 января 2025 г.

© Карапетьян В. А., Крамарь В. А., сост., 2025
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	4
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ	4
2.1 Математическая модель плоского двухзвенного робота-манипулятора	4
2.2 Математическая модель движения перевёрнутого маятника на тележке	7
3 ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	8
4 НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	10
5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ	11
6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	11
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	13
ПРИЛОЖЕНИЕ А . Пример решения основных задач лабораторной работы.....	14

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является приобретение умений и практических навыков формирования математических моделей динамических управляемых объектов, построения их движений средствами среды Matlab/Simulink.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

В классической теории автоматического управления основным способом математического (аналитического) описания динамики системы управления является представление в форме *вход-выход*. В качестве *входов* выступают переменные, описывающие внешние причины возникновения движения системы. *Выходы* – это управляемые переменные, значения которых доступны измерению.

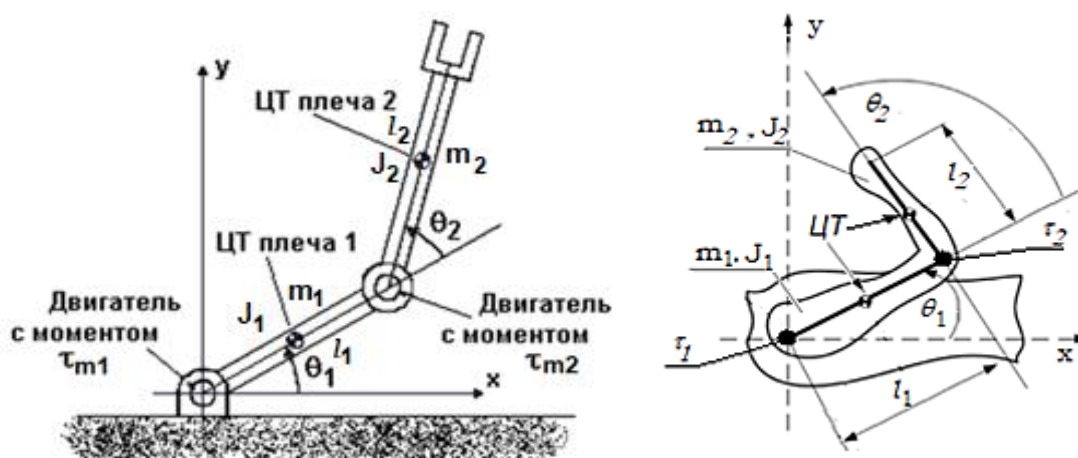
В лабораторной работе в качестве исследуемых объектов будут рассматриваться два динамических управляемых объекта:

- двухзвенный плоский робот-манипулятор;
- перевёрнутый (обратный) маятник на тележке.

Для проведения исследований динамических свойств как *самых* объектов, так и возможностей средств управления, необходимо сформировать математические модели их поведения (движения). Оба исследуемых объекта представляют собой механические устройства, обладающие определёнными массо-габаритными характеристиками, поведение которых может быть описано дифференциальными уравнениями движения классической динамики.

2.1 Математическая модель плоского двухзвенного робота-манипулятора

Схема двухзвенного робота-манипулятора [1, 2] показана на рисунке 2.1



x, y – координатные оси; ЦТ – центр тяжести плеча манипулятора;

θ_1 и θ_2 – углы поворота первого и второго плеча манипулятора;

Рисунок 2.1 – Схема двухзвенного робота-манипулятора

Положения плеч (звеньев) манипулятора определяются двумя углами – θ_1 и θ_2 . Длины, массы и моменты инерции каждого плеча характеризуются величинами m_1, m_2, l_1, l_2, J_1 и J_2 соответственно. Предполагается, что массы распределены по длинам плеч равномерно и центры масс располагаются в центре каждого плеча. Управляемые вращения плеч манипулятора обеспечивают два двигателя, находящиеся в сочленениях и развивающие моменты τ_{m1} и τ_{m2} .

Уравнения движения манипулятора могут быть получены на основе применения методологии Эйлера - Лагранжа [1, 2, 3], которая предполагает введение обобщённых координат, полностью и однозначно описывающих положение и скорость движения механического объекта. Здесь в качестве обобщённых координат выбраны углы поворота звеньев манипулятора θ_1 и θ_2 . Определяется лагранжиан L как разность кинетической K и потенциальной P энергий механической системы $L=K-P$. Кинетическая K и потенциальная P энергии задаются в виде функций обобщённых координат θ_1 и θ_2 и их производных и – обобщённых скоростей.

Для получения уравнений движения звеньев манипулятора используем уравнения Эйлера - Лагранжа [3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2. \quad (2.1)$$

Здесь τ_1 и τ_2 соответственно суммарные моменты, действующие на осях вращения в положительном направлении изменения углов θ_1 и θ_2 . Каждый из этих моментов являются суммами моментов, развиваемых двигателями τ_{m1} и τ_{m2} , и противодействующих моментов вязкого трения $C_1\dot{\theta}_1$ и $C_2\dot{\theta}_2$ в сочленениях (шарнирах) звеньев манипулятора: $\tau_1 = \tau_{m1} - C_1\dot{\theta}_1$, $\tau_2 = \tau_{m2} - C_2\dot{\theta}_2$.

Систему уравнений движения (2.1), после подстановки в неё сформированных выражений для кинетической и потенциальной энергий [1, 2], можно записать так:

$$\begin{cases} M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 + K_1 \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 + G_1 \theta_1, \theta_2 = \tau_{m1}, \\ M_{21}\ddot{\theta}_1 + M_{22}\ddot{\theta}_2 + K_2 \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 + G_2 \theta_1, \theta_2 = \tau_{m2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь M_{ij} – элементы матрицы инерций M ; K_i – формируются из моментов вязкого трения, моментов центробежных и кориолисовых сил; G_i – моменты гравитационных сил:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} m_1 + m_2 \right) l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix};$$

$$K_1 \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot 2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + C_1 \dot{\theta}_1; \quad K_2 \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + C_2 \dot{\theta}_2,$$

$$G_1 \theta_1, \theta_2 = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_1 + \theta_2 \right); G_2 \theta_1, \theta_2 = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_1 + \theta_2 .$$

Для преобразования системы дифференциальных уравнений (2.2) к нормальной форме (форме Коши), введём вектор-функции состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$ как

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_{m1}(t) \\ \tau_{m2}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix},$$

а также – матрицу $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = M^{-1}$, обратную матрице инерций M . Здесь следует заметить, что матрица инерций M является невырожденной $\det(M) \neq 0$ и положительно определённой $M > 0$ для любых значений угла θ_2 .

Теперь, в силу введённых выше обозначений, систему уравнений (2.2) можно представить системой нелинейных уравнений состояния в нормальной форме:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -H_{11} & K_1 + G_1 & -H_{12} & K_2 + G_2 \\ x_4(t) \\ -H_{21} & K_1 + G_1 & -H_{22} & K_2 + G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} u(t), \quad (2.3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Значения параметров плеч робота-манипулятора выберем следующими [2]:

масса	длина	радиус	момент инерции	коэффициент демпфирования	материал (дюраль)
Первое плечо (цилиндрический стержень: длина l_1 ; радиус r_1)					
$m_1=3 \text{ кг}$	$l_1=0,6 \text{ м}$	$r_1=0.0243 \text{ м}$	$J_1=0,0904 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$C_1=1 \text{ Н}\cdot\text{м}/(\text{рад/с})$	2700 кг/м^3
$m_2=2,5 \text{ кг}$	$l_2=0,8 \text{ м}$	$r_2=0.0192 \text{ м}$	$J_2=0,1336 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$C_2=1 \text{ Н}\cdot\text{м}/(\text{рад/с})$	2700 кг/м^3

Например, удерживающие в неподвижном угловом положении звеньев манипулятора $\theta_{10} = 45^\circ$ и $\theta_{20} = -30^\circ$, значения моментов двигателей τ_{m10} и τ_{m20} могут быть рассчитаны из соотношений (2.2) по формулам:

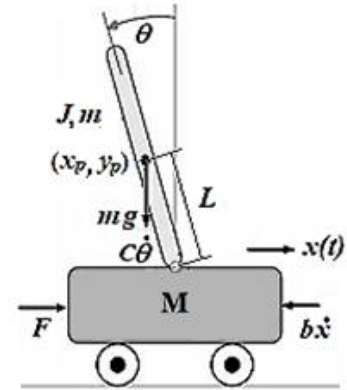
$$G_1 \theta_{10}, \theta_{20} = \tau_{m10}, \quad G_2 \theta_{10}, \theta_{20} = \tau_{m20}. \quad (2.4)$$

Подстановка в эти соотношения исходных данных позволяет получить следующие начальные значения моментов

$$\tau_{m10} = G_{10} 45^\circ, -30^\circ = 26,124 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad \tau_{m20} = G_{20} 45^\circ, -30^\circ = 9,476 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2.2 Математическая модель движения перевернутого маятника на тележке

Рассматривается механическая система, состоящая из перевернутого (обратного) маятника, установленного на моторизованной тележке (см. рисунок) [4, 5]. Перевернутая маятниковая система на подвижном основании может выступать примером систем стабилизации вертикального старта ракеты-носителя, движения скутера Segway и т.п. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t имитирует прикладываемую к тележке силу $F(t)$. При отсутствии каких-либо иных внешних воздействий на тележку, маятник, находящийся в положении неустойчивого равновесия в строго вертикальном положении, при малейших внешних возмущениях теряет это равновесие. Будем рассматривать двумерную (плоскую) задачу, в которой система маятник-тележка осуществляет движение в вертикальной плоскости. Управляющим входом является сила F , которая перемещает тележку в горизонтальном направлении, а управляемыми выходами являются угловое положение маятника θ и горизонтальное положение тележки x .



Применяя методологию Эйлера - Лагранжа, получим следующую систему двух дифференциальных уравнений движения системы маятник-тележка:

$$\begin{cases} M + m \cdot \ddot{x}(t) - mL \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + mL \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) = F(t), \\ -mL \cos \theta(t) \cdot \ddot{x}(t) + J + mL^2 \ddot{\theta}(t) + C\dot{\theta}(t) - mLg \sin \theta(t) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

В векторно-матричной форме систему (2.5) можно переписать так:

$$\begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \theta(t) \\ -mL \cos \theta(t) & J + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & mL \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mLg \sin \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Вычислим матрицу H – обратную матрице "инерций" M –

$$H = \begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \theta(t) \\ -mL \cos \theta(t) & J + mL^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\theta(t))} \begin{bmatrix} J + mL^2 & mL \cos \theta(t) \\ mL \cos \theta(t) & M + m \end{bmatrix},$$

где $\Delta(\theta(t))$ – детерминант матрицы инерций (матрица M невырожденная)

$$\Delta(\theta(t)) = M + m \quad J + mL^2 - m^2 L^2 \cos^2 \theta(t) > 0.$$

Преобразуем систему (2.5) к нормальной форме – системе из четырёх ОДУ первого порядка. Для этого введём вектор-функции состояния $X(t)$, управления $U(t)$ и выхода $Y(t)$ как

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = F(t), \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнения (2.5), с учётом введённых обозначений, представим в виде системы ОДУ в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) = \left[-J + mL^2 b \cdot x_3(t) - J + mL^2 mLx_4(t) \sin x_2(t) + mL C \cos x_2(t) x_4(t) + \right. \\ \quad \left. + 0,5 \cdot m^2 L^2 g \sin 2x_2(t) + J + mL^2 F(t) \right] \cdot \frac{1}{\Delta(x_2(t))}, \\ \dot{x}_4(t) = \left[-mLb \cos x_2(t) \cdot x_3(t) - 0,5 \cdot m^2 L^2 x_4(t) \sin 2x_2(t) + (M + m)C x_4(t) + \right. \\ \quad \left. + M + m mLg \sin x_2(t) + mL \cos x_2(t) F(t) \right] \cdot \frac{1}{\Delta(x_2(t))}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Уравнение *выходов* для системы (2.5) имеют вид

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6^*)$$

Численные значения параметров объекта "перевернутый маятник на тележке" приведены в таблице:

Наименование параметра		Значение
M	масса тележки	0,5 кг
m	масса маятника	0,2 кг
b	коэффициент вязкого трения при движении тележки	0,1 Н/(м/с)
L	расстояние между осью маятника и центром масс	0,3 м
J	момент инерции маятника	0,006 кг·м²
C	коэффициент вязкого трения в креплении маятника	0.01 Н*м/(рад/с)
g	ускорение свободного падения	9,81 м/с²

3 ПРОГРАММА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

В работе исследуются динамические свойства управляемых объектов, представленных своими математическими моделями в виде систем нелинейных ОДУ с постоянными параметрами.

Выполнение лабораторной работы предполагает реализацию следующих этапов и действий.

1. Проведение численного моделирования собственного, вынужденного и общего движений объектов — для нечётных вариантов — манипулятора, для чётных — маятника на тележке:

- разработать алгоритм и Matlab-программу решения задачи численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, представляющих математическую модель исследуемого динамического управляемого объекта (2.3) или (2.6);
- выполнить моделирование собственного, вынужденного и общего движений объекта. Результаты моделирования представить в графической форме в виде графиков изменения выходных переменных объекта. Моделирование проводить для следующих исходных данных:

Двухзвенный манипулятор		Маятник на тележке	
Собственное движение			
$[-90^0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0 \ 0]$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0]$
$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0 \ 0]$	$[0 \ 180^0 \ 0 \ 0]$	$[0]$
$[45^0 \ 0 \ -30^0 \ 0]$	$[0 \ 0]$	$[0 \ 45^0 \ 0 \ 0]$	$[0]$
Вынужденное движение			
$[-90^0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0.2 \ 0]$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0.1]$
$[-90^0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[0 \ 0.1]$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[-0.1]$
$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	$[1 \ 1]$	$[0 \ 180^0 \ 0 \ 0]$	$[0.2]$
Общее движение			
Сумма произвольных собственного и вынужденного движений		Сумма произвольных собственного и вынужденного движений	

2. Выполнить в Simulink моделирование собственного, вынужденного и общего движений объектов:
 - составить Simulink-модель (исключительно из блоков математических операций) исследуемого динамического объекта;
 - осуществить моделирование движений объекта и визуализацию результатов в соответствии с заданиями, предложенными в пункте 1;
3. Провести сравнительный анализа результатов моделирования, полученных в двух предыдущих пунктах.
4. Провести сравнительный анализа результатов имитационного и математического моделирования для соответствующих компьютерных экспериментов предыдущей [6] и текущей лабораторных работ.
5. Сформулировать выводы по работе.

При выполнении лабораторной работы студентом проводится исследование одной из предложенных моделей объектов управления (ОУ). Для выполнения заданий лабораторной работы создаются Matlab-программа и Simulink-схема.

4 НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Выполнение задачи моделирования поведения ОУ стандартными средствами **Matlab** предполагает численное решение системы ОДУ, представляющей математическую модель движения этого объекта.

Для решения систем ОДУ, представленных в нормальной форме, в **Matlab** имеются несколько стандартных функций, реализующих известные методы численного решения таких систем [7, 8, 9]. Эти функции (в версии R2024 их 10) называют решателями (solver) ОДУ.

Рассмотрим синтаксис решателя на примере функции **ode45**. Эта функция основана на явной формуле Рунге - Кутты 4-го порядка, в модификации Дорманда - Принца [8]. Обращение к функции **ode45**, в случае минимально возможного набора параметров, имеет, например, такой вид

[T, Y] = ode45(@<имя_функции_правых_частей>, tspan, x0),

где **<имя_функции_правых_частей>** – строка символов, являющаяся именем функции для вычисления правых частей уравнений нормальной системы ОДУ; **tspan** – вектор-строка, определяющая интервал интегрирования $[t_0, t_f]$ системы ОДУ и содержащая обычно два числа: **t0** – начальное значение аргумента, **tf** – конечное значение аргумента; **x0** – вектор начальных условий (значения искомых функций системы ОДУ в начальный момент времени **t0**); **T** – выходной массив-столбец значений аргумента, размер которого зависит от способа задания интервала интегрирования **tspan**; **Y** – выходной двумерный числовой массив – матрица решений системы дифференциальных уравнений. Решения системы ОДУ упакованы в числовом массиве **Y** по столбцам. Описание функции правых частей приводится, обычно, после текста основной (вызывающей) **Matlab**-программы.

Указание параметра **tspan** в виде **[t0, tf]** не даёт возможности получать значения решений в интересующих точках интервала интегрирования. Для обеспечения такой возможности необходимо указывать всё интересующее нас множество точек в виде вектора-строки чисел, например, так **[t0:stp:tf]**. Здесь **stp** – шаг выдачи значений решений в матрицу решений **Y**. В таком случае вектор-столбец **T** представляет собой массив значений аргумента, соответствующих шагам выдачи решений, а **Y** – матрица, каждый столбец которой, представляет собой числовой массив представления решения системы ОДУ по соответствующей компоненте системы уравнений.

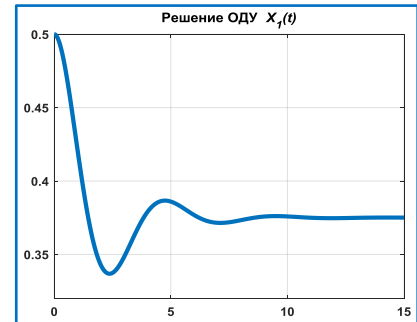
Приведём пример **Matlab**-программы для решения системы двух ОДУ и построения графиков этих решений. Пусть задана система ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot \sin(x_2(t)) + U \end{cases}$$

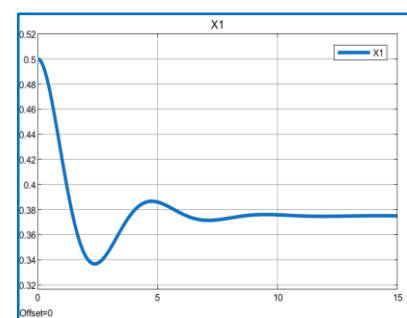
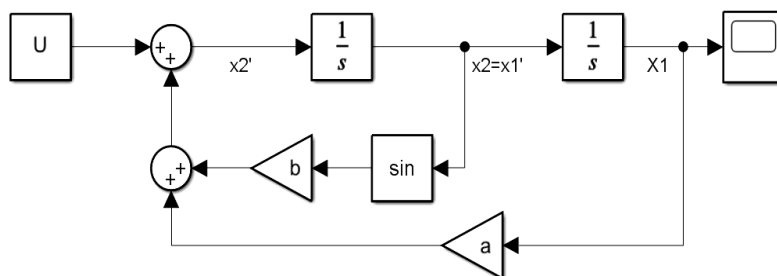
с начальными условиями $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, постоянными коэффициентами $a=-2$ и $b=-1$ и постоянным входом $U=0.75$. Необходимо решить систему уравне-

ний и построить график решения первого уравнения $x_1(t)$ на интервале $0 \leq t \leq 20$.

```
clear; clc;
% Текст основной программы
global a b U
a=-2; b=-1; U=0.75; x0=[0.5; 0];
tk=15; tspan=linspace(0,tk,1000);
[T,Y] = ode45(@right, tspan, x0);
plot(T,Y(:,1),'LineWidth',4); grid on;
% Текст функции правых частей для двух ОДУ
function dxdt = right(t,x)
global a b U
dxdt = zeros(2,1);
dxdt(1,1) = x(2);
dxdt(2,1) = a*x(1)+b*sin(x(2))+U;
end
```



Решение системы ОДУ средствами пакета Simulink [10] можно проиллюстрировать на этом же примере. На рисунке приведены Simulink-схема решения системы ОДУ и графическое изображение решения первого уравнения $x_1(t)$.



5 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАБОТЫ

В отчёте по лабораторной работе должны быть отражены цель, предварительные математические построения и расчёты, необходимые сведения о методах решения рассматриваемых задач и средствах среды Matlab/Simulink, тексты программ, схемы моделирования, численные и графические результаты расчётов и построений, выводы по работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающих программ и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные теоретические вопросы и практические задания по существу работы.

6 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие законы механики были использованы при формировании математических моделей исследуемых динамических систем (процессов)?
2. По каким признакам математическая модель Вашей динамической системы относится к классу нелинейных непрерывных динамических систем с сосредоточенными параметрами?

3. Изложите последовательность и содержание этапов метода Эйлера - Лагранжа при получении математической модели динамической системы.
4. Поясните переход от системы дифференциальных уравнений высокого порядка к нормальной форме (форме Коши).
5. Прокомментируйте структуру Matlab-программы моделирования движения динамической системы.
6. Для чего в программе используется модель глобальных параметров?
7. Поясните структуру и состав заголовка функции вычисления правых частей системы ОДУ.
8. Каким образом можно было бы применить ode-функции Matlab для решения дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами?
9. Поясните структуру и содержание Simulink-схемы моделирования движения динамической системы.
10. Каким образом в Вашей Simulink-схеме учитываются начальные условия для дифференциальных уравнений, составляющих нормальную форму.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карапетьян, В. А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ : учебное пособие / В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь. — 2-е изд., испр. — Москва : Центркаталог, 2021. — 240 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/223733> (дата обращения: 07.03.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — ISBN 978-5-903268-53-5. — Текст : электронный.
2. Hendricks E. Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods / E. Hendricks, O. Jannerup, P. Sorensen. — Berlin : Springer-Verlag, 2008. — 556 p.
3. Колюбин, С. А. Динамика робототехнических систем : учебное пособие / С. А. Колюбин. — СПб. : Университет ИТМО, 2017. — 117 с. — URL: <https://books.ifmo.ru/file/pdf/2267.pdf> (дата обращения: 25.02.2025).
4. Халил, Х. К. Нелинейные системы. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — 832 с.
5. Гудвин, Г. К. Проектирование систем управления / Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. Э. Сальгадо. — М. : Бином. Лаборатория знаний, 2004. — 911 с. — Текст : непосредственный.
6. Имитационное моделирование динамических объектов и систем : методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине "Основы управления в технических системах" для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах / Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и интеллектуальных технических систем, кафедра "Информатика и управление в технических системах" ; сост.: В. А. Карапетьян, В. А. Крамарь. — Севастополь : СевГУ, 2025. — 26 с.
7. Затонский, А. В. Моделирование объектов управления в MatLab : учебное пособие / А. В. Затонский, Л. Г. Тугашова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 144 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206033> (дата обращения: 07.03.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей — ISBN 978-5-8114-3270-7. — Текст : электронный.
8. Амос, Г. MATLAB. Теория и практика / Г. Амос ; перевод с английского Н. К. Смоленцев. — 5-е изд. — М. : ДМК Пресс, 2016. — 416 с.
9. Matlab. Mathematics. — [N. l.] : The MathWorks, Inc., 2024. — 855 p.
10. Simulink. User's Guide. — [N. l.] : The MathWorks, Inc., 2024. — 4412 p.
11. Linear Pendulum Gantry Experiment for Matlab/Simulink Users. Student Workbook. — [N. l.] : Quanser Inc., 2012. — 28 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример решения основных задач лабораторной работы

Рассмотрен пример выполнения задач лабораторной работы. В качестве исследуемого ОУ выбрана учебная физическая модель линейной обычной маятниковой системы на тележке с электрическим мотором [11]. Схема этой системы показана на рисунке А.1.

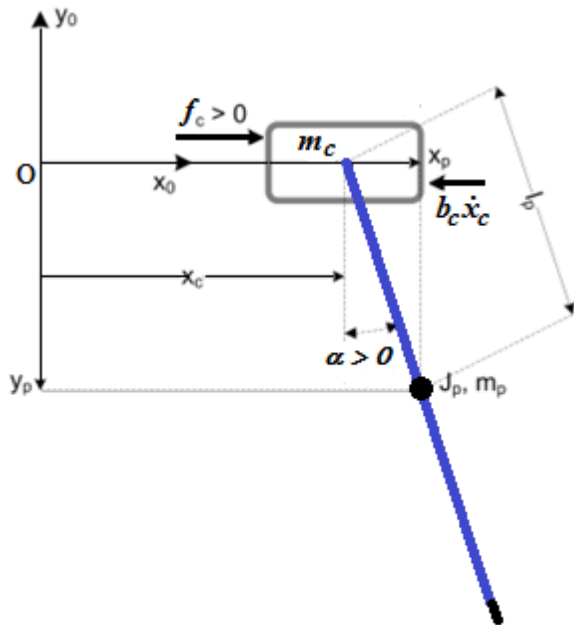


Рисунок А.1 – Схема маятниковой системы

Стержень маятника массой m_p и моментом инерции J_p укреплен на шарнире к движущейся вдоль оси x_0 тележке. Центр масс маятника расположен на расстоянии l_p от точки крепления и имеет координаты (x_p, y_p) в декартовой системе координат $\{x_0, y_0\}$. Угол поворота маятника α отсчитывается в положительном направлении от строго вертикального нижнего положения. Положительное направление движения тележки – слева направо (вдоль оси OX_0).

Для формирования математической модели движения меха-

нической динамической маятниковой системы будем использовать метод Эйлера - Лагранжа [2, 3]. Суть метода состоит в следующем:

- основные математические действия связаны с нахождением выражений для полных кинетической и потенциальной энергий системы;
- динамика механической системы рассматривается в целом;
- внутренние силы реакции связей исключаются из уравнений модели;
- уравнения представляются в символьной форме.

Альтернативой методу Лагранжа является метод Ньютона, который основан на составлении динамических уравнений баланса сил и моментов для звеньев и тел, составляющих механическую систему, а также сил реакций взаимосвязей звеньев системы.

Уравнения математической модели движения механической системы, получаемые на основе применения метода Лагранжа, порождаются уравнениями Лагранжа второго рода следующего вида:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (\text{A.1})$$

где $L=K-P$ – функция Лагранжа или лагранжиан механической системы, K – суммарная кинетическая энергия всех звеньев системы, P – суммарная потенциальная энергия всех звеньев системы, f_i – обобщённые внешние силы (моменты τ_i), q_i – обобщённые координаты, n – число степеней свободы системы.

Число степеней свободы n – минимальное количество независимых переменных, полностью описывающих параметры геометрической конфигурации системы.

Обобщённые координаты $q_i, i=1,2,\dots,n$ – минимальный набор независимых переменных, полностью и однозначно описывающих структуру и поведение механической системы в пространстве. Могут быть сформированы различные варианты комплектов (векторов) обобщённых координат. Выбирают обычно тот вариант, который позволяет представить уравнения модели в наиболее простом для записи и решения виде. Производные по времени обобщённых координат $\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ называют обобщёнными скоростями и обобщёнными ускорениями соответственно. Обобщённой силой f_i (моментом τ_i), соответствующей обобщённой координате q_i , называют причину, порождающую перемещение – линейное (f_i) или вращательное (τ_i).

Возвращаясь к нашему примеру – маятниковой системе (рисунок А.1) – выберем в качестве обобщённых координат системы две переменных: $q_1(t)=x_c(t)$ – линейное перемещение тележки вдоль оси x_0 и $q_2(t)=\alpha(t)$ – угол поворота маятника, отсчитываемого в положительном направлении от его нижнего вертикального положения.

Вектор обобщённых координат (переменных) $q(t)$ маятниковой системы будет иметь вид:

$$q(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) & \alpha(t) \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.2})$$

а вектор обобщённых скоростей $\dot{q}(t)$:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_c(t)}{dt} & \frac{d\alpha(t)}{dt} \end{bmatrix}^T.$$

В соответствии с введёнными обобщёнными переменными (А.2), уравнения Лагранжа (А.1) для нашего случая можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = f_T, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau_\alpha. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Теперь следует сформировать выражение для лагранжиана L , чтобы подставить его в соотношения (А.3) и получить уравнения движения маятниковой системы. Как следует из предварительного анализа вида соотношений (А.3), уравнения модели будут состоять из двух ОДУ второго порядка относительно переменных $x_c(t)$ и $\alpha(t)$. Чтобы получить выражение для лагранжиана L следует

иметь представления для полной кинетической K и полной потенциальной P энергий маятниковой системы.

Для определения кинетической и потенциальной энергий необходимо иметь выражения для текущих координат центра масс маятника (x_p, y_p) . Из рисунка А.1 следует, что:

$$x_p = x_c + l_p \sin(\alpha); \quad y_p = -l_p \cos(\alpha),$$

а составляющие линейной скорости центра масс маятника по осям –

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + l_p \dot{\alpha} \cos(\alpha); \quad \dot{y}_p = l_p \dot{\alpha} \sin(\alpha). \quad (\text{A.4})$$

Потенциальная энергия маятниковой системы определяется исключительно гравитационной потенциальной энергией отклонённого на угол α маятника:

$$P = m_p g l_p (1 - \cos(\alpha)). \quad (\text{A.5})$$

Полная кинетическая энергия маятниковой системы складывается из кинетических энергий поступательного движения тележки и поступательного движения центра масс маятника, а также кинетической энергии вращательного движения маятника:

$$K = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2.$$

С учётом выражений для линейных скоростей центра масс маятника (А.4), последнее соотношение примет вид:

$$K = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_c^2 + 2 \dot{x}_c l_p \dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$K = \frac{1}{2} (m_c + m_p) \dot{x}_c^2 + m_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} (J_p + m_p l_p^2) \dot{\alpha}^2. \quad (\text{A.6})$$

Последнее слагаемое в (А.6) иллюстрирует известную в механике теорему Гюйгенса-Штейнера о параллельных осях.

Лагранжиан $L=K-P$, с учётом (А.5) и (А.6), определяется следующим выражением:

$$L = K - P = \frac{1}{2} (m_c + m_p) \dot{x}_c^2 + m_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} (J_p + m_p l_p^2) \dot{\alpha}^2 - m_p g l_p (1 - \cos(\alpha)). \quad (\text{A.7})$$

Запишем представления для обобщённых сил (моментов) в системе (А.3):

– силы, определяющие горизонтальное перемещение тележки

$$f_T = f_c - b_c \dot{x}_c; \quad (\text{A.8})$$

– момент, влияющий на параметры вращательного движения маятника

$$\tau_\alpha = -b_\alpha \dot{\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь f_c – внешняя горизонтальная сила, приложенная к тележке; $b_{c\dot{x}_c}$ – сила вязкого трения, обусловленная движением тележки по горизонтальной поверхности (b_c – коэффициент вязкого трения); $b_\alpha\dot{\alpha}$ – момент вязкого трения, обусловленный трением в шарнире крепления маятника к тележке (b_α – коэффициент вязкого трения).

Теперь можно получить уравнения модели движения маятниковой системы, подставив в систему (A.3) выражение для лагранжиана (A.7) и представления для обобщённых сил (A.8) и моментов (A.9).

Из первого уравнения из системы (A.3) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = f_c \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[m_c + m_p \dot{x}_c(t) + m_p l_p \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \right] = f_c - b_{c\dot{x}_c} \Rightarrow \\ & \Rightarrow m_c + m_p \ddot{x}_c(t) + m_p l_p \ddot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) - m_p l_p \dot{\alpha}^2(t) \sin \alpha(t) = f_c - b_{c\dot{x}_c}. \quad (A.10) \end{aligned}$$

Из второго уравнения из системы (A.3) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau_\alpha \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[m_p l_p \dot{x}_c(t) \cos \alpha(t) + J_p + m_p l_p^2 \dot{\alpha}(t) \right] + \\ & \quad + m_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) + m_p g l_p \sin \alpha(t) = -b_\alpha \dot{\alpha}(t) \Rightarrow \\ & \Rightarrow m_p l_p \ddot{x}_c(t) \cos \alpha(t) + J_p + m_p l_p^2 \ddot{\alpha}(t) + m_p g l_p \sin \alpha(t) = -b_\alpha \dot{\alpha}(t). \quad (A.11) \end{aligned}$$

Уравнения (A.10) и (A.11) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (A.12)$$

Введём обозначения для векторов и матриц коэффициентов уравнения (A.12):

– матрица инерций – $M(x_c, \alpha) = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix};$

– матрица демпфирования (затухания) – $C(x_c, \alpha, \dot{x}_c, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix};$

– вектор гравитационной силы – $G(x_c, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix};$

– вектор внешних сил и моментов – $F = \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}.$

Чтобы выполнить моделирование движения маятниковой системы по уравнениям (A.12), следует привести эту систему к нормальной форме (форме Коши) – системе ОДУ первого порядка, разрешённую относительно первых производных:

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(x, f, t), \quad (\text{A.13})$$

где $x(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ – n -вектор-функция искомых переменных; $h(t)=[h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)]^T$ – n -вектор-функция правых частей системы (A.13); $f(t)=[f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)]^T$ – m -вектор-функция внешних воздействий.

Переход от системы (A.12) к нормальной форме (A.13) можно осуществить, например, в два этапа – разрешить систему (A.12) относительно старших производных (в нашем случае – относительно вторых производных $\ddot{x}_c(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$), а затем, введя вектор состояния $x(t)$ из четырёх переменных, сформировать систему вида (A.13).

Выполнение первого этапа преобразования состоит в умножении левой и правой частей системы (A.12) на матрицу, обратную матрице инерций H , тогда векторно-матричное уравнение (A.12) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = -H \cdot \begin{bmatrix} b_c & -m_p l_p \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 & b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} - H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin \alpha \end{bmatrix} + H \cdot \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

где матрица H вычисляется обычным обращением матрицы инерций M :

$$H = \begin{bmatrix} m_c + m_p & m_p l_p \cos \alpha \\ m_p l_p \cos \alpha & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\alpha)} \begin{bmatrix} J_p + m_p l_p^2 & -m_p l_p \cos \alpha \\ -m_p l_p \cos \alpha & m_c + m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

где $\Delta(\alpha) = m_c + m_p \quad J_p + m_p l_p^2 - m_p^2 l_p^2 \cos^2 \alpha$ – определитель матрицы инерций M .

Существование обратной матрицы инерций H справедливо для любой физически реализуемой маятниковой системы. Этот факт следует из очевидного неравенства для детерминанта матрицы инерций:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \det M(x_c, \alpha) = m_c + m_p \quad J_p + m_p l_p^2 - m_p^2 l_p^2 \cos^2 \alpha = \\ &= m_c + m_p \quad J_p + m_c m_p l_p^2 + m_p^2 l_p^2 \quad 1 - \cos^2 \alpha > 0, \quad \forall m_c > 0, m_p > 0, J > 0, \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Выполним второй этап преобразования (A.12) к нормальной форме. Введём вектор состояния будущей нормальной системы, например, следующим образом:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix},$$

тогда систему (А.14) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & H_{11}b_c & -H_{11}m_p l_p x_4 \sin x_2 + H_{12}b_\alpha \\ 0 & 0 & H_{21}b_c & -H_{21}m_p l_p x_4 \sin x_2 + H_{22}b_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{12}m_p g l_p \sin x_2 \\ H_{22}m_p g l_p \sin x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_{11} & 0 \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

где H_{ij} – элементы обратной матрицы инерций H из (А.15).

Первая матричная функция из (А.17) в развёрнутом виде представляется как

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_c J_p + m_p l_p^2 / \Delta(\alpha) & [J_p + m_p l_p^2 m_p l_p x_4 \sin x_2 + b_\alpha m_p l_p \cos x_2] / \Delta(\alpha) \\ 0 & 0 & b_c m_p l_p \cos x_2 / \Delta(\alpha) & -[0, 5m_p^2 l_p^2 \dot{\alpha} \sin 2x_2 + b_\alpha m_c + m_p] / \Delta(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\text{вторая} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0, 5m_p^2 l_p^2 g \sin 2x_2 / \Delta(\alpha) \\ -m_c + m_p m_p g l_p \sin x_2 / \Delta(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \text{третья} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ J_p + m_p l_p^2 / \Delta(\alpha) & 0 \\ -m_p l_p \cos x_2 / \Delta(\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Параметры маятниковой системы приведены в таблице А.1.

Таблица А.1 – Значения параметров маятниковой системы

Параметр	Значение	Ед. изм.	Пояснение
m_c	0.37	кг	Масса тележки
m_p	0.127	кг	Масса маятника
l_p	0.1778	м	Расстояние от крепления до ЦМ маятника
J_p	$1.1987 \cdot 10^{-3}$	кг·м ²	Момент инерции маятника
b_α	0.0024	Н·м·сек/рад	Коэффициент вязкого трения в шарнире
b_c	0.0005	Н/(м/сек)	Коэффициент вязкого трения тележки
g	9.81	м/сек ²	Ускорение свободного падения

Далее, по уравнениям модели (А.17), выражений для матриц (А.18) и значений параметров маятниковой системы из таблицы А.1, можно составить Matlab-программу моделирования движения системы. По сути, назначение этой программы – численное решение системы нелинейных ОДУ (А.17). Пример текста такой программы и графические результаты счёта приведены ниже. Программа включает в себя собственно основную программу и текст функции вычисления правых частей **RP_NonLinear_LR** для решателя системы ОДУ.

Текст (листинг) script-файла **Pendulum_Nonlinear_LR.m**

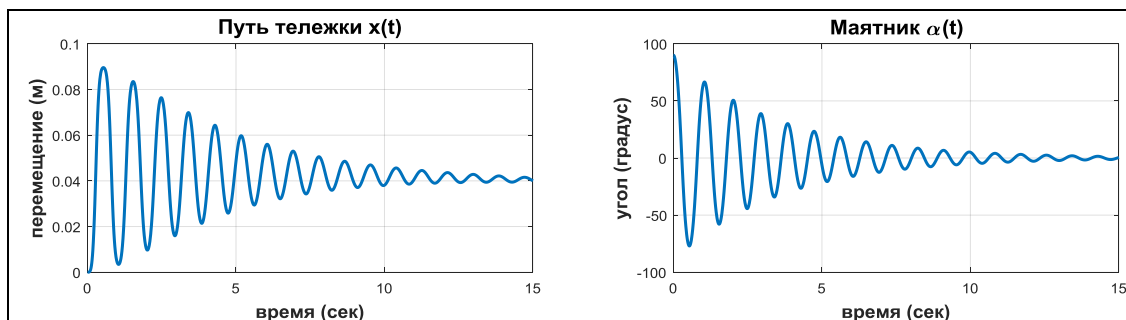
```

clc; clear;
%% Передача данных в функцию вычисления правых частей системы ОДУ
global M_m J_mL2 m2L2 mL b C g U;
%% Значения параметров маятниковой системы
M=0.37;      % mc – масса тележки [кг]
m=0.127;     % mp – масса груза [кг]
b=0.0005;    % ba – коэффициент вязкого трения тележки [Н/м/сек]
C=0.0024;    % bc – коэффициент вязкого трения в маятнике [Н*м/(рад/сек)]
L=0.1778;    % lp – расстояние между осью маятника и ЦМ [м]
J=1.1987e-3; % Jp – момент инерции массы маятника [кг*м^2]
g=9.81;      % g – ускорение свободного падения [м/сек^2]
% X=[xс alpha Dxс Dalpha]' - вектор состояния
%% Вспомогательные постоянные функции правых частей системы ОДУ
M_m=M+m;      J_mL2=J+m*L^2;
m2L2=m^2*L^2; mL=m*L;
%% Установка исходных данных и решение системы ОДУ
x0=[0 deg2rad(90) 0 deg2rad(0)]';
t_end=15;
U=0.0;
[t,y]=ode23tb(@RP_NonLinear_LR,[0 t_end],x0);
%% Построение графиков перемещения тележки и изменения угла маятника
subplot(1,2,1); plot(t,y(:,1)); grid on; title('Путь тележки x(t)');
subplot(1,2,2); plot(t,y(:,2)*180/pi); grid on; title('Маятник \alpha(t)');

function Y=RP_NonLinear_LR(t,X)
    global M_m J_mL2 m2L2 mL b C g U;
    D=M_m*J_mL2 - m2L2*cos(X(2))^2;
    Y=zeros(4,1);
    Y(1)=X(3);
    Y(2)=X(4);
    Y(3)=(-b*J_mL2*X(3)+(C*mL*cos(X(2))+mL*sin(X(2))*X(4)*J_mL2)*X(4)+...
        0.5*g*m2L2*sin(2*X(2))+J_mL2*U)/D;
    Y(4)=(b*mL*cos(X(2))*X(3)+(-C*(M_m)-0.5*m2L2*sin(2*X(2))*X(4))*X(4)-...
        g*mL*sin(X(2))*M_m-mL*cos(X(2))*U)/D;
end

```

Результаты работы программы моделирования движения маятниковой системы:



Simulink-схема моделирования движения маятниковой системы строится в соответствии с рисунком А.2. Структура схемы, выбор и установка значений параметров блоков (имена параметров блоков совпадают с именами переменных программы **Pendulum_Nonlinear_LR.m**), цвета блоков и сигнальных линий обусловлены двумя дифференциальными уравнениями модели (А.10) и (А.11), переписанными в подходящих эквивалентных формах:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{M+m} \left[-mL \cos \alpha(t) \cdot \ddot{\alpha}(t) - b \cdot \dot{x}(t) + mL \sin \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}^2(t) + f_c \right]; \quad (\text{А.10})$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{1}{J+mL^2} \left[-mL \cos \alpha(t) \cdot \ddot{x}(t) - C \cdot \dot{\alpha}(t) - mgL \sin \alpha(t) \right]. \quad (\text{А.11})$$

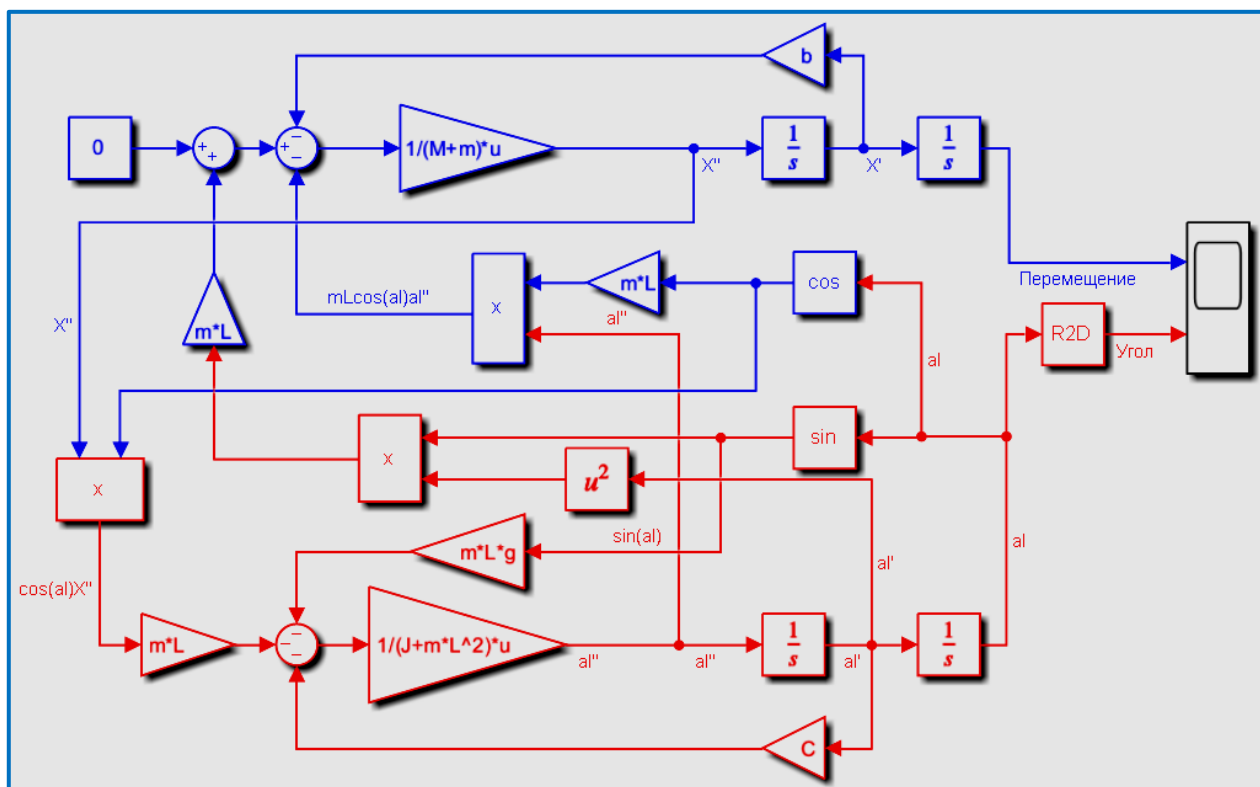


Рисунок А.2 – Simulink-схема моделирования маятниковой системы

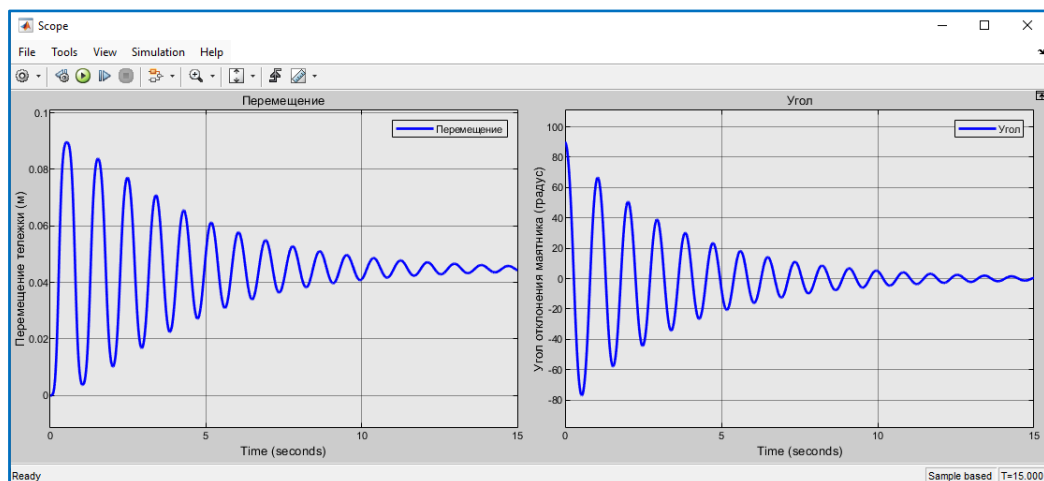


Рисунок А.3 – Результаты моделирования в Simulink

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Методические указания

Составители: **Карапетьян** Валерий Артёмович,
Крамарь Вадим Александрович

В авторской редакции

Изд. № 45/2025. Объем 1,5 п.л. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,47.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»