

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кафедра информатики и управления в технических системах

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

для студентов направления подготовки
27.03.04 «Управление в технических системах»



Севастополь
СевГУ
2025

УДК 681.5.015:519.246.2(075.8)
ББК 32.965:22.172я73
М545

Р е ц е н з е н т:

Б. А. Скороход – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры
"Информатика и управление в технических системах"

Составитель: С. А. Дубовик

М545 Методы идентификации математических моделей объектов и систем: учебное пособие для студентов направления подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» / Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и интеллектуальных технических систем, кафедра информатики и управления в технических системах ; сост. С. А. Дубовик. – Севастополь : СевГУ, 2025. – 79 с. – Текст : электронный.

Приводится краткое введение в статистическую теорию идентификации и методы теории больших отклонений; представлены описания лабораторных работ, имеющих целью практическое усвоение принципов оценивания параметров статических и динамических линейных непрерывных и дискретных систем с применением средств пакета Matlab&Simulink.

Предназначено для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах.

УДК 681.5.015:519.246.2(075.8)
ББК 32.965:22.172я73

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 6 от 25 марта 2025 г.

Рекомендовано к изданию на заседании ученого совета Института радиоэлектроники и интеллектуальных технических систем, протокол № 8 от 18 апреля 2025 г.

© Дубовик С. А., сост., 2025
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Основные понятия вероятностной теории идентификации	6
1.1 Испытания, дискретная случайная величина и смежные понятия	6
1.2 Дискретные и непрерывные распределения, числовые характеристики, ковариация и коэффициент корреляции случайных величин	9
1.3 Сходимость по вероятности и неравенство Чебышева; закон больших чисел	12
1.4 Методы наименьших квадратов и максимального правдоподобия, регрессия	14
1.5 Применения к идентификации динамических систем	18
1.6 Идентификация состояния: дискретный фильтр Калмана	19
1.7 Непрерывный фильтр Калмана	24
П1. Приложение к главе1: лабораторные работы № 1-4	27
П1.1 Статистическая обработка одномерной выборки	27
П1.2 Идентификация статических объектов на основе полиномиальной регрессии	30
П1.3 Идентификация динамических систем апериодического типа методом наименьших квадратов	32
П1.4 Идентификация параметров и оценка колебательных движений масштабной модели судна по данным экспериментальных исследований в опытовом бассейне СевГУ	34
2 Принцип больших уклонений в задачах идентификации, управления и связи	40
2.1 Принцип локализации, метод Лапласа и аппроксимация распределений	40
2.2 Принцип больших уклонений	46
2.3 Теорема Гертнера - Эллиса	48

2.4 Лемма Варадхана	50
2.5 Принцип сжатия (contraction)	51
2.6 ПБУ для эмпирического распределения (меры заполнения)	52
2.7 Пуассоновские и связанные с ними процессы	55
Процессы рождения и гибели	57
Масштабируемый процесс	57
Очередь М/М/1	58
2.8 Диффузионные марковские процессы; применение ПБУ в прогнозировании и управлении	61
Вычисление χ -профиля для линейных систем	63
Применение ПБУ в синтезе управления на основе асимптотических методов и СП	66
П2. Приложение к главе 2: лабораторные работы № 5, 6	73
П2.1 Оценки вероятностей для больших отклонений	73
П2.2 Оценки плотностей и функций действия в условиях ПБУ	75
Литература	77

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего учебного пособия – ознакомление студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах, с базовыми понятиями вероятностной теории оценивания и ее приложений к идентификации систем, что составляет базовые разделы обеих частей пособия. Здесь вводятся основные понятия статистической теории оценивания и идентификации и методы, лежащие в основе построения статических и динамических моделей объектов управления по экспериментальным данным.

В развитие изданных в 2019 и 2021 гг. «Методических указаний для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы идентификации (МИ)», настоящее учебное пособие по дисциплине "Методы идентификации математических моделей объектов и систем (МИММОиС)" содержит учебный материал, необходимый для построения интеллектуальных и функционально устойчивых систем управления. Это потребовало существенного расширения вероятностно-статистической базы применяемых методов идентификации. Так, вместо обычного доминирования центральной предельной теоремы и закона больших чисел, принципиальным моментом становится анализ больших отклонений (АБУ), более глубокий, чем в издании 2021 г. Это представлено во втором разделе настоящего пособия. Существенно расширен спектр рассматриваемых задач, кроме гауссовых распределений в постановках используются процессы пуассоновского типа, что позволило наряду с применениями к системам управления рассмотреть некоторые вопросы коммуникаций.

Содержимое первого раздела, соответствующее устоявшемуся материалу курса МИ, по-прежнему является основой и курса МИММОиС. На базе этого материала студенты выполняют лабораторные работы, методические указания к которым представлены в приложении к первой части пособия. Из имеющегося широкого спектра компьютерных средств идентификации динамических систем основное внимание уделяется Matlab & Simulink как наиболее приемлемому в смысле компромисса возможных требований и критериев. Материал пособия может быть использован в курсах робототехники и теории адаптивных систем.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В этой главе из основных вероятностных конструкций выводится минимально необходимый набор понятий и принципов теории оценивания и идентификации, которые затем используются в лабораторных работах (приложение П1).

1.1 Испытания, дискретная случайная величина и смежные понятия

Рассмотрим эксперимент с конечным числом исходов:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N.$$

Исходы также называются элементарными событиями, а их совокупность

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} -$$

(конечным) пространством элементарных событий (ПЭС).

Пример 1. Однократное подбрасывание монеты. Исходы:

$$\omega_1 = 1 \text{ (или } \Gamma \text{ -«герб»)}, \quad \omega_2 = 0 \text{ (или } P \text{ -«решетка»)},$$

то есть $N = 2$,

$$\text{ПЭС: } \Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{1, 0\} = \{\Gamma, P\}.$$

Пример 2. n -кратное подбрасывание монеты. Исходы:

$$\omega_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega : \omega = \omega_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), \quad a_j^i = 0 \text{ или } 1 \}.$$

Упражнение 1. Чему равно N в примере 2?

Пример 3. Распределение трех шаров (a, b, c) по трем емкостям: все исходы – в табл.1

Таблица 1

1. $\{abc \text{—} \text{—}\}$	10. $\{a bc \text{—}\}$	19. $\{\text{—} a bc\}$
2. $\{\text{—} abc \text{—}\}$	11. $\{b ac \text{—}\}$	20. $\{\text{—} b ac\}$
3. $\{\text{—} \text{—} abc\}$	12. $\{c ab \text{—}\}$	21. $\{\text{—} c ab\}$
4. $\{ab c \text{—}\}$	13. $\{a \text{—} bc\}$	22. $\{a b c\}$
5. $\{ac b \text{—}\}$	14. $\{b \text{—} ac\}$	23. $\{a c b\}$
6. $\{bc a \text{—}\}$	15. $\{c \text{—} ab\}$	24. $\{b a c\}$
7. $\{ab \text{—} c\}$	16. $\{\text{—} ab c\}$	25. $\{b c a\}$
8. $\{ac \text{—} b\}$	17. $\{\text{—} ac b\}$	26. $\{c a b\}$
9. $\{bc \text{—} a\}$	18. $\{\text{—} bc a\}$	27. $\{c b a\}$

то есть, в данном случае, $N = 27$.

Пример 4. Выбор с возвращением упорядоченный (ВВУ), $(())$ – размещения):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_j = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = M^n; \end{aligned} \quad (1)$$

– неупорядоченный (ВВН) - $[\]$ (сочетания):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_j = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = C_{M+n-1}^n, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пример 5. Выбор без возвращения упорядоченный (ВБВУ) - $(())$ (размещения):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad a_i = 1, 2, \dots, M \}, \\ N = N(\Omega) = (M)_n = A_M^n = M(M-1) \cdots (M-n+1); \end{aligned} \quad (3)$$

– неупорядоченный (ВБВН) - $[\]$ (сочетания):

$$\begin{aligned} \text{ПЭС: } \Omega = \{ \omega: \omega = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad a_i = 1, 2, \dots, M \} \\ N = N(\Omega) = C_M^n = (M)_n / n!. \end{aligned} \quad (4)$$

Количества исходов (мощности) ПЭС из примеров 3, 4 сведены в табл. 2, а структуры ПЭС для случая $M = 3, n = 2$ – в табл. 3 [16].

Таблица 2

Набор (тип шаров) Выбор (размещение)	Упорядоченный (различимые)	Неупорядоченный (неразличимые)
С возвращением (без запрета)	M^n	C_{M+n-1}^n
Без возвращения (с запретом)	$(M)_n = A_M^n$	$C_M^n = (M)_n / n!$

Таблица 3

Набор Выбор	Упорядоченный	Неупорядоченный
С возвращением	$(1,1) \ (1,2) \ (1,3)$ $(2,1) \ (2,2) \ (2,3)$ $(3,1) \ (3,2) \ (3,3)$	$[1,1] \ [2,2] \ [3,3]$ $[1,2] \ [1,3]$ $[2,3]$
Без возвращения	$(1,2) \ (1,3)$ $(2,1) \ (2,3)$ $(3,1) \ (3,2)$	$[1,2] \ [1,3]$ $[2,3]$

Упражнение 2. Проверить мощности N ПЭС в таблице 3.

Пример 6. Размещение r шаров по m емкостям (см. пример 3).

Упражнение 3. Как изменится мощность в предыдущем примере, если число емкостей увеличить на 1?

Упражнение 4. (О совпадениях) Пусть урна содержит M шаров, занумерованных числами $1, 2, \dots, M$. Производится выбор с возвращением упорядоченного набора в количестве n шаров. Какова вероятность события $A = \{\omega: a_i \neq a_j, i \neq j\}$, то есть, отсутствия повторений?

Упражнение 5. (О совпадениях) В группе n студентов. Какова вероятность P_n того, что в какой-то из дней обычного (не високосного) года в аудитории найдутся по крайней мере 2 студента, дни рождения которых совпадают? Вычислить P_n для $n = 4, 16, 22, 40, 64$.

Упражнение 6. (О лотереях) Пусть из M билетов n – выигрышные ($M \geq 2n$) и приобретено также n билетов. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету?

Если для пространства исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (не обязательно конечного множества) вероятность P определена на системе его подмножеств B (алгебре или сигма-алгебре [16]), то говорят о вероятностном пространстве (Ω, B, P) .

Испытания Бернулли, биномиальное распределение.

Рассмотрим эксперимент (испытание Я. Бернулли) ВВУ (пример 2): каждому элементарному событию (исходу) $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ припишем вероятность

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n a_i} q^{n - \sum_{i=1}^n a_i}, \quad (5)$$

где неотрицательные p, q таковы, что $p + q = 1$. Все исходы можно разделить на группы Ω_k , для которых $\sum_{i=1}^n a_i = k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда число исходов в экс-

перименте $N = \sum_{k=0}^n N(\Omega_k)$.

Замечание 1. Такая модель может быть представлена [(20], гл.1, параграф 3) как результат n независимых испытаний для переменной a_i с двумя исходами – 1 и 0.

Упражнение 7. (О биномиальных вероятностях) Доказать, что распределение (5) на ПЭС Ω является вероятностным, т.е. удовлетворяет аксиомам вероятности.

Вероятности $P_k = P(\Omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, и соответствующее распределение называются биномиальными.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называется всякая числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на ПЭС Ω и имеющая конечное или счетное число действительных значений.

Пример 7. Простейшая ДСВ – индекс I_A события (множества) $A \subset \Omega$:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega / A \end{cases}.$$

Пример 8. ДСВ, имеющая r значений $x_1, x_2, \dots, x_r$, может быть представлена следующим образом:

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^r x_k I_{A_k}(\omega), \quad (6)$$

где $A_k = \{\omega: \omega \in \Omega, \xi(\omega) = x_k\}$ – все множество исходов, при которых ДСВ принимает значение x_k (иначе говоря, A_k есть прообраз x_k). Так как в (6) перебор всех значений индекса суммирования исчерпывает все значения ДСВ, то при попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_r$ ПЭС есть объединение непересекающихся (то есть, разбиение Ω) прообразов x_k :

$$P(\Omega) = P\left\{\bigcup_{k=1}^r A_k\right\} = 1.$$

Аналогичным образом можно говорить о разбиении некоторого множества $A \subset \Omega$ (события) на k подмножеств $A_i, i = 1, 2, \dots, k$, если (см. [20], гл.1, с.23)

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_k.$$

1.2 Дискретные и непрерывные распределения, числовые характеристики, ковариация и коэффициент корреляции случайных величин

Рассмотрим ДСВ ξ , принимающую r значений $x_1, x_2, \dots, x_r$ из промежутка $X \subset R$ действительной прямой R (то есть $\xi: \Omega \rightarrow X \subset R$). Обозначим вероятность p_k прообраза x_k :

$$p_k = P(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

То, что это вероятность, следует из аддитивности P и того, что это разбиение ПЭС Ω :

$$\sum_{k=1}^r p_k = \sum_{k=1}^r P(A_k) = P\left\{\bigcup_{k=1}^r A_k\right\} = P(\Omega) = 1.$$

Распределением ДСВ $\xi: \Omega \rightarrow X$ называется совокупность r пар (x_k, p_k) , $k = 1, 2, \dots, r$, $\sum_{k=1}^r p_k = 1$. По распределению легко вычисляется **математическое ожидание (среднее)** ξ :

$$M\xi = \sum_{k=1}^r p_k x_k, \quad (7)$$

а также **функция распределения ДСВ** ξ :

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \sum_{\{k: x_k < x\}} p_k. \quad (8)$$

Упражнение 8. В условиях примера 2 показать, что для случайной величины a_i с двумя исходами — 1 и 0 и с вероятностью p события $a_i = 1$, среднее также равно p , а математическое ожидание суммы $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ равно np .

Еще одной числовой характеристикой ДСВ ξ является **дисперсия** $D\xi$ — усредненная интенсивность отклонения ДСВ ξ от ее среднего:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sigma_\xi^2, \quad (9)$$

где σ_ξ — среднеквадратичное отклонение (СКО).

Упражнение 9. Показать, что

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (10)$$

Упражнение 10. Пусть случайная величина ξ имеет среднее $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ и для заданных чисел a и b определена случайная величина $y = a + b\xi$. Вычислить среднее и дисперсию для y .

Упражнение 11. В продолжение примера 2 и с учетом замечания 1 определить дисперсии случайных величин a_i и $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Для непрерывной случайной величины (НСВ) $\xi: \Omega \rightarrow X \subset R$ аналогично (7) вводится функция распределения:

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(s) ds,$$

где под интегралом записана функция плотности распределения (аналог распределения ДСВ). Для гладкой и монотонно неубывающей на R функция распределения $F_{\xi}(x)$, получаем

$$f_{\xi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x),$$

причем (доказать!):

$$F_{\xi}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(s) ds = 1.$$

Наконец, по аналогии с (7) имеем формулу для среднего $\xi: \Omega \rightarrow X$:

$$M\xi = \int_X x f_{\xi}(x) dx. \quad (11)$$

Ковариация двух случайных величин ξ и η определяется как

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\}.$$

Если дисперсии случайных величин ξ и η положительны ($D\xi > 0$ и $D\eta > 0$), то для таких случайных величин определяется **коэффициент корреляции**:

$$\rho(\xi, \eta) = \text{cov}(\xi, \eta) / \sqrt{D\xi D\eta}.$$

Упражнение 10. Показать, что для случайных величин ξ и $y = a + b\xi$, о которых идет речь в условии упражнения 9, имеем в соответствии со знаком a :

$$\rho(\xi, y) = \pm 1.$$

Если же случайные величины ξ и η независимы в вероятностном смысле [1,13,16], то они некоррелированы:

$$\rho(\xi, \eta) = 0.$$

При этом из некоррелированности совсем не обязательно следует независимость [13,16] (это так для гауссовских величин).

1.3 Сходимость по вероятности и неравенство Чебышева; закон больших чисел

Пусть случайные величины $z, \xi_1, \xi_2, \dots$ заданы на вероятностном пространстве (Ω, B, P) . Тогда последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ *сходится по вероятности* к z , если для любого $\varepsilon > 0$ и при $n \rightarrow \infty$ вероятности $P_\varepsilon(n) = P(|\xi_n - z| \geq \varepsilon)$ сходятся (в обычном смысле) к нулю, то есть

$$P_\varepsilon(n) = P(|\xi_n - z| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, z может быть неслучайной величиной, например, действительным числом (или вектором с действительными элементами). Именно этот частный случай интересен нам при анализе сходимости относительных частот к вероятностям. Но прежде выведем неравенство Чебышева).

Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность $f_\xi(x)$ на R , среднее значение $M\xi = m$, дисперсию $D\xi = \sigma_\xi^2$, а также для $\varepsilon > 0$ связанные с этой случайной величиной вероятности событий:

$$A_\varepsilon = \{\omega : |\xi(\omega) - m| \geq \varepsilon\},$$

то есть вероятности

$$P_\varepsilon = P(A_\varepsilon).$$

Указанные вероятности определяются по плотности:

$$P_\varepsilon = \int_{A_\varepsilon} f_\xi(x) dx$$

и при этом полезно заметить, что событие A_ε , по которому производится интегрирование, может быть представлено эквивалентным образом:

$$A_\varepsilon = \{\omega : (\xi(\omega) - m)^2 \geq \varepsilon^2\} = \{\omega : \left(\frac{\xi(\omega) - m}{\varepsilon}\right)^2 \geq 1\}.$$

На этом основании записываем неравенство

$$P_\varepsilon = \int_{A_\varepsilon} f_\xi(x) dx \leq \int_{A_\varepsilon} \frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{A_\varepsilon} (x-m)^2 f_\xi(x) dx,$$

откуда, учитывая включение $A_\varepsilon \subset R$ (см. в [16], гл.2, параграф 4, определение 2) и свойства математического ожидания, имеем

$$P_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{A_\varepsilon} (x-m)^2 f_\xi(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_R (x-m)^2 f_\xi(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} M[(\xi-m)^2].$$

Вспоминая теперь определение дисперсии, получаем искомое неравенство:

$$P_\varepsilon = P\{\omega: |\xi(\omega) - m| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь эмпирическое среднее $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ для бинарной случайной величины a_i из примера 2 (см. также упражнение 8) и воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины

$$\xi(\omega) = \xi_n(\omega) = S_n/n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k,$$

которая, как мы видим, зависит от n и характеризует относительную частоту успеха в схеме Бернулли и можно ставить вопрос о сходимости ξ_n к ее среднему, то есть (упражнение 8 !) к $\xi = np/n = p$. В данном случае это именно сходимость по вероятности ξ_n к $z = p$ при $n \rightarrow \infty$ и которая устанавливается вычислением дисперсии в правой части неравенства (12):

$$D\xi_n = \sigma_{\xi_n}^2 = \frac{1}{n^2} DS_n = \frac{1}{n^2} npq = pq/n.$$

То есть, действительно,

$$P_\varepsilon(n) = P(|S_n/n - p| \geq \varepsilon) = \frac{pq}{n} / \varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

что и является утверждением закона больших чисел.

1.4 Методы наименьших квадратов и максимального правдоподобия, регрессия

Для статического объекта, относительно которого имеются данные экспериментов на входе: $\vec{u} \in R^n$, и на выходе: $\vec{y} \in R^n$, уравнение регрессии, интерпретирующее эти данные с помощью вектора параметров $\vartheta \in R^m$, имеет вид

$$\vec{y} = \Gamma(\vec{u})\vartheta, \quad (13)$$

где $\Gamma = \Gamma(\vec{u})$ – $n \times m$ -матрица следующего вида (A^T – матрица, транспонированная по отношению к A):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_1^T(\vec{u}_1) \\ \vec{\gamma}_2^T(\vec{u}_2) \\ \vdots \\ \vec{\gamma}_n^T(\vec{u}_n) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Векторные аргументы в строках помечены стрелкой, чтобы отличать их от элементов u_i .

Замечание 1. Возможны различные зависимости векторной функции $\gamma \in R^m$ от элементов входного вектора. Для наших целей будет достаточно двух частных вариантов; чтобы описать их, введем следующее представление i -й строки матрицы (14):

$$\vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) = \gamma^T(c_i(\vec{u}_i)), \quad (15)$$

в котором $c_i(\vec{u}_i)$ будет реализовано одним из способов:

1. $c_i(\vec{u}_i) = u_i, \quad \gamma^T(u) = (1, u, \dots, u^{m-1})$;
2. $c_i(\vec{u}_i) = \vec{u}_i, \quad \gamma(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$.

Первый вариант (15) будем называть *полиномиальной* регрессией, второй (условно) – *тождественной* регрессией.

Понятно, что в общем случае, при произвольном m , аппроксимировать данные моделью (13) без ошибок (то есть, при подстановке $\vec{u}$ в правую часть (13) получается в точности $\vec{y}$) невозможно, хотя при $m = n$ и при выполнении определенного условия **невырожденности эксперимента (НЭ)** такая точная

интерпретация данных эксперимента возможна и соответствующий метод называется **интерполяцией данных (ИД)**.

Упражнение 11. Показать, в чем состоит условие НЭ относительно матрицы (14) в задаче интерполяции.

Возвращаясь к общему случаю, введем критерий точности аппроксимации, равный половине квадрата невязки между правой и левой частями в (13):

$$I(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} (\vec{y} - \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G})^T (\vec{y} - \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G}).$$

Упражнение 12. Показать, что критерий, в котором $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, имеет вид

$$I(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) \mathcal{G})^2. \quad (16)$$

Задача аппроксимации данных для регрессии (13) теперь может быть сформулирована как задача нахождения такого единственного значения векторного параметра $\mathcal{G}$, которое минимизирует величину критерия $I(\mathcal{G})$.

Подставляя в (16) для $\mathcal{G} \in R^m$ компоненты $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m)^T$, выполняя действия и вычисляя частные производные $\partial I(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m) / \partial \mathcal{G}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, получим в качестве необходимых условий экстремума систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [\vec{\gamma}_i(\vec{u}_i)]_j (y_i - \vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) \mathcal{G}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где индекс при векторе в квадратных скобках обозначает соответствующий элемент указанного вектора. Понятно, что эта система эквивалентна одному m -векторному уравнению:

$$\sum_{i=1}^n \vec{\gamma}_i(\vec{u}_i) (y_i - \vec{\gamma}_i^T(\vec{u}_i) \mathcal{G}) = 0,$$

которое с учетом (14) приобретает особенно простой вид:

$$\Gamma^T \vec{y} - \Gamma^T \Gamma \mathcal{G} = 0. \quad (17)$$

При условии невырожденности данных:

$$\det \Gamma^T \Gamma \neq 0, \quad (18)$$

имеем оценку **метода наименьших квадратов (МНК)** искомых параметров:

$$\mathcal{G}_{МНК} = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \vec{y}. \quad (19)$$

Запишем теперь уравнение регрессии с векторной ошибкой $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{y} = \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G} + \vec{\varepsilon}, \quad (20)$$

где элементы $\vec{\varepsilon} \in R^n$ представляют собой гауссовские случайные величины с нулевым средним, то есть $\vec{\varepsilon}$ – гауссовский вектор, $M \vec{\varepsilon} = 0$, имеющий матрицу ковариаций $D = \text{cov}(\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}) = M(\vec{\varepsilon} \vec{\varepsilon}^T) > 0$ (где знак неравенства означает положительную определенность D). Эти дополнительные предположения об ошибке $\vec{\varepsilon}$ позволяют по другому взглянуть на задачу интерпретации данных: поскольку из (20) следует для ошибки:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{y} - \Gamma(\vec{u}) \mathcal{G}, \quad (21)$$

то есть, для правой части этого равенства имеется параметризованная плотность распределения $f_{\vec{\varepsilon}}(x; \mathcal{G})$, то в соответствии с **методом максимального правдоподобия** [13], с.232) в качестве выборки x нужно взять значения правой части (21) на данных $\vec{u}$, $\vec{y}$. Вспоминая, что плотность – это аналог распределения ДСВ и характеризует вероятность этих данных, то естественной представляется мысль – так выбрать параметр $\mathcal{G}$, чтобы максимизировать эту вероятность:

$$f_{\vec{\varepsilon}}(x; \mathcal{G})|_{x=\vec{\varepsilon}(\vec{u}, \vec{y})} \rightarrow \max_{\mathcal{G} \in R^m}. \quad (22)$$

Для упрощения предположим, во первых, независимость (некоррелированность в гауссовском случае) компонент $\vec{\varepsilon}$, для каждой i -й из которых известно среднее квадратическое отклонение $\sigma_i > 0$. Тогда, обозначая плотность для i -й компоненты $\vec{\varepsilon}$ как $f_i(x; \mathcal{G})$, будем иметь:

$$f_{\vec{\varepsilon}}(x; \mathcal{G}) = \prod_{i=1}^n f_i(x; \mathcal{G}). \quad (23)$$

Во-вторых, для семейства экспоненциальных распределений, к которому принадлежит и гауссовская плотность, в качестве функционала правдоподобия L в задаче (22) может быть взята не сама плотность, а ее логарифм (почему?), поэтому метод **максимального правдоподобия (МП)** в итоге приводит к задаче

$$L(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} (y_i - \tilde{\gamma}_i^T(\bar{u}_i) \vartheta)^2 \rightarrow \min_{\vartheta \in R^m}. \quad (24)$$

В случае взаимной корреляции измерений имеем задачу

$$L(\vartheta) = \frac{1}{2} (\bar{y} - \Gamma(\bar{u}) \vartheta)^T D^{-1} (\bar{y} - \Gamma(\bar{u}) \vartheta) \rightarrow \min_{\vartheta \in R^m},$$

которая, впрочем, содержит и задачу (24) как частный случай диагональной матрицы ковариаций. Сравнивая (24) и (16), замечаем, что МНК-оценки являются частным случаем МП-оценок при равноточных измерениях. Для МП-оценок (maximum likelihood) имеем (сравнить с (19)):

$$\vartheta_{ML} = G \bar{y}, \quad G = (\Gamma^T D^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T D^{-1}. \quad (25)$$

Упражнение 13. Пусть случайный вектор ξ имеет ковариационную матрицу X и для заданных матрицы A и вектора b имеем $y = A\xi + b$. Показать, что $\text{cov } y = AXA^T$.

В связи с оценкой (25) удобно ввести понятие **информационной матрицы**:

$$M = \Gamma^T D^{-1} \Gamma,$$

так что в (25):

$$G = M^{-1} \Gamma^T D^{-1}.$$

Оказывается, что с помощью этой матрицы можно преобразовать $\vec{\varepsilon}$ в ошибку оценивания e :

$$e = \vartheta_{ML} - \vartheta$$

и это тесно связано с информационной матрицей, которая таким образом определяет точность оценивания. В наших предположениях $\bar{y}$, также как и $\vec{\varepsilon}$, является гауссовской случайной величиной (векторной). Поэтому в силу (25) ϑ_{ML} — тоже случайный вектор с математическим ожиданием ϑ . Действительно, из (25) и (20) имеем:

$$\vartheta_{ML} = G(\Gamma \vartheta + \vec{\varepsilon}) = M^{-1} \Gamma^T D^{-1} (\Gamma \vartheta + \vec{\varepsilon}) = M^{-1} M \vartheta + G \vec{\varepsilon},$$

то есть

$$e = \vartheta_{ML} - \vartheta = G \vec{\varepsilon}.$$

Отсюда и из упражнения 13 для ковариационной матрицы e следует:

$$\text{cove} = P = G D G^T. \quad (26)$$

В результате справедлива

Лемма1. Ковариационная матрица ошибки оценивания $P = \text{cove}$ и информационная матрица $M > 0$ связаны соотношением:

$$P = M^{-1}.$$

Доказательство: следует из (26), где нужно подставить $G = M^{-1} \Gamma^T D^{-1}$ и выполнить действия.

Замечание 2. Про вектор $\mathcal{G}_{ML}$ в соответствии с упражнением 13 можно написать

$$\mathcal{G}_{ML} \propto N(\mathcal{G}, G D G^T),$$

что означает, что этот случайный вектор распределен по нормальному закону (гауссовский) с параметрами среднего и матрицы ковариаций, указанными в скобках (показать!).

1.5 Применения к идентификации динамических систем

Поскольку идентификация параметров динамических систем происходит по дискретным данным, полученным с тактом дискретности Δ , то даже в случае линейной непрерывной системы, заданной тройкой матриц (A, B, C) , естественно перейти к соответствующему дискретному представлению:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= A^* x_i + B^* u_i, & x(t_0) &= x_0, \\ y_i &= C^* x_i, & i &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где для малых Δ справедливы представления (I - единичная матрица):

$$A^* \approx I + A \Delta, \quad B^* \approx B \Delta, \quad C^* \approx C, \quad (28)$$

([7], сс.510, 511, где надо воспользоваться простейшей асимптотикой для экспоненты).

Чтобы применить результаты теории оценивания из предыдущего подраздела, необходимо привести систему (27) к одному уравнению «вход-выход» относительно оператора z сдвига на шаг:

$$R(z) y_i = Q(z) u_i. \quad (29^*)$$

Это уравнение уже может быть представлено в форме регрессии (14), вариант 2 (тождественная регрессия), для данных размерности $\mu = n + m + 1$ (n, m – размерности полиномов (соответственно) $R(z), Q(z)$):

$$y_{i+n} = \gamma^T (\bar{u}_i) \vartheta = \bar{u}_i^T \vartheta, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^T &= (y_{i+n-1}, \dots, y_{i+1}, y_i; u_{i+m}, \dots, u_i), \quad \bar{u}_i \in R^\mu, \\ \vartheta^T &= (\rho_{n-1}, \dots, \rho_1, \rho_0; q_m, \dots, q_0), \quad \vartheta \in R^\mu. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее это может быть использовано в рамках методов наименьших квадратов или максимального правдоподобия.

1.6 Идентификация состояния: дискретный фильтр Калмана

Для того чтобы сформулировать задачу фильтрации (восстановления состояния), обратимся к системе (27), несколько видоизменив ее: во-первых, для упрощения не будем помечать звездочкой матрицы, хотя речь и будет идти о дискретных системах – других здесь не будет, во-вторых, добавим в систему в качестве возмущений дискретные «белые шумы» – последовательности независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + v_i, & x(t_0) &= x_0, \\ z_i &= Cx_i + r_i, & i &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

где «белые шумы» v_i, r_i считаем стационарными, то есть их ковариации

$$\text{cov}(v_i, v_i) = V \geq 0, \quad \text{cov}(r_i, r_i) = R > 0 \quad (32)$$

не зависят от времени, причем v_i и r_i не коррелируют: $\text{cov}(v_i, r_i) = 0$; матрицы A, C также не зависят от времени. Аналогичным образом вектор x_0 – гауссовский (см. замечание 2):

$$x_0 \propto N(\bar{x}_0, X_0). \quad (33)$$

Не имея точных данных о векторе состояния x_i в каждый текущий момент, мы хотим по всем имеющимся к моменту i измерениям $\{z_j, 0 \leq j \leq i\}$ определить

оценку $\hat{x}_i$, относительно которой надлежит сформулировать условия, гарантирующие ей целесообразные свойства. Понятно, что эти свойства нужно формулировать применительно к ошибке оценивания

$$e_i = \hat{x}_i - x_i \in R^n.$$

Понятно, что в среднем оценка должна совпадать с точным значением состояния, то есть оценка должна быть несмещённой. Кроме того, поскольку оценка является линейной функцией наблюдений, остается потребовать минимальности дисперсии, но e_i – это вектор, поэтому речь должна идти о всевозможных линейных комбинациях дисперсий ее компонент. Для дальнейшего обозначим:

$$P_i = \text{cov } e_i = \text{cov}(e_i, e_i).$$

Итак, **требования к оценке:**

1. несмещенность:

$$M e_i = M \hat{x}_i - M x_i = 0;$$

2. оптимальность: для любой $W = W^T > 0$

$$M \{ e_i^T W e_i \} \rightarrow \min_{\hat{x}_j, 0 \leq j \leq i}.$$

Требование оптимальности далее будет конкретизировано. Дело в том, что процедура минимизации в момент i происходит, когда уже совершена аналогичная для $i-1$, то есть уже имеется оценка $\hat{x}_{i-1}$. Кроме того, эту оценку $\hat{x}_{i-1}$ можно оптимальным образом экстраполировать на момент i без использования текущего измерения z_i – это сразу следует из первого уравнения (31). При этом получаем результат экстраполяции x_i^* ; остается только *оценку экстраполяции x_i^* с учетом z_i преобразовать в $\hat{x}_i$* ; это ключевой момент всей **рекуррентной процедуры** – он повторяется на каждом шаге, то есть при $i = 0, 1, \dots$. Как запускается эта рекурсия из (33), уточним чуть ниже, а здесь этот ключевой момент « x_i^* с учетом z_i преобразовать в $\hat{x}_i$ » представим с помощью матричных коэффициентов K_i^* и K_i (оценка линейная!):

$$\hat{x}_i = K_i^* x_i^* + K_i z_i. \quad (34)$$

Теперь оптимальность можно представить

$$M \{e_i^T W e_i\} \rightarrow \min_{K_i^*, K_i}, \quad i = 0, 1, \dots. \quad (35)$$

Достаточно показать, как из оценки $\hat{x}_i$ сформировать оценку $\hat{x}_{i+1}$. Представим соответствующий *алгоритм*.

1. Экстраполяция на шаг:

$$x_{i+1}^* = A \hat{x}_i.$$

2. Подставим в это уравнение $\hat{x}_i = e_i + x_i$ и из первого уравнения (31)

$Ax_i = x_{i+1} - v_i$, в результате получим (вместе со вторым уравнением) уравнение регрессии (20):

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= x_{i+1} - v_i + Ae_i, \\ z_{i+1} &= Cx_{i+1} + r_{i+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

где $\vec{y}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1}^* \\ z_{i+1} \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} I_n \\ C \end{pmatrix} - (n+m) \times n$ - матрица полного ранга (почему?),

$$\mathcal{G} = x_{i+1}, \quad \vec{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} Ae_i - v_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i+1}^* - x_{i+1} \\ r_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Обозначим $P_{i+1}^* = \text{cov}(x_{i+1}^* - x_{i+1})$. Из (37) следует, что

$$M\vec{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} AMe_i \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

а в соответствии с упражнением 13:

$$D_{i+1} = \text{cov} \vec{\varepsilon}_{i+1} = \begin{pmatrix} AP_i A^T + V & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В силу (37)

$$D_{i+1} = \begin{pmatrix} P_{i+1}^* & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (38^*)$$

3. Информационную матрицу M , входящую в (25), в данном случае удобно обозначить $M = M_i$ и для нее имеем в силу (38):

$$M_{i+1} = \Gamma^T D_{i+1}^{-1} \Gamma = (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (AP_i A^T + V)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ C \end{pmatrix},$$

или, выполняя действия:

$$M_{i+1} = (P_{i+1}^*)^{-1} + C^T R^{-1} C \quad (39)$$

и эта матрица не вырождена (доказать!), поэтому, в силу леммы 1:

$$M_{i+1} = (P_{i+1})^{-1}. \quad (40)$$

4. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Gamma^T D_{i+1}^{-1} &= (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (AP_i A^T + V)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = (I_n, C^T) \begin{pmatrix} (P_{i+1}^*)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= ((P_{i+1}^*)^{-1}, C^T R^{-1}), \end{aligned}$$

из (25) с учетом (36),(37), а также (40), которое представим как $(M_{i+1})^{-1} = P_{i+1}$, получим:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} = \hat{x}_{i+1} &= P_{i+1} \Gamma^T D_{i+1}^{-1} \bar{y}_{i+1} = P_{i+1} ((P_{i+1}^*)^{-1}, C^T R^{-1}) \begin{pmatrix} x_{i+1}^* \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \\ &= P_{i+1} ((P_{i+1}^*)^{-1} x_{i+1}^* + C^T R^{-1} z_{i+1}). \end{aligned} \quad (41)$$

Сравнивая это с (34), получаем, что

$$K_{i+1} = P_{i+1} C^T R^{-1}. \quad (42)$$

Здесь следует учитывать, что матрица ковариаций ошибки оценивания P_{i+1} (в отличие от P_{i+1}^*) на данном шаге алгоритма еще не определена.

5. Коэффициент K_i^* в (34) выражается через K_{i+1} . Действительно, умножая слева в (39) обе части равенства на P_{i+1} , учитывая при этом (40) и (42), получаем:

$$I_n = P_{i+1} (P_{i+1}^*)^{-1} + P_{i+1} C^T R^{-1} C = P_{i+1} (P_{i+1}^*)^{-1} + K_{i+1} C. \quad (43)$$

Поскольку из сравнения (41) и (34) следует, что

$$K_i^* = P_{i+1} (P_{i+1}^*)^{-1},$$

то из (43) имеем:

$$K_{i+1}^* = I_n - K_{i+1} C,$$

и тогда из (41) следует:

$$\hat{x}_{i+1} = (I_n - K_{i+1} C) x_{i+1}^* + K_{i+1} z_{i+1}. \quad (44)$$

Учитывая п.1 алгоритма, это рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно, синхронно с поступлением измерений, вычислять оптимальную оценку состояния, начиная с (см. (33)):

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0. \quad (45)$$

Теперь можно получить способ вычисления K_{i+1} , альтернативный (42).

6. Домножим в (43) справа на $P_{i+1}^* C^T$ и учтем (42):

$$P_{i+1}^* C^T = P_{i+1} C^T R^{-1} R + K_{i+1} C P_{i+1}^* C^T = K_{i+1} (R + C P_{i+1}^* C^T),$$

где в скобках стоит положительно определенная и, следовательно, невырожденная матрица, поэтому из этого уравнения следует:

$$K_{i+1} = P_{i+1}^* C^T (R + C P_{i+1}^* C^T)^{-1}. \quad (46)$$

7. Наконец, заметим еще раз, что в основе всех вычислений на шаге рекурсии лежит матрица ковариаций

$$P_{i+1}^* = \text{cov}(x_{i+1}^* - x_{i+1}),$$

которая определяется в начальной фазе каждого шага через матрицу ковариаций ошибки *предыдущего шага*:

$$P_{i+1}^* = A P_i A^T + V,$$

поэтому перед переходом к следующему шагу алгоритма, необходимо вычислить P_{i+1} для осуществимости этого следующего шага. Опять обращаясь к (43), домножим справа на P_{i+1}^* :

$$P_{i+1}^* = P_{i+1} + K_{i+1} C P_{i+1}^*,$$

откуда имеем:

$$P_{i+1} = (I_n - K_{i+1} C) P_{i+1}^* \quad (47)$$

с начальным условием (см. (33)):

$$P_0 = X_0. \quad (48)$$

Таким образом, получаем алгоритм *дискретного фильтра Калмана*, включающий рекуррентные уравнения для оценки (44),(46), (47) с начальными условиями (45),(48).

1.7 Непрерывный фильтр Калмана

Постановка задачи оптимальной фильтрации в случае непрерывной системы аналогична дискретному варианту. Несколько усложняется только понятие «белого шума», в результате чего место ковариационных матриц (32) занимают соответствующие матрицы интенсивностей. Более детальное изложение, затрагивающее обобщенные функции, можно найти в [7] (параграф 1.11). Пусть задана линейная стационарная система:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + v, \quad x(0) = x_0 \propto N(\bar{x}_0, X_0), \\ z &= Cx + r,\end{aligned}$$

где v, r - «белые шумы» с интенсивностями (соответственно) $V \geq 0, R > 0$. Вводя векторы оценки состояния $\hat{x} = \hat{x}(t)$ и ошибки оценивания e , абсолютно аналогично предыдущему пункту, можно сформулировать задачу оптимального восстановления состояния по текущим измерениям. Запишем результат ее решения в том виде, как он совершенно естественным образом следует из вышеизложенного. Для этого представим уравнение дискретного фильтра в несколько преобразованной форме: из (44) с учетом п.1 алгоритма имеем

$$\hat{x}_{i+1} = A^* \hat{x}_i + K_{i+1}(z_{i+1} - z_{i+1}^*),$$

а для матрицы коэффициентов фильтра

$$K_{i+1} = P_{i+1} C^T R^{-1}.$$

По этим уравнениям записываются уравнения фильтра:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(t)(z(t) - \hat{z}(t)), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}, \quad (49)$$

$$K = K(t) = P(t)C^T R^{-1}. \quad (50)$$

В непрерывном случае нет необходимости в промежуточной операции экстраполяции, но нужно еще представить уравнение для матрицы $P(t)$ ковариации ошибки оценивания e . Для $e = e(t)$, обозначая

$$\bar{A} = A - KC \quad (51)$$

имеем (показать):

$$\dot{e} = \bar{A}e + \xi, \quad \xi = Kr - v,$$

и тогда для матрицы ковариаций получим [7]:

$$\dot{P} = \bar{A}P + P\bar{A}^T + \Lambda, \quad P(0) = X_0.$$

Подставляя здесь (51) и учитывая, что для $\text{cov } \xi = \Lambda$

$$\Lambda = KRK^T + V,$$

имеем:

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + V, \quad P(0) = X_0. \quad (52)$$

Таким образом, получаем для непрерывного фильтра Калмана уравнения (49), (50), (52).

Непрерывный стационарный фильтр Калмана

В этом случае для задачи

$$\dot{x} = Ax + v, \quad x(0) = x_0 \propto N(\bar{x}_0, X_0),$$

$$z = Cx + r,$$

где v, r - «белые шумы» с интенсивностями (соответственно) $V \geq 0$, $R > 0$ введем дополнительно $n \times k$ - матрицу G такую что

$$V = GG^T \geq 0. \quad (53)$$

В непрерывном случае достаточные условия существования стационарного фильтра формулируются особенно ясно и компактно.

Установившееся положительно определенное решение $P(t) = \bar{P}$, такое что для любого t существует

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t) = \bar{P},$$

где $\bar{P}$ удовлетворяет алгебраическому матричному уравнению Риккати (АМУР)

$$0 = A\bar{P} + \bar{P}A^T - \bar{P}C^T R^{-1} C \bar{P} + V, \quad (54)$$

если

1. пара (A, G) – управляема,
2. пара (A, C) – наблюдаема.

Условия 1, 2, определяются полнотой ранга матриц управляемости:

$$M_G = (G, AG, \dots, A^{n-1}G)$$

и наблюдаемости:

$$M_C = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 14. Проверить невырожденность тройки (A, G, C) , т.е. выполнение условий 1, 2, для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0, \quad C = (1 \quad 0).$$

Тем самым установить корректность стационарного фильтра Калмана

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Kz(t), \quad \hat{x}(0) = \bar{x},$$

где

$$K = \bar{P}C^T R^{-1},$$

а матрица $\bar{P}$ удовлетворяет АМУР (54)

$$0 = A\bar{P} + \bar{P}A^T - \bar{P}C^T R^{-1} C \bar{P} + V.$$

Упражнение 15. В условиях упражнения 14:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0, \quad C = (1 \quad 0),$$

для системы

$$\dot{x} = Ax + v,$$

$$z = Cx + r,$$

где $v = G\xi$, ξ – «белый шум» с интенсивностью 1 и средним 0, а r – «белый шум» с нулевым средним и интенсивностью $R = \rho^2 > 0$. Получить передаточную функцию стационарный фильтр Калмана.

Указание. Представить решение уравнения (54) в указанных условиях в форме

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix} > 0.$$

После подстановки в (54) и приравнявая элементы матриц в левой и правой частях АМУР свести матричное уравнение к системе трех обычных уравнений для элементов $\bar{P}$.

Упражнение 16. Показать, что полученный в предыдущем упражнении фильтр Калмана является также фильтром Баттерворта 2-го порядка (ФБ-2), то есть имеет в качестве характеристического полином Баттерворта $B_2(s)$. Показать также, что обобщенная частотная

характеристика ФБ-2 равна $\frac{1}{B_2(j\omega/\omega_0)}$, где характеристическая частота ω_0 вычисляется

как $\omega_0 = \sqrt{\sigma/\rho}$.

П1. ПРИЛОЖЕНИЕ к гл. 1

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ № 1-4 (П1.1-П1.4)

П1.1 Статистическая обработка одномерной выборки

Цель работы: 1) приобретение практических навыков по статистической обработке результатов наблюдений одномерной случайной величины (СВ); 2) изучение возможностей системы MATLAB по статистической обработке результатов наблюдений одномерной СВ.

Порядок выполнения работы [1]:

1. Переписать данные своего варианта N (см. приведенные в таблице 4 варианты заданий к лабораторной работе №1, выборка объемом 50) и выполнить следующие задания:

- построить вариационный и статистический ряды, найти размах выборки;
- построить таблицу частот группированной выборки, сделав семь интервалов одинаковой длины;
- провести статистическую обработку результатов наблюдений, включающую построение (для интервально группированной выборки) полигона и гистограммы частот, эмпирической функции распределения;
- найти оценки математического ожидания, дисперсии (смещенную и несмещенную), медианы и моды для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок.

2. Провести первичную статистическую обработку одномерной выборки при помощи пакета МАТЛАБ, для чего необходимо:

- ввести в созданном m-файле данные своего варианта в виде вектор-строки (или вектор-столбца);
- дополнить m-файл операторами построения вариационного и статистического рядов (см. sort [1]);
- дополнить m-файл операторами построения гистограмм и полигонов частот для интервально группированной выборки (см. bar, hist, plot), совместить в одном графическом окне графики соответствующих полигонов и гистограмм (см. axis, hold [1]);
- дополнить m-файл операторами построения графиков эмпирической функции распределения для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок (см. stairs);
- дополнить m-файл операторами вывода на экран числовых характеристик для исходной (негруппированной) и интервально группированной выборок: размах, мода, медиана, выборочное среднее, дисперсия (см. min, max, mode, median, mean, std, var [1]);

– запустить m-файл, убедиться в совпадении результатов, полученных вручную и на компьютере, отчитаться перед преподавателем за проделанную работу.

Таблица 4

Варианты заданий к лабораторной работе №1										
№ п/п	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
1	5	3	7	12	4	7	6	2	10	9
2	2	8	6	10	9	9	7	7	2	5
3	7	14	5	9	6	9	0	10	2	7
4	5	4	7	14	7	13	13	7	2	4
5	6	1	3	1	10	6	6	7	3	2
6	2	4	6	7	6	4	5	8	1	7
7	2	7	3	4	8	7	8	4	1	4
8	6	7	8	1	3	11	12	7	4	7
9	5	11	5	7	8	12	2	8	6	13
10	4	10	5	14	7	13	11	6	2	4
11	3	6	4	7	1	9	12	6	5	6
12	6	8	3	5	3	9	10	11	2	8
13	3	6	5	3	10	8	9	7	3	4
14	2	8	5	13	10	12	8	6	6	7
15	2	6	5	5	6	12	16	5	3	7
16	4	1	5	6	8	13	11	12	4	8
17	2	8	5	4	8	13	13	8	4	1
18	4	10	6	1	9	8	8	10	1	3
19	6	14	5	3	6	5	11	2	3	3
20	5	9	5	13	8	10	10	12	2	2
21	1	6	3	5	7	13	8	7	6	7
22	7	13	8	3	7	5	9	11	3	10
23	4	1	1	2	8	5	5	5	6	9
24	5	0	5	13	7	8	11	12	4	9
25	3	13	8	9	10	5	5	7	7	7
26	3	2	6	13	7	12	10	2	5	5
27	3	5	8	11	5	9	6	4	3	5
28	2	14	5	7	9	2	6	7	4	6
29	4	3	7	11	8	7	7	13	5	7
30	6	12	6	5	4	8	3	12	3	11
31	1	1	6	11	8	3	12	4	7	6
32	2	12	9	6	11	5	9	11	1	3
33	3	6	4	4	4	4	9	5	2	8
34	3	11	3	13	10	5	7	6	1	10
35	3	7	4	4	9	11	13	5	6	7
36	5	3	2	2	12	4	8	8	4	0
37	1	4	9	2	12	6	5	6	6	-1
38	4	11	7	8	4	11	7	5	2	6
39	4	8	5	7	4	4	12	6	2	5
40	4	3	7	4	5	9	5	11	5	5
41	11	12	6	6	6	8	6	5	2	4
42	8	4	4	13	7	6	5	6	4	-1
43	7	5	4	8	5	7	10	6	2	6
44	3	9	6	10	4	12	4	10	6	5
45	0	9	6	10	7	10	10	4	3	4
46	6	10	5	7	6	6	6	4	8	2
47	1	10	6	10	6	13	5	6	2	6
48	5	8	8	14	4	5	6	3	6	6
49	4	8	7	3	8	6	13	8	1	7
50	3	0	8	7	5	5	7	5	6	6

В отчете по лабораторной работе необходимо представить:

1. все требуемые таблицы, графики (гистограмму, полигон и эмпирическую функцию распределения);
2. результаты расчетов числовых характеристик выборки.

Контрольные вопросы

1. Что такое вариационный ряд; статистический ряд; гистограмма; полигон?
2. Как вычисляются среднее, дисперсия, мода, медиана?
3. Как определяются функция и плотность распределения, эмпирическая функция распределения?

П1.2 Идентификация статических объектов на основе полиномиальной регрессии

Цель работы: исследование методов и компьютерных средств аппроксимации данных с помощью полиномиальной регрессии.

Краткая характеристика методов. Исходные данные – пара n -векторов –

вход (регрессор): $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, выход: $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.

Уравнение полиномиальной регрессии (п.1.3):

$$y_t = \gamma^T(x_t) \theta + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\gamma(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{m-1})^T$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})^T$ – m -векторы, содержащие (соответственно) степени входа и параметры (коэффициенты полинома). Обозначим:

$$\Gamma = \Gamma(\vec{x}) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_n))^T \in R^{n \times m}.$$

Критерий аппроксимации:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [y_t - \gamma^T(x_t) \theta]^2. \quad (2)$$

Оценка метода наименьших квадратов (МНК), минимизирующая (2) по компонентам вектора параметров в случае невырожденности информационной матрицы

$$M = \Gamma^T(\vec{x}) \Gamma(\vec{x}) \in R^{m \times m},$$

имеет вид (19):

$$\theta_{\text{МНК}} = M^{-1} \Gamma^T(\vec{x}) \vec{y}. \quad (3)$$

В случае гауссовских независимых ошибок ε_t в (1) с нулевым средним критерий и оценка, обобщающие (2),(3), получаются в рамках метода максимального правдоподобия (ММП) (п.1.3).

План работы.

1. Исходные данные, полученные в результате пяти измерений ($n=5$) взять из таблиц 5 ($\vec{x}^T$) и 6 ($\vec{y}^T$) в соответствии с вариантом (номер строки).
2. Убедиться в невырожденности данных применительно к квадратической регрессии ($m=3$).

3. Вычислить оценку наименьших квадратов и построить аппроксимирующий полином для квадратической регрессии [2].
4. Определить коэффициенты оптимальной квадратичной интерполяции (п. 1.3, с.10).
5. По данным из файла data_mi3 и с помощью функций polyfit, polyval [11] вычислить МНК-оценки для $n=10, 15$.
6. На основании проведенных расчетов (пп. 3, 5) построить графики $\theta_{\text{МНК}}(n)$.
7. Сделать выводы по работе.

Таблица 5. Входные данные

	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4
2	1	2	3	4	5
3	2	3	4	5	6
4	3	4	5	6	7
5	0	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5
7	2	3	4	5	6
8	3	4	5	6	7
9	0	1	2	3	4
10	1	2	3	4	5

Таблица 6. Выходные данные

	1	2	3	4	5
1	-7.4623	1.8339	1.7412	4.8622	0.3188
2	-7.3077	-10.4336	-9.6574	-2.4216	4.7694
3	-19.3499	-14.9651	-11.2746	-0.0631	18.7147
4	-4.2050	-0.1241	9.4897	21.4090	37.4172
5	-5.3285	-3.2075	-5.2828	-16.3698	-37.5111
6	-8.9653	-18.2731	-26.3034	-30.7061	-34.7873
7	-0.1116	7.8529	25.9311	52.1905	84.0557
8	8.4384	16.3252	28.2451	47.3703	65.2885
9	2.8978	2.7586	9.3192	21.3129	38.1351
10	0.9699	-1.1649	-6.3723	-15.9067	-29.8907

Контрольные вопросы

1. Показать оптимальность (3) в смысле критерия (2).
2. Сформулировать задачу полиномиальной регрессии (ПР).
3. Указать отличие оценок МНК и ММП.
4. Указать отличие оценок МНК $\theta_{\text{МНК}}$ и интерполяционных $\theta_{\text{инт}}$.

5. Какое значение принимает критерий (2) при $\theta = \theta_{\text{инт}}$?
6. Сформулируйте условие невырожденности экспериментальных данных для ПР.
7. В чем состоят условия существования и единственности решения задачи оптимизации (2)?

П1.3 Идентификация динамических систем апериодического типа методом наименьших квадратов

Цель работы: оценить параметры апериодического звена 2 порядка по измерениям выхода $Y(t) = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$, который предварительно сформировать как реакцию звена на гармонический сигнал (см. п.1.4). Параметры T_1, T_2 звена и частота ω сигнала $u(t) = \cos(\omega t)$ определяются вариантом, $k = 10$.

Считаем моменты $N = 15$ измерений $t_1 = t_0 + \Delta t, \dots, t_N$ равномерно расположенными на промежутке $0 = t_0 \leq t \leq t_N$ с постоянным шагом Δt и имеем соответствующий набор измерений Y_N как сужение $Y(t_N)$ на указанные $t_1, \dots, t_N$. Варианты заданы в таблице 7.

Для всех вариантов расчеты провести для двух значений: $\Delta = 0.1$ и $\Delta = 0.25$.

Таблица 7

Номер варианта	T_1	T_2	ω
1	5.0	1.0	0.25
2	3.0	1.0	0.25
3	5.0	1.0	0.5
4	3.0	1.0	0.5
5	5.0	1.0	1.0
6	5.0	1.5	0.25
7	3.0	1.5	0.25
8	5.0	1.5	0.5
9	3.0	1.5	0.5
10	5.0	1.5	1.0

Указание

Для идентификации параметров воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК, см. п.1.3), для чего исходное представление непрерывной системы в форме передаточной функции

$$y(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} u(s) \quad (1)$$

преобразовать к дискретной форме «вход-выход» (тождественная регрессия, п.1.3)

$$y_{k+2} = \rho_1 y_{k+1} + \rho_0 y_k + q_0 u_k = \bar{u}_k^T \theta, \quad (2)$$

где обозначено:

$$\theta = (\rho_1, \rho_0, q_0)^T, \quad \bar{u}_k = (y_{k+1}, y_k, u_k)^T, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда для

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \\ \bar{u}_2^T \\ \vdots \\ \bar{u}_v^T \end{pmatrix}$$

при условии невырожденности данных:

$$\det \Gamma^T \Gamma \neq 0, \quad (3)$$

имеем оценку МНК искоемых параметров:

$$\theta_{МНК} = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \bar{y}. \quad (4)$$

Здесь $\bar{y}$ представляет собой $\mathbf{v}$ -вектор выходных данных:

$$\bar{y} = (y_{1+2}, y_{2+2}, \dots, y_{v+2})^T,$$

для формирования которого использовать МАТЛАБ-функцию *LSIM*.

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Преобразования исходного описания системы в требуемые непрерывные и дискретное (2) представления.
2. Формирование матрицы Γ и проверку условия (3).
3. Графики процессов, полученные с помощью МАТЛАБа.

4. Расчёты параметров объекта управления по формуле (4).
5. Анализ полученных результатов: пересчет оценки (4) в параметры модели (1) и сравнение с исходными данными, анализ точности.
6. Проанализировать результаты в зависимости от дискретности.
7. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Эквивалентные формы представления звена 2-го порядка.
2. Что такое матрица Грама?
3. В чем состоит метод наименьших квадратов?

П1.4 Идентификация параметров и оценка колебательных движений модели судна на основе экспериментальных исследований в опытовом бассейне

1. Описание эксперимента

Рассматривается алгоритм оценки бортовой качки [18,10] в рамках бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС).

Для проведения эксперимента использовался опытовый бассейн СевГУ, оборудованный волнопродуктором. На модель судна 2х0.4х0.5 м устанавливались датчики и самописец. В качестве датчиков использовались поверхностный интегральный трёхосный акселерометр ADXL330 фирмы Analog Devices и двухосный гироскоп IDG-300 фирмы InvenSense, дающий на выходе угловую скорость. Аналоговый выход датчиков оцифровывался с частотой 100 Гц и сохранялся при помощи регистратора данных Logomatic v2 Serial SD Datalogger. Измерения совершались на тихой воде, хотя некоторое волнение малой интенсивности присутствовало. Модель отклонялась на заданный угол крена и отпускалась: последующие затухающие колебания фиксировались датчиками.

2. Идентификация модели колебательного движения

В связи с представленным экспериментом рассматривается следующая линейная система:

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $x_1 = \Theta$ – крен, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\Theta} = \omega_x$ – угловая скорость. Параметры ξ (относительное затухание) и ω_0 (собственная частота) определяются по кривой переходного процесса.

В нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 + v \end{aligned} \quad (1c)$$

Здесь V – малый шум, возникающий из-за ветро-волновых возмущений, который будем считать белым центрированным с малой интенсивностью Q . В задаче идентификации будем считать $Q=0$, а в качестве возмущения будем рассматривать начальное условие по крену.

Представленные результаты опыта позволяют вычислить затухание и собственную частоту колебания модели посредством измерения условного периода и логарифмического декремента затухания [9]).

Нас будет интересовать передаточная функция от начального условия x_0 до выходной координаты $Cx = x_2 = \omega_x$ для системы (1) (или в скалярной форме (1c)) при $v=0$ может быть представлена (уметь это сделать, определить k_0) в виде

$$W(s) = W_{x_2 x_0}(s) = \frac{k_0 \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

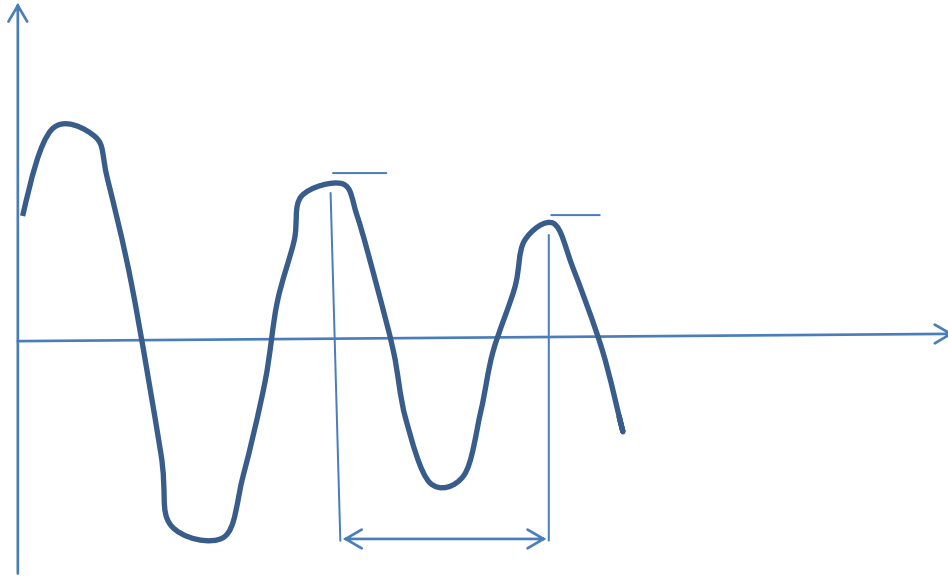


Рисунок 1 – Данные для идентификации колебательного звена

Поскольку реакция колебательного звена на начальное условие указанного типа имеет вид (см. рис.1):

$$x_2(t) = Ve^{-ht} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где частота и коэффициент затухания $h = \xi \omega_0$ являются действительной и мнимой частями комплексно сопряженной пары корней характеристического уравнения системы (1): $s_{1,2} = -h \pm j\omega$, $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$ (уметь показать это!).

Указанные параметры могут быть определены посредством измерения следующих данных (рис.1):

условный период:
$$T_y = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega},$$

логарифмический декремент затухания (ЛДЗ):

$$D = \ln \frac{Y_1}{Y_2}, \quad \text{где } Y_i = x_2(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Из (2) имеем:

$$Y_2 = x_2(t_1 + T_y) = Ve^{-ht_2} \sin[\omega(t_1 + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi] = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi),$$

следовательно,

$$Y_2 = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi),$$

поэтому для ЛДЗ имеем:

$$\frac{Y_1}{Y_2} = Ve^{-ht_2} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi) / Ve^{-ht_1} \sin(\omega t_1 + \varphi + 2\pi) = e^{-ht_1} / e^{-h(t_1+T_y)},$$

$$D = hT_y. \quad (3)$$

3. Постановка задачи фильтрации и варианты задания

Представленная в п.2 однородная колебательная система (осциллятор) с передаточной функцией $W(s) = W_{x_2x_0}(s)$ теперь рассматривается как слабо возмущенная (неоднородная) система (1) (или (1с)). Эксперименту с этой системой (п.1) соответствуют измерения:

$$y(t) = Cx + w, \quad (4)$$

где

$$C = (0 \quad 1),$$

w – ошибка измерений – также белый центрированный шум, интенсивность которого $R > 0$.

Задача оптимальной непрерывной фильтрации (п. 1.6, с.19) состоит в том, чтобы в каждый момент времени t из промежутка $t_0 \leq t \leq t_1$ сформировать наилучшую в смысле $e(t) = E\{(\hat{x}(t) - x(t))^T (\hat{x}(t) - x(t))\}$ оценку $\hat{x}(t)$ вектора $x = x(t)$ по имеющимся к этому моменту измерениям $Y(t) = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$. В дискретном случае будем считать моменты $N+1$ измерений $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_1$ равномерно расположенными на промежутке $t_0 \leq t \leq t_1$ с шагом $\Delta t = (t_1 - t_0)/N$ и имеем соответствующий набор измерений Y_N как сужение $Y(t_1)$ на указанные $t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_1$. При указанной выше частоте оцифровки данных эксперимента $\Delta t = 0.01$ с. Варианты задания в виде имени файла Y_N приведены в таблице 8. Эти имена указывают на структуры файла **data2.mat**, которые и содержат соответствующие данные измерений.

Таблица 8

Номер варианта	Число измерений N	Имя файла Y_N
1	16000	TestDown30_1
2	16000	TestDown30_2
3	16000	TestDown45_1
4	16000	TestDown45_2
5	15000	TestDown45_3
6	16000	TestUp45_1
7	20000	TestUp50_1
8	16000	TestDown30_1
9	14000	TestDown30_2
10	14000	TestDown45_1

4. Математическое моделирование фильтра

Результаты моделирования фильтра представляются в виде оценок угловой скорости (рад/с) и угла (рад) крена модели судна (кривые различаются цветом); одновременно на рисунках представляется входная информация фильтра, т.е. измеренная демпфирующим гироскопом угловая скорость крена (рад/с). Для фильтрации измерений использовать стационарный фильтр (функция KALMAN [12]) с интенсивностями шумов в динамике и в измерениях соответственно $Q = 1$ и $R = 0.1$.

Из рисунков должно следовать, что оценки достаточно быстро сходятся и могут быть использованы в алгоритме прогноза.

5. Порядок расчёта параметров модели (идентификации) и моделирования фильтра Калмана для оценок состояния

1. Определить собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания модели ξ по осциллограмме колебательного процесса и руководствуясь методом ЛДЗ (п.2), для чего на начальном (затухающем) участке осциллограммы выбрать фрагмент в соответствии с рис. 1.

2. Сформировать систему (1),(4), сформулировать задачу оптимальной фильтрации (пп. 1.5,1.6), проверить для нее выполнение условий управляемости и наблюдаемости для тройки (A, b, C) , то есть существование стационарного фильтра Калмана [7].
3. Построить фильтр Калмана с помощью Matlab-функции KALMAN [12].
4. Провести моделирование фильтра (подключить файл измеренных данных к фильтру) с помощью Matlab-функции LSIM [12] и получить оценки угла (рад) и скорости крена (рад/с) на затухающем участке осциллограммы, а также на промежутке стационарных колебаний.
5. Исследовать зависимость оценки от интенсивности шумов в динамике и измерениях на указанных промежутках.

2 ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

При введении понятия больших уклонений и сопутствующих фактов будем следовать работе [20]. Начнем с задачи оценки распределения и той роли, которую в этой проблеме играет способ представления данных и принцип локализации.

2.1 Принцип локализации, метод Лапласа и аппроксимация распределений

Вспоминая пп. 1-3 из раздела 1 настоящего пособия, рассмотрим эмпирическое среднее для независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин (СВ) ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, но обозначение S_n зарезервируем теперь за относительным значением суммы:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Сначала будем предполагать ξ_i имеющими плотность $p(\xi_i)$, так что для совместной плотности ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n p(\xi_i). \quad (1)$$

Прежде всего, будем иметь в виду следующие два варианта плотности

- гауссова $N(\mu, \sigma^2)$ ($\mu = M\xi_i$ - среднее, σ^2 - дисперсия):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x \in R;$$

- экспоненциальная ($\mu = M\xi_i > 0$) :

$$p(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \quad x \in [0, \infty).$$

Для представления совместной плотности и оценки вероятностей обратимся к **принципу локализации**, который эффективно используется в рамках

метода Лапласа для приближенного вычисления интегралов (в том числе, не-собственных), зависящих от параметра ([6], гл. XIX, сс.602-607). Упрощая, можно сказать, что целью метода является построение асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{-\lambda I(x)} dx,$$

где f, I — гладкие на $[a, b]$ вещественные функции вещественного аргумента, а $\lambda > 0$ — малый параметр; функции f, I могут быть заданы также на подмножествах $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $I > 0$ имеет единственный минимум в точке $x_0 \in [a, b]$; тогда экспонента в интеграле будет иметь максимум в точке x_0 , окрестность которой при больших λ даст основной вклад в $F(\lambda)$, и этот вклад будет стремиться к $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. В этом принцип локализации (ПЛ): вклад экспоненциального множителя в интеграл определяется импульсом в окрестности x_0 сколь угодно малой длительности при $\lambda \rightarrow \infty$. Это похоже на эффект δ -функции, которую мы также будем использовать в дальнейшем, а здесь отметим еще одно следствие ПЛ: в малой окрестности носителя можно воспользоваться для $I(x)$ разложением по Тейлору, ограничиваясь, например, линейными приращениями.

Пример 1 ([6], с.603). Пусть $f(x) = 1$, а $I(x)$ на $[a, b]$ монотонно возрастает, что влечет равенство $x_0 = a$. Учитывая сколь угодно малость носителя импульса, функцию $I(x)$ представим в отклонениях $t = x - a$ от точки $x_0 = a$ (полагая $\frac{d}{dx} I(x)|_{x=a} = I'(a)$):

$$I(x) = I(a) + I'(a)t + o(1).$$

Получим для фиксированного $\varepsilon > 0$

$$F(\lambda) \cong \int_a^{a+\varepsilon} e^{-\lambda I(x)} dx = e^{-\lambda I(a)} \int_0^{\varepsilon} e^{-\lambda I'(a)t} dt = \frac{e^{-\lambda I(a)}}{\lambda I'(a)} \int_{-\varepsilon \lambda I'(a)}^0 e^s ds = \frac{e^{-\lambda I(a)}}{\lambda I'(a)} (1 - e^{-\varepsilon \lambda I'(a)}),$$

откуда имеем при $\lambda \rightarrow \infty$

$$F(\lambda) \cong \frac{e^{-\lambda I(a)}}{\lambda I'(a)},$$

где $\cong$ означает асимптотическую эквивалентность ([10], с.587) (в данном случае, с точностью до $1/\lambda$).

В частности, для НОР стандартно гауссовских (т.е. с нулевым средним и единичной дисперсией) СВ ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и эмпирического среднего имеем для любого $M > 0$ и при $n \rightarrow \infty$ [1]:

$$P_n(M) = P(|S_n| \geq M) \rightarrow 0,$$

а для произвольного отрезка $A = [a, b] \subset R$

$$P(\sqrt{n} S_n \in A) \rightarrow \Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx,$$

поэтому

$$P_n(M) = 1 - \Phi_n(M),$$

где

$$\Phi_n(M) = \Phi([-M\sqrt{n}, M\sqrt{n}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M\sqrt{n}}^{M\sqrt{n}} e^{-z^2/2} dz.$$

В результате

$$P_n(M) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{M\sqrt{n}}^{\infty} e^{-z^2/2} dz,$$

или, после замены $z = x\sqrt{n}$:

$$P_n(M) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_M^{\infty} e^{-n x^2/2} dx.$$

Следовательно, в обозначениях примера 1, имеем здесь

$$F(\lambda) = \int_M^{\infty} e^{-n x^2/2} dx = \int_M^{\infty} e^{-n I(x)} dx,$$

где

$$I(x) = x^2/2, \quad I(a+t) = I(a) + I'(a)t + o(1), \quad a = M.$$

Учитывая, что теперь $\lambda = n \rightarrow \infty$, получаем

$$F(\lambda) \cong \frac{e^{-\lambda I(a)}}{\lambda I'(a)} = \frac{1}{nM} e^{-nM^2/2}$$

и для искомой вероятности:

$$P_n(M) \cong \frac{\sqrt{2}}{M\sqrt{n\pi}} e^{-nM^2/2}. \quad (2)$$

Учитывая отмеченную аналогию ПЛ с δ -функцией, представим теперь плотность S_n , используя для нее обозначение $p_{S_n}(X)$ и соотнося с помощью δ -функции $\delta(x)$ все реализации $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ случайной выборки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, соответствующие произвольному $S_n = s$, с ординатой совместной плотности (2):

$$p_{S_n}(s) = \int_{\{X \in R^n: S_n(X)=s\}} p(X) dX = \int_R d x_1 \cdots \int_R d x_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - ns\right) p(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

С точностью до субэкспоненциальных членов (символ $\approx$ означает равенство натуральных логарифмов при $n \rightarrow \infty$, т.е. логарифмическую эквивалентность) в гауссовом и экспоненциальном случаях распределений получим при $n \rightarrow \infty$:

$$p_{S_n}(s) \approx e^{-nI(s)}, \quad (4)$$

где, например, в случае гауссовой плотности имеем (учитывая (1)):

$$I(s) = \frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad s \in R,$$

а (2) можно представить как

$$P_n(M) \approx e^{-nM^2/2}$$

или, эквивалентно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(M) = -M^2/2.$$

Представление (4) показывает, что $I(s)$ определяет скорость затухания плотности и $p_{S_n}(s)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для всех $S_n = s$, для которых $I(s)$ положительна; и эта скорость тем больше по абсолютной величине, чем дальше s от среднего, причем $I(s) = 0$ только и в точности для $s = \mu = M\xi_i$. Все это следует из сопоставления (3) и (4), например, в указанном гауссовом случае. Статистику $I(s)$ принято называть функцией

(функционалом) действия (ФД) и ее можно также представить как предельную для

$$I_n(s) = -\frac{1}{n} \ln p_{S_n}(s), n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Существенная роль $I(s)$ проявляется уже в том, что с помощью функции действия можно описать основные предельные результаты теории вероятностей (а также и функционала действия для теории случайных процессов):

- закон больших чисел (ЗБЧ) для $I(s) = 0$;
- центральная предельная теорема (ЦПТ): справедлива для $\{s: I(s) \geq 0\}$, но не гарантирует малости относительной ошибки, поэтому полезна только в достаточно малой окрестности $\mu = M\xi_i$, для так называемых типовых значений [16];
- теоремы о больших отклонениях (ТБУ): в принципе, гарантируют малую относительную ошибку аппроксимации.

Хорошо известно, что ЗБЧ и ЦПТ не требуют введения ФД, роль последнего проявляется именно в ТБУ, диапазон действия которых значительно шире и где ФД позволяет из множества редких событий выделить наиболее вероятные, связанные с минимальными затуханиями плотности. Далее будет показано, что для оценки вероятности редкого события можно с помощью ФД сместить исходное распределение так, чтобы для вновь полученной случайной величины рассматриваемое событие было типовым (в зоне ЦПТ). Можно сказать, что такое преобразование смещения регуляризует исходную плохо обусловленную задачу, связанную с редким событием.

В качестве альтернативы абсолютно непрерывному случаю рассмотрим сумму (1) бернуллиевских величин [16] с вероятностями: $P(\xi_i = 1) = \alpha$, $P(\xi_i = 0) = 1 - \alpha$. Значения $S_n = s$ для каждого n теперь образуют конечное множество $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ и для вероятностей $P\{S_n = s\} = P_{S_n}(s)$ имеем [16]:

$$P_{S_n}(s) = \frac{n!}{(sn)! [(1-s)n]!} \alpha^{sn} (1-\alpha)^{(1-s)n}.$$

Используя формулу Стирлинга для факториала [16] (а также, как в [4] (с. 464, формулы (12), (13))), получаем для $n \rightarrow \infty$:

$$P_{S_n}(s) \approx e^{-nI(s)},$$

где ФД совпадает с энтропией Кульбака - Лейблера - Санова:

$$I(s) = s \ln \frac{s}{\alpha} + (1-s) \ln \frac{1-s}{1-\alpha}, \quad s \in [0, 1].$$

В верхней части рисунка 2 приведены вероятности $P_{S_n}(s)$ распределения Бернулли с параметром $\alpha = 0.4$ для четырех значений n (в левой части рисунка) и соответствующий этим вероятностям дискретный аналог (5)

$$I_n(s) = -\frac{1}{n} \ln P_{S_n}(s) \quad (6)$$

(в правой части) с ФД, изображенным пунктиром.

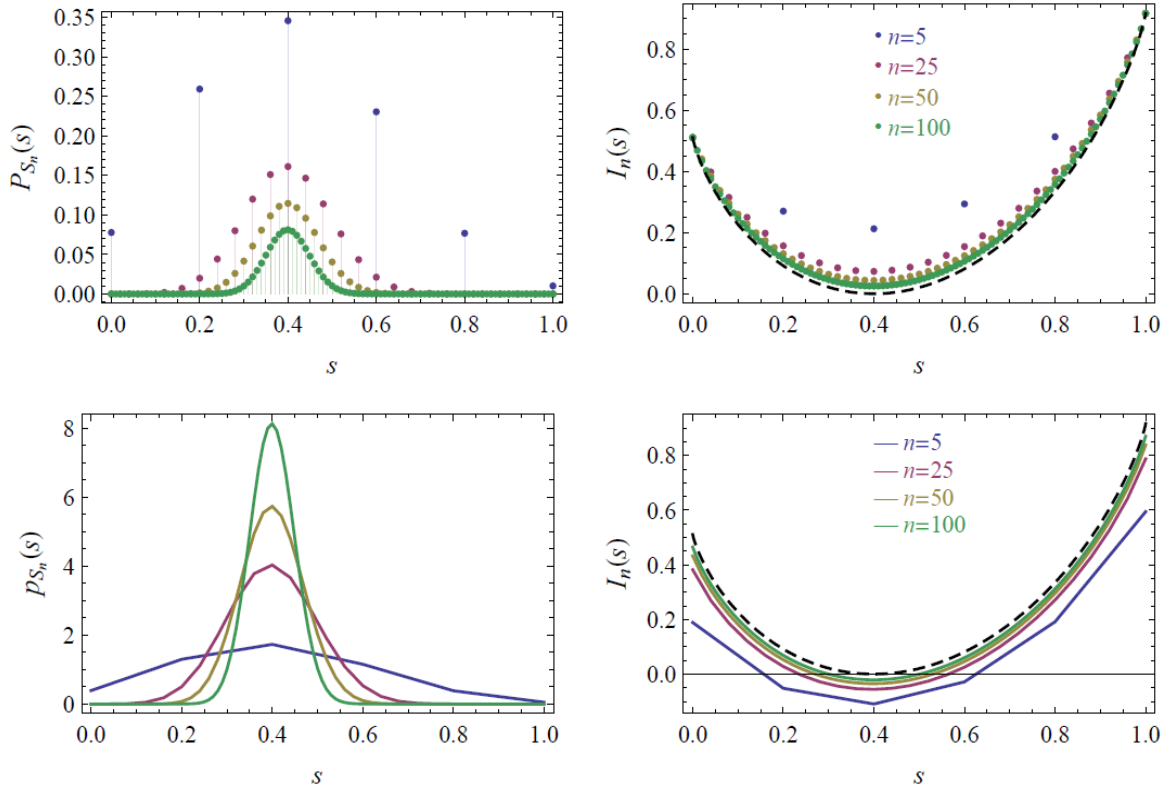


Рисунок 2 [20]: Дискретное распределение вероятностей $P_{S_n}(s)$ выборочного среднего Бернулли для $\alpha = 0.4$ и различных значений n (вверху слева); аналог функции (5), ФД - пунктирная линия (вверху справа). Крупнозернистая pdf $p_{S_n}(s)$ для выборочного среднего Бернулли.

(Нижняя левая). $I_n(s) = -\frac{1}{n} \ln P_{S_n}(s)$, полученная из крупнозернистой pdf. (Внизу справа)

2.2 Принцип больших уклонений

В предыдущем пункте факт аппроксимации для всех рассмотренных распределений – как непрерывных, так и дискретного – формулируется с помощью ФД в виде представлений (4) - (6). Эта общая экспоненциальная асимптотическая форма и называется **принципом** больших уклонений. Причина, по которой целая теория может быть построена на таком, казалось бы, простом результате, состоит в том, что она возникает в контексте многих случайных процессов, а не только среди выборок НОР-элементов, как мы увидим далее. Сильно упрощая, будем говорить здесь, что случайная величина S_n или ее плотность $p_{S_n}(x)$ удовлетворяет принципу большого уклонения (ПБУ), если существует следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \ln p_{S_n}(s) = I(s). \quad (7)$$

Определяемая при этом функция $I(s)$ называется **функцией действия** (скорости, т.к. соответствует режиму наименьшей, экспоненциальной, скорости убывания вероятности до нуля вне окрестности среднего $\mu = M\xi_1$), сокращенно ФД. Связь между этим определением и обозначениями аппроксимации, использованными ранее, очевидна: тот факт, что в поведении $p_{S_n}(x)$ доминирует при больших n экспоненциальное убывание, означает, что точная плотность для S_n может быть записана как

$$p_{S_n}(s) = e^{-nI(s) + o(n)}$$

где $o(n)$ обозначает корректирующий член, который является сублинейным по n (более высокого порядка, чем n). Если взять предел больших уклонений (7), то получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \ln p_{S_n}(s) = I(s) - \lim_{n \rightarrow \infty} [o(n)/n] = I(s),$$

так как $o(n)/n \rightarrow 0$. Таким образом, мы видим, что предел больших уклонений (7) обеспечивает сохранение доминирующего экспоненциального члена в $p(S_n)$

при отбрасывании любых других субэкспоненциальных членов. По этой причине говорят, что теория больших уклонений связана с оценками вероятностей в логарифмическом масштабе. Эта сходимость к $I(s)$ при $n \rightarrow \infty$ и отражена на рис. 2.

Мы не случайно начали с плотностей, хотя понятно, что плотности существуют далеко не всегда: пример распределения Бернулли – хорошая иллюстрация такой ситуации. Однако мы также заметили, что значения, которые может принять S_n , становятся плотными в интервале $[0,1]$ при $n \rightarrow \infty$, что означает, что носитель дискретного распределения вероятностей $p(S_n)$ становится плотным в этом пределе, как показано на рис. 1. С практической точки зрения, поэтому имеет смысл рассматривать S_n как непрерывные случайные величины для больших n путем интерполяции $p(S_n)$ к непрерывной функции $p(S_n)$, представляющей «плотность вероятности» S_n . Эта оценка pdf получается, в общем, путем рассмотрения вероятности $P(S_n \in [s, s + \Delta s])$, что S_n принимает значение в крошечном интервале, окружающем значение s , и затем делением этой вероятности на «размер» Δs этого интервала:

$$P_{S_n}(s) = \frac{P(S_n \in [s, s + \Delta s])}{\Delta s}.$$

Полученная таким образом оценка pdf называется сглаженной, крупнозернистой или **слабой плотностью**. (Чтобы быть более точным, мы должны заметить, что крупнозернистая pdf зависит от расстояния Δs , написав, скажем, $p_{S_n, \Delta s}(s)$. Тем не менее, не усложняя обозначений, мы будем использовать одну и ту же строчную букву p для обозначения крупнозернистой pdf и «истинной» непрерывного pdf. Контекст должен прояснить, что из них используется).

В случае среднего значения выборки Бернулли это просто определяется как

$$p_{S_n}(s) = n p_{S_1}(s)$$

если интервал Δs между значениями S_n выбран равным $1/n$. Этот процесс замены дискретной случайной переменной непрерывной в некотором пределе или в

некотором масштабе известен в физике как непрерывный или континуальный предел или как макроскопический предел. В математике этот предел выражается через понятие слабой сходимости (см. [14,15, 17]).

2.3 Теорема Гертнера - Эллиса

ПБУ может быть установлен не только такими прямыми операциями со случайным элементом, как показано выше, но и по некоторым вспомогательным функциям. Один из примеров в этом направлении – масштабированная кумулянта (МК), которая применительно к s_n определяется следующим образом

$$\lambda(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln E(e^{nkS_n}), \quad (8)$$

впрочем, s_n здесь вовсе не обязана быть средним значением НОР последовательности или даже вообще средним какой-либо выборки. Заметим, что кумулянта s_n получается из (8) при $n=1$.

Суть теоремы Гертнера - Эллиса (ГЭТ) в том, что $\lambda(k)$ можно вычислять, не зная плотность s_n и в случае дифференцируемости $\lambda(k)$ s_n удовлетворяет ПБУ, т.е. имеет место (7) и ФД является преобразованием Лежандра - Фенхеля для $\lambda(k)$:

$$I(s) = \sup_{k \in R} \{ks - \lambda(k)\}. \quad (9)$$

В скобках заметим, что в рамках нашего упрощенного изложения речь идет, фактически, о классическом преобразовании Лежандра ([3], с. 185). В этом случае, дифференцируя функцию в фигурных скобках и приравнивая ее к нулю, имеем уравнение для точки экстремума в (9):

$$\hat{s} = D\lambda(k), \quad (10)$$

решая которое относительно $k=k(\hat{s})$, получаем из (9) ($s=\hat{s}$):

$$I(s) = k(s)s - \lambda(k(s)). \quad (11)$$

В качестве простого примера рассмотрим НОР последовательности с плотностью (1), для которой получим:

$$\ln E(e^{nkS_n}) = \ln E(e^{k \sum_{i=1}^n \xi_i}) = \ln E \prod_{i=1}^n e^{k\xi_i} = \ln (E e^{k\xi_i})^n = n \ln (E e^{k\xi_i});$$

подстановка в (8) дает:

$$\lambda(k) = \ln E e^{k\xi_i}. \quad (12)$$

Вернемся теперь, в рамках рассматриваемого примера, к бернуллиевским величинам, но со значениями $\xi_i = 1$ или $\xi_i = -1$, и с вероятностями:

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2.$$

Воспользуемся ГЭТ и МК (10) для установления ПБУ и ФД. Из (10) имеем:

$$\lambda(k) = \ln [(e^k + e^{-k})/2] = \ln ch(k). \quad (13)$$

МК дифференцируема на всей прямой, в силу ГЭТ выполнен ПБУ и в соответствии с (9)

$$I(s) = \sup_{k \in R} \{ks - \ln ch(k)\}.$$

Далее, в соответствии с (10) имеем:

$$\hat{s} = D \ln ch(k) = th(k) = \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}}.$$

Решая это уравнение относительно $k = k(\hat{s})$, получаем (возвращаясь к переменной s и используя функцию обратного гиперболического тангенса):

$$k(s) = Arth s = \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s}. \quad (14)$$

Подставим (14) в (13):

$$\lambda(k) = \ln \frac{\sqrt{1+s}/\sqrt{1-s} + \sqrt{1-s}/\sqrt{1+s}}{2} = -\frac{1}{2} [\ln(1-s) + \ln(1+s)],$$

а затем в (11), где, с учетом (14), имеем:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{2} [\ln(1-s) + \ln(1+s)] + \frac{s}{2} [\ln(1+s) - \ln(1-s)] = \\ &= \frac{1+s}{2} \ln(1+s) + \frac{1-s}{2} \ln(1-s). \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство ГЭТ мы не приводим, его можно найти в [17], но представление об этом результате можно получить из теоремы следующего параграфа. В завершение же данного заметим, что ГЭТ можно расширить на векторные

случайные последовательности: в этом случае параметр k и переменная S_n – векторы одной и той же размерности, так что в (8) место их обычного произведения занимает скалярное, а в (10) $D\lambda(k)$ – вектор градиента. Этим мы также воспользуемся в одном из следующих разделов.

2.4 Лемма Варадхана

Для S_n и некоторой непрерывной функции f на R рассмотрим функционал

$$V_n[f] = E e^{nf(S_n)} = \int_R p_{S_n}(s) e^{nf(s)} ds. \quad (16)$$

Если S_n удовлетворяет ПБУ с ФД $I(s)$, то для плотности в (16) можно воспользоваться аппроксимацией (4) и тогда для (16) получим оценку:

$$V_n[f] \approx \int_R e^{n[f(s)-I(s)]} ds,$$

в которой интеграл – это, в свою очередь, объект оценивания методом Лапласа ([3], с. 101), когда основной вклад в интеграл при больших n определяется экстремумом в показателе экспоненты, если такой экстремум единственный:

$$V_n[f] \approx e^{n \sup_{s \in R} [f(s)-I(s)]}.$$

Определим также функционал:

$$\lambda[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln V_n(f),$$

используя предел, аналогичный (7); продолжая эту аналогию, мы запишем

$$\lambda[f] = \sup_{s \in R} \{f(s) - I(s)\}. \quad (17)$$

Именно в этом равенстве состоит лемма Варадхана, которая является весьма продвинутым обобщением принципа Лапласа. Как правило, формулировки леммы Варадхана наряду с непрерывностью функций f на R предполагают их ограниченность, но существуют варианты (например, [17], теорема 1.3.4), где ограниченности на R не требуется. Это позволяет выбрать

$$f(s) = ks, \quad k \in R$$

и тогда из (17) следует:

$$\lambda(k) = \sup_{s \in R} \{k s - I(s)\},$$

где $\lambda(k)$ – МК, т.е. функция (8). Таким образом, ГЭТ получается как инверсия леммы Варадхана. Но ГЭТ больше, чем просто инверсия, она устанавливает существование ПБУ и ФД (условие дифференцируемости МК или более слабое условие существования преобразования Лежандра - Фенхеля). В следующем пункте рассмотрим другой, весьма общий, метод установления ПБУ и ФД.

2.5 Принцип сжатия (contraction)

Пусть A_n случайная величина, о которой известно, что она удовлетворяет ПБУ с ФД $I_A(a)$, и пусть, также, B_n случайная величина, которая является функцией A_n :

$$B_n = f(A_n),$$

т.е. $f : A_n \rightarrow B_n$ (строго говоря, речь идет об отображении соответствующих множеств значений $X_A \supset a$ и $X_B \supset b$). Вопрос: при каких условиях на f величина B_n также удовлетворяет ПБУ и как в таком случае по $I_A(a)$ определить ФД $I_B(b)$? Для ответа обратимся к плотностям указанных случайных величин и к тому, как они связаны:

$$p_{B_n}(b) = \int_{\{a: f(a)=b\}} p_{A_n}(a) da = \int_{\{a: a \in f^{-1}(b)\}} p_{A_n}(a) da.$$

Используя ПБУ для A_n , из (4) имеем:

$$p_{B_n}(b) \approx \int_{\{a: a \in f^{-1}(b)\}} e^{-n I_A(a)} da.$$

Теперь, воспользовавшись принципом Лапласа в интеграле (как в п.4), получаем:

$$p_{B_n}(b) \approx \exp \left(-n \inf_{\{a: a \in f^{-1}(b)\}} I_A(a) \right).$$

Это показывает, что B_n удовлетворяет ПБУ и ФД для нее:

$$I_B(b) = \inf_{\{a: a \in f^{-1}(b)\}} I_A(a). \quad (18)$$

В силу свойств ФД здесь фактически можно использовать минимум, причем минимум по пустому множеству полагаем равным ∞ . Понятно также, что эти же свойства ФД требуют непрерывности функции f . Формула (18) оправдывает и смысл названия: оценивая ФД для какого-то маловероятного события по его прообразу, мы из всех (также маловероятных) точек прообраза оставляем все-же наиболее вероятную, отбрасывая остальные и тем самым сжимая данные. Вот эта операция отбрасывания всего лишнего, кроме оптимального, свое естественное завершение и воплощение получает в технологиях идемпотентного анализа и макс-плюс [14,15].

2.6 ПБУ для эмпирического распределения (меры заполнения)

Попробуем найти ФД специального среднего значения выборки, равного

$$L_{n,j}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i,j}$$

для последовательности $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ НОР случайных величин с конечным пространством состояний $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$ ($\delta_{i,j}$ - символ Кронекера). Это среднее значение выборки называется эмпирическим распределением X_i , поскольку оно «подсчитывает», сколько раз значение или символ $j \in \Lambda$ появляются в данной реализации X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Это число нормируется общим числом n , так что мы имеем эмпирическую частоту появления символа j в отмеченных реализациях. Так, для

$$\Lambda = \{1, 2, 3\} \quad \text{и} \quad X = \{2, 2, 3, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 2\}$$

имеем $n=12$, $q=3$ и эмпирические частоты:

$$L_{12,1} = \frac{2}{12}, \quad L_{12,2} = \frac{6}{12}, \quad L_{12,3} = \frac{4}{12}.$$

Указанные эмпирические распределения $L_{n,j}$ составляют q -вектор L_n : в представленном примере это трехмерный вектор

$$L_{12} = \begin{pmatrix} L_{12,1} \\ L_{12,2} \\ L_{12,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

поэтому для обоснования ПБУ и вычисления ФД следует воспользоваться векторным вариантом ГЭТ (замечание в заключительной части п.3). Обозначим производящие функции для L_n :

$$W_{L_n}(k) = E e^{n(k, L_n)} = E e^{\sum_{j=1}^q k_j \sum_{i=1}^n \delta_{X_i, j}},$$

и для $\delta_{X_i, \Lambda} = (\delta_{X_i, 1}, \delta_{X_i, 2}, \dots, \delta_{X_i, q})^T$:

$$W_{X_i}(k) = E e^{(k, \delta_{X_i, \Lambda})} = E e^{\sum_{j=1}^q k_j \delta_{X_i, j}}.$$

Меняя порядок суммирования в показателе экспоненты для W_{L_n} и учитывая независимость элементов X_i из X , имеем:

$$W_{L_n}(k) = E e^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q k_j \delta_{X_i, j}} = W_{X_i}(k)^n. \quad (19)$$

Вычисляя теперь МК $\lambda(k)$:

$$\lambda(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln E e^{n(k, L_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln W_{L_n}(k),$$

учитывая (19), получим:

$$\lambda(k) = \ln \sum_{j=1}^q p_j e^{k_j}, \quad (20)$$

где

$$p_j = P(X_i = j).$$

ФД вычисляем на основании (9)-(11)

$$I(l) = \sup_{k \in R^q} \{kl - \lambda(k)\} = k(l)l - \lambda(k(l)), \quad (21)$$

где $k(l)$ – единственное решение уравнения

$$l = D\lambda(k) \quad (22)$$

относительно k . Дифференцируя (20), имеем в (22):

$$\begin{aligned} D\lambda(k) &= \frac{1}{\sum_{j=1}^q p_j e^{k_j}} (p_1 e^{k_1}, p_2 e^{k_2}, \dots, p_q e^{k_q})^T = \\ &= (l_1, l_2, \dots, l_q), \end{aligned} \quad (23)$$

откуда, между прочим, следует:

$$\sum_{j=1}^q l_j = 1. \quad (24)$$

Обозначим

$$\sum_{j=1}^q p_j e^{k_j} = c,$$

тогда из (22) имеем:

$$p_j e^{k_j} = c l_j,$$

где, логарифмируя:

$$\ln p_j + k_j = \ln c + \ln l_j,$$

и, далее

$$k_j(l) = \ln c + \ln \frac{l_j}{p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (25)$$

Теперь в силу (20) и используя (24) и (25), получим:

$$\lambda(k(l)) = \ln \sum_{j=1}^q p_j e^{k_j(l)} = \ln \sum_{j=1}^q p_j \frac{l_j}{p_j} c = \ln c$$

и, подставляя это и (25) в (21), а также учитывая (24), получим для ФД:

$$I(l) = k(l)l - \lambda(k(l)) = \sum_{j=1}^q l_j \ln \frac{l_j}{p_j} + \left(\sum_{j=1}^q l_j \right) \ln c - \ln c = \sum_{j=1}^q l_j \ln \frac{l_j}{p_j}.$$

Итак, окончательный результат для эмпирического распределения $L_{n,j}(X)$

в условиях последовательностей независимых случайных величин, известный

как теорема Санова, состоит в обосновании ПБУ и установлении ФД в виде относительной энтропии или энтропии Кульбака - Лейблера - Санова:

$$I(l) = \sum_{j=1}^q l_j \ln \frac{l_j}{p_j}.$$

2.7 Пуассоновские и связанные с ними процессы

Пусть

$$\lambda(x, x) = - \sum_{y \neq x} \lambda(x, y)$$

и обозначим массив $L = \{\lambda(x, y)\}_{x, y}$, который будем называть генератором процесса.

Таким образом, мы будем иметь дело с генератором как с линейным оператором, действующим на функциях, определенных в пространстве состояний. Если пространство состояний χ процесса x_t конечно, то L это просто матрица и для функций $f : \chi \rightarrow R^d$, имеем

$$(Lf)(x) = \sum_y \lambda(x, y) f(y) = \sum_y \lambda(x, y) (f(y) - f(x)), \quad (26)$$

где второе равенство следует из определения $\lambda(x, x)$. Детали можно найти в [19] (гл. 4 и приложение В.1).

Альтернативное определение использует понятие полугруппы: для семейства линейных операторов $T_t = [p_t(x, y)]$, $t \geq 0$, удовлетворяющего соотношениям $T_t T_s = T_{t+s}$, $T_t \geq 0$, $T_t 1 = 1$, $T_0 = I$, $\lim_{t \downarrow 0} T_t = I$ (где первое равенство означает

$\sum_y p_t(x, y) p_s(y, z) = p_{t+s}(x, z)$, а величина $p_t(x, y)$ представляет собой вероятность

того, что в момент времени t процесс будет находиться в точке y , при условии, что в момент времени ноль он находился в точке x) при заданном генераторе L соответствующая полугруппа T_t может быть представлена как

$$T_t = e^{tL} = I + tL + \dots + (tL)^n / n! + \dots,$$

откуда

$$L = \lim_{t \downarrow 0} (T_t - I)/t. \quad (27)$$

Учитывая, что T_t обычно определяется [3,5,19] как усреднение некоторой функции f от процесса, в соответствие с (2) имеем (в [19] это определение 4.6)

$$(Lf)(x) = \lim_{t \downarrow 0} E(f(y_t) - f(x) | y_0 = x)/t. \quad (28)$$

Множество функций $f : \chi \rightarrow R^d$, для которых этот предел существует для любого $x \in \chi$ называется областью определения $D(L)$ генератора L . Как и в [19], будем полагать f ограниченными на χ .

Покажем эквивалентность определений (26) и (28), ограничившись простейшим случаем скалярного процесса Пуассона с параметром λ . В этом случае $\chi = Z$ и для $z \neq y$

$$\lambda(y, z) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } z = y + 1, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

При этом из (26) имеем

$$(Lf)(y) = \sum_z \lambda(y, z)(f(z) - f(y)) = \lambda(f(y+1) - f(y)).$$

С другой стороны, используя (28) и усреднение для значений пуассоновского процесса с вероятностями $\pi_j(t)$, получаем

$$\begin{aligned} (Lf)(y) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} [f(y+j)\pi_j(t) - f(y)\pi_j(t)] = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} [f(y+j) - f(y)] \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \{ [f(y+j) - f(y)] \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \} = \\ &= \lambda(f(y+1) - f(y)), \end{aligned} \quad (29)$$

на том основании, что ряд в последнем равенстве сходится абсолютно и равномерно и все члены ряда, начиная с $j = 2$ (включительно), как $o(\lambda)$ в пределе

равны нулю, и значение предела совпадает с членом ряда при $j = 1$, т. е. $O(\lambda)$, что и дает коэффициент λ перед $f(y+1) - f(y)$.

Процессы рождения и гибели

Представим, что для особей d типов в каждой точке рассматриваемого процесса может родиться и умереть не более одной особи каждого типа, причем скорость рождения (гибели) зависит от текущего состояния. Возможные интерпретации: мутация, коагуляция и т.д.

Итак, имеется конечное число m направлений скачков $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$, где компоненты $\vec{e}_i$ принимают значения из тройки $\{1, -1, 0\}$, а скорость равна

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } y = x + \vec{e}_j, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Генератор такого (случайного) процесса

$$L f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\vec{x}) (f(\vec{x} + \vec{e}_i) - f(\vec{x})).$$

Масштабируемый процесс

Пусть $N(t)$ – пуассоновский процесс и $z_n(t) = N(nt)/n$ – процесс, который получается учащением и уменьшением скачков. Для вычисления генератора этого процесса сделаем замену переменной $nz = y$ и воспользуемся формулой (28):

$$(L_n f)(z) = \lim_{t \downarrow 0} E(f(N(nt)/n) - f(y/n) | N(0)/n = y/n) / t.$$

Теперь положим $s = nt$ и определим функцию $g(y) = f(y/n)$, в результате чего из (26) и (29) применительно к g имеем:

$$\begin{aligned} (L_n f)(z) &= n \lim_{s \downarrow 0} E(g(N(s)) - g(y) | N(0) = y) / s = \\ &= n\lambda(g(y+1) - g(y)) = n\lambda(f(z+1/n) - f(z)) = \lambda \frac{f(z+1/n) - f(z)}{1/n}. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае существования здесь предела при $n \rightarrow \infty$, имеем:

$$(L_\infty f)(z) = \lambda \frac{d}{dz} f(z).$$

Этому оператору 1-го порядка соответствует детерминированный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d}{dt} \bar{z}_\infty(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\bar{z}_\infty(t)) \bar{e}_i. \quad (30)$$

Из разд. 1.4 [19] и из упр. 1.25 там же следует для независимых одинаково распределенных случайных величин y_{ij} , имеющих пуассоновское распределение с набором параметров $\lambda_j(\bar{x})$, что вероятности редких событий управляются локальной функцией действия (или «local rate function») (17):

$$l(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{\bar{\theta}} \{ \langle \bar{\theta}, \bar{y} \rangle - g(\bar{x}, \bar{\theta}) \},$$

где

$$g(\bar{x}, \bar{\theta}) = \log M(\bar{\theta}) = \log E e^{\langle \bar{\theta}, \bar{v}_1 \rangle} = \sum_{i=1}^k \lambda_i(\bar{x}) (e^{\langle \bar{\theta}, \bar{e}_i \rangle} - 1).$$

Если бы скорость была постоянной $\lambda_i(\bar{x})$ и некоторая кривая $\bar{r}$ - линейной, мы бы получили на промежутке $[0, T]$ (глобальную) функцию действия $T \cdot l(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y} \stackrel{\Delta}{=} \bar{r}'(t)$. Локальное влияние скоростей и общий характер (в том числе, нелинейность) функции $\bar{r}$ учитывается в функционале действия (ФД)

$$I_0^T(\bar{r}) = \begin{cases} \int_0^T l(\bar{r}(s), \bar{r}'(s)) ds, & \bar{r} \text{ абсолютно непрерывна,} \\ \infty & \text{, в противном случае.} \end{cases} \quad (31)$$

Очередь М/М/1

Рассмотрим систему массового обслуживания (очередь) с марковскими процессами поступления заявок (с параметром λ) и обслуживания (с параметром μ), а также с единственным сервером, то есть в обозначениях Кендалла: М/М/1. В простейшем случае это свободный (free) процесс $y(t)$, то есть процесс без ограничений, который может быть представлен в виде разности пуас-

соновского процесса с параметром λ и, независимого от него, пуассоновского процесса с параметром μ :

$$\begin{aligned} e_1 &= +1, & \lambda_1(x) &= \lambda; \\ e_2 &= -1, & \lambda_2(x) &= \mu. \end{aligned}$$

Простейшее ограничение состоит в том, что для λ_2 имеем

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} \mu, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Чтобы иметь стабильную очередь, будем еще предполагать

$$0 < \rho = \lambda / \mu < 1. \quad (32)$$

Из (30) при этом получаем:

$$\frac{d}{dt} z_\infty(t) = \begin{cases} \lambda - \mu, & \text{если } z_\infty > 0 \\ 0, & \text{если } z_\infty = 0 \end{cases},$$

откуда

$$z_\infty(t) = \max \{ z_\infty(0) - t(\mu - \lambda), 0 \},$$

или, что эквивалентно с учетом $T^* = z_\infty(0) / (\mu - \lambda)$:

$$z_\infty(t) = \begin{cases} z_\infty(0) - t(\mu - \lambda), & \text{если } t \leq T^*, \\ 0, & \text{если } t > T^*. \end{cases}$$

В связи с контролем различных событий уклонения от равновесных состояний удобно ввести для рассматриваемых процессов некоторые типовые траектории. Для упрощения рассмотрим плоскую задачу, в которой x означает начальные, а y - конечные условия. Определим $t_1 = (x + y) / (\mu - \lambda)$ для устойчивой очереди (32) М/М/1 и обозначим $t^* > t_1$ такое, что оптимальные стоимость φ_t и путь r^* из x в y за время t задаются соотношениями:

$$\varphi_t(x, y) = \begin{cases} y \log \frac{\mu}{\lambda}, & \text{при } t \geq t^*, \\ t l_f \left(\frac{y-x}{t} \right), & \text{при } t < t^*; \end{cases}$$

$$r^*(s) = \begin{cases} x + (y - x)s, & \text{при } t < t^*, \\ x - (\mu - \lambda)s, & \text{при } t > t^*, s < \frac{x}{\mu - \lambda}, \\ 0, & \text{при } t > t^*, \frac{x}{\mu - \lambda} \leq s \leq t - \frac{y}{\mu - \lambda}, \\ y + (\mu - \lambda)(s - t), & \text{при } t > t^*, t - \frac{y}{\mu - \lambda} < s \leq t, \end{cases}$$

где в выражении для φ_t функция l_f обозначает локальную ФД для свободного процесса. Кроме того, t^* является (единственным) наибольшим положительным решением уравнения:

$$t l_f\left(\frac{y-x}{t}\right) = y \log \frac{\mu}{\lambda}.$$

Различные события относительно больших отклонений процессов пуассоновского типа и их вероятности могут быть рассмотрены с помощью функции φ_t для масштабируемого процесса. Например, имеет место следующий результат.

Теорема 1 [19]. При условии (32) для любого $t, x, y > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_x \left(y - \frac{1}{2n} < z_n(t) < y + \frac{1}{2n} \right) = \varphi_t(x, y).$$

Что касается оптимальных путей r^* на плоскости, то их зависимость от t, x, y полезно проследить на различных вариантах указанных параметров. Так, на рисунке 3 представлены пути для перемещения из $x=2$ в $y=3$ за различные промежутки времени длительностью $t=2, 4, 8, 10, 14$. Момент $t=t^*=10$ отмечен особо, так как ему соответствует два разных пути, отвечающих заданию: один – прямолинейный, непосредственно ведущий в $y=3$ и пересекающий этот уровень в момент $t^*=10$ и другой, трехзвенный, в котором первое прямолинейное звено приводит в 0, следуя z_∞ (с оптимальным наклоном $-(\mu - \lambda)$), и оставаясь в нуле от $t=2$ до $t=7$, далее 3-е прямолинейное звено ведет в $y=3$, следуя обращению z_∞ до $t=t^*=10$; оптимальный наклон теперь $\mu - \lambda$ и промежуток вре-

мени до достижения y равен $y/(\mu - \lambda) = 3$. Изменение оптимальной стоимости в данной задаче представлено на рисунке 4.

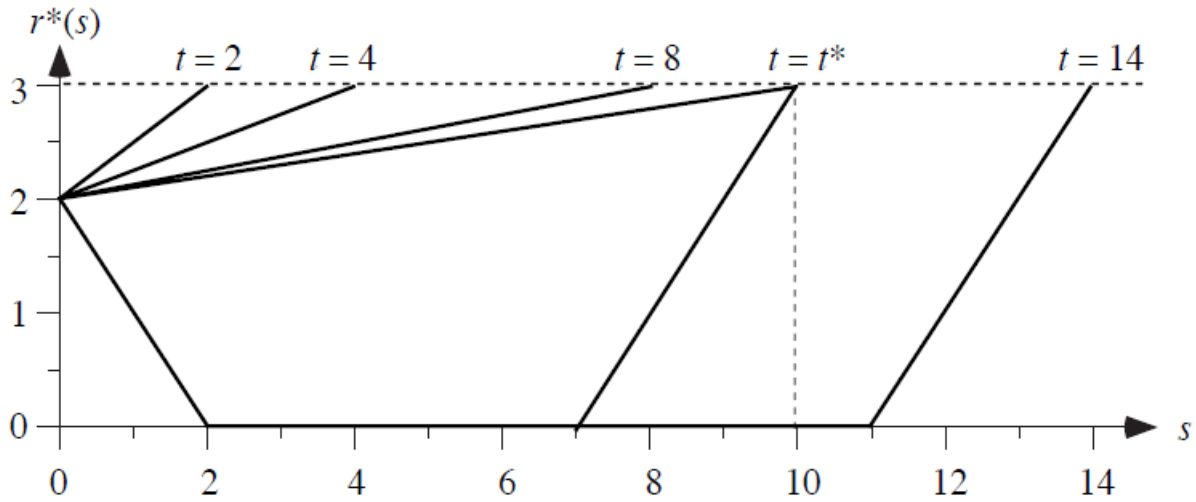


Рисунок 3 [19]: Критические пути для перемещения из x в y за время $t = 2, 4, 8, 10, 14$

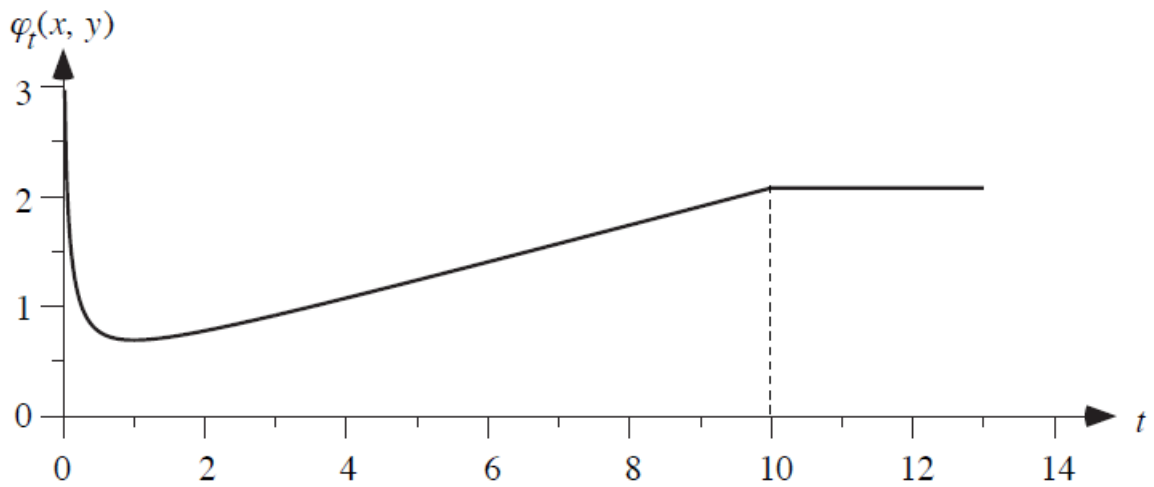


Рисунок 4 [19]: Минимальное значение стоимости в функции времени и в контексте задачи рис. 3

2.8 Диффузионные марковские процессы; применение ПБУ в прогнозировании и управлении

Рассмотрим стохастическую систему для $X^\varepsilon(t) \in R^n$

$$\dot{X}^\varepsilon = \mathbf{a}(X^\varepsilon) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}(X^\varepsilon) \dot{W}, \quad X^\varepsilon(t_0) = \mathbf{x} \in D, \quad (33)$$

где $\dot{\mathbf{w}}$ – k -вектор «белого шума», $\mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma}$ – гладкие матричные функции, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Будем считать, что невозмущенная система (получается из (33) при $\varepsilon = 0$):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (34)$$

имеет в области D единственный аттрактор $\chi = 0$. Система (34), таким образом, приближенно описывает некоторый штатный процесс стабилизации в (33), соответствующий «типовому» поведению возмущений на конечном интервале. Это означает также, что решения системы (34) при тех же условиях, что и (33), вполне могут служить оценками экстраполяции (ОЭ) для процесса (33) в той степени, в какой нормы отклонений между решениями (33) и (34) имеют порядок $O(\varepsilon)$. При длительном наблюдении оказывается возможным некоторое критическое событие, связанное с выходом $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$ на границу ∂D области D . Устранение такой возможности требует организации прогноза, обеспечивающего достаточное для антикризисного маневра время. Представим это в виде последовательности задач выбора между двумя гипотезами: $H_0 = H_0(t, t_f)$ – штатное и $H_1 = H_1(t, t_f)$ – критическое развитие процесса от момента t , в который делается прогноз, до момента t_f – горизонта прогноза, $t < t_f$.

Рассмотрим детерминированное уравнение *системы путей*:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}, \quad (35)$$

где $\mathbf{v}$ – суммируемая функция, для которой определен функционал действия (ФД):

$$S_{t_0 t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T \mathbf{v} dt, \quad (36)$$

конечный для абсолютно непрерывных $\mathbf{v}$ на $[t_0, t_f]$. Границу ∂G представим соотношением

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}(t_f) - \mathbf{y} = 0, \quad (37)$$

где $y \in R^r$, $r \leq n$, C – матрица полного ранга; квазипотенциал [3] системы (35) относительно аттрактора (34), определяется как

$$V(\chi, x) = \inf \{ S_{t_0 t_f}(\varphi) : \varphi \in C_{t_0 t_f}(R^n) : \varphi_{t_0} = \chi, \varphi_{t_f} = x \}.$$

Вероятностный смысл задачи на минимум (36) при ограничениях (35), (37) (задача БУ (35-37)) и ее связь с диффузионным процессом (33) заключены в *принципе больших уклонений* [3]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\{X^\varepsilon(t) \in R^n \setminus D\} = - \min_{\varphi \in F} S_{t_0 t_f}(\varphi, v) = -\hat{S}_{t_0 t_f}, \quad (38)$$

где $F = \{\varphi \in C_{t_0 t_f}(R^n) : \varphi_{t_0} \in D, \varphi_{t_f} \in R^n \setminus D\}$.

Квазипотенциал $V(\chi, x) = V_\chi(x)$ есть отображение

$$V_\chi : C_{t_0 t_f}(R^n) \rightarrow R_+,$$

связанное с задачей (35-37), причем прообраз $V(\chi, z_0)$, который называется χ -профилем [5] [4], существует только при $t_0 = -\infty$; обозначим его $\hat{\phi}$. Этот χ -профиль $\hat{\phi}$, ведущий от χ до z_0 , и только он, может быть использован в качестве прогноза, альтернативного ОЭ. Этот вид прогноза, основанного на ПБУ и, в частности, на построении χ -профиля, в отличие от ОЭ, может давать любые, в том числе произвольно большие, промежутки экстраполяции, что следует из $t_0 = -\infty$. Из указанной особенности прогноза, который мы называем ситуационным (СП), следует возможность противодействия нештатному развитию контролируемого процесса. Стоит также отметить, что бесконечная протяженность χ -профиля есть особенность гауссовских возмущений – рисунки 3 и 4 показывают, что в случае распределений пуассоновского типа это не так.

Вычисление χ -профиля для линейных систем

Для нас будет важен линейный случай СП, который определяется следующими из (35-37) уравнениями для прямых и сопряженных переменных, а также для оптимального управления:

$$\dot{\varphi}_t = A\varphi_t + \sigma v_t, \quad C\varphi(t_f) = y, \quad (39)$$

$$\dot{\psi}_t = -A^T \psi_t, \quad \psi(t_f) = \psi_f, \quad (40)$$

$$v_t = \tilde{v}_t = \sigma^T \psi_t. \quad (41)$$

Подставляя решение начальной задачи (40) в (41) и (39), получим систему:

$$\dot{\varphi}_t = A\varphi_t + \sigma \sigma^T e^{A^T(t_f-t)} \psi_f, \quad C\varphi(t_f) = y,$$

решение которой $\varphi(t)$, в свою очередь, определяет профиль критического состояния (КС): $x_f = \varphi(t_f)$

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_f)} x_f + J(t) \psi_f, \quad (42)$$

где $J(t)$ – грамиан управляемости:

$$J(t) = \int_{t_f}^t e^{A(t-\tau)} \sigma \sigma^T e^{A^T(t_f-\tau)} d\tau. \quad (43)$$

В предположении гурвицевости матрицы A , что эквивалентно (при условии равномерной невырожденности диффузии) существованию единственного положительно определенного решения D уравнения Ляпунова:

$$\sigma \sigma^T = -AD - DA^T,$$

грамиан управляемости (43) выражается через D :

$$J(t) = D e^{A^T(t_f-t)} - e^{A(t-t_f)} D. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (42), получим следующее выражение для решения:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{A(t-t_f)} x_f + (D e^{A^T(t_f-t)} - e^{A(t-t_f)} D) \psi_f = \\ &= e^{A(t-t_f)} (x_f - D \psi_f) + D e^{A^T(t_f-t)} \psi_f. \end{aligned} \quad (45)$$

Потребуем в (45):

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \chi = 0. \quad (46)$$

Это будет выполнено, если и только если:

$$x_f - D\psi_f = 0. \quad (47)$$

Решая (47) относительно сопряженных переменных: $\tilde{\psi}_f = D^{-1}x_f$

и подставляя в (45), получаем соотношение для вычисления χ -профиля:

$$\tilde{\varphi}(t) = D e^{A^T(t_f - t)} D^{-1} x_f, \quad (48)$$

а также квазипотенциал устойчивой системы (39):

$$V(0, x) = \frac{1}{2} x^T D^{-1} x. \quad (49)$$

В соответствии с принципом Лагранжа [7], в составе необходимых условий экстремума имеем задачу минимизации $V(0, x_f)$ при ограничении (37). Записывая лагранжиан для этой задачи (здесь $x = x_f$):

$$L = \frac{1}{2} x^T D^{-1} x + \mu^T (Cx - y),$$

и условие стационарности: $L_x = D^{-1}x + C^T \mu = 0$, имеем отсюда и из (37):

$$x = DC^T \mu, \quad (50)$$

$$y = CDC^T \mu.$$

В последнем равенстве $CDC^T > 0$, так как, по предположению, C – матрица полного ранга, поэтому для μ имеем: $\mu = (CDC^T)^{-1}y$. Подставляя последнее выражение для μ в (50), получаем ($x = x_f$):

$$x_f = DC^T (CDC^T)^{-1} y.$$

Остается подставить это в (48) и получить выражение для χ -профиля КС:

$$\tilde{\varphi}(t) = D e^{A^T(t_f - t)} C^T (C D C^T)^{-1} y. \quad (51)$$

Применение ПБУ в синтезе управления на основе асимптотических методов и СП

Мы опираемся на метод усреднения [5], на основе которого создается быстрый контур, формирующий заданные ускорения для медленных переменных. Поскольку применяемый подход обеспечивает взаимную независимость каналов в медленной подсистеме, появляется возможность реализации процедуры типа МРС-управления на основе повторения однотипной операции, схема которой представлена на рисунке 5.

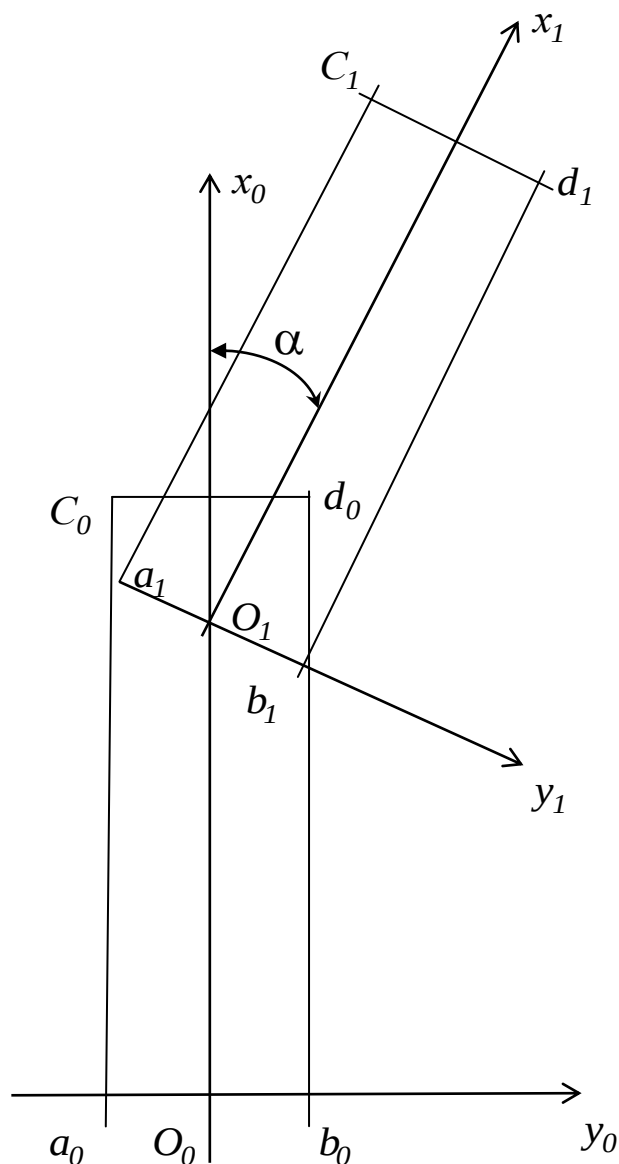


Рисунок 5 – Схема изменения направления движения АГР

Пусть, для определенности, необходимо осуществить движение автономного подвижного робота (АПР) в горизонтальной плоскости вдоль линии $O_0O_1x_1$: начав движение из точки O_0 в системе координат $O_0x_0y_0$ вдоль O_0x_0 -оси (задачи 0) и дойдя до точки O_1 , продолжить движение в системе координат $O_1x_1y_1$ вдоль O_1x_1 -оси (задачи 1) и так далее. В этой схеме барьеры $O_0a_0 = O_0b_0 = y_0$, $O_1a_1 = O_1b_1 = y_1$ задают ограничения, в рамках которых должно осуществляться движение, то есть условие (37) для задач в системах координат $O_0x_0y_0$, $O_1x_1y_1$ выглядят так (соответственно):

$$\begin{aligned} C\varphi(t_f) \pm y_0 &= 0, \\ C\varphi(t_f) \pm y_1 &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

χ -профили для каждой из задач легко вычисляются по формуле (51), где $A = J_0 + B_0d_1$, $C = (1 \ 0)$, а $y = y_0$ или $y = -y_0$ для первой пары задач СП (задачи 0) и $y = y_1$ или $y = -y_1$ для второй пары (задачи 1).

Здесь остановимся только на проблеме, связанной с переключением с задач 0 на задачи 1. При этом переходе в окрестности точки O_1 (и в последующих аналогичных) ПР имеет дополнительную компоненту скорости на левый или правый борт в зависимости от знака угла α : в случае рисунка 5 это будет смещение на левый борт.

В связи с этим нужно оценить влияние начального условия на процесс контроля критического выхода ПР на ограничение. Покажем здесь, что соседние экстремали (профили), не удовлетворяющие условию (47), экспоненциально близки с χ -профилем.

Пусть в (45)

$$x_f - D\psi_f = \gamma_f \neq 0, \quad \psi_f = \tilde{\psi}_f + \Delta\psi_f,$$

Тогда

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + J(t)\Delta\psi_f \quad (53)$$

где $\Delta\psi_f = -D^{-1}\gamma_f$, а функция $\tilde{\varphi}(t)$ удовлетворяет (51). В обозначениях

$$x_0 = \varphi_0 = \varphi(t_0), \quad \tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}(t_0), \quad J_0 = J(t_0),$$

из (53) получаем:

$$\Delta \psi_f = J_0^{-1}(x_0 - \tilde{\varphi}_0), \quad (54)$$

где невырожденность грамиана следует из управляемости.

Итак, (53), (54) позволяют вычислить профиль, исходящий из точки (t_0, x_0) , или коротко, (t_0, x_0) -профиль:

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + J(t) J_0^{-1}(x_0 - \tilde{\varphi}_0). \quad (55)$$

Сравним по значениям ФД (t_0, x_0) - и χ -профили, для чего обозначим:

$$S_{0f} = S_{t_0 t_f}(\varphi, v)$$

и

$$\tilde{S}_{0f} = S_{t_0 t_f}(\tilde{\varphi}, v).$$

Из (36), (41) имеем:

$$S_{0f} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \psi_f^T e^{A(t_f - \tau)} \sigma \sigma^T e^{A^T(t_f - \tau)} d\tau \psi_f = -\frac{1}{2} \psi_f^T I_{0f} \psi_f,$$

где

$$I_{0f} = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} \sigma \sigma^T e^{A^T(t_f - \tau)} d\tau = e^{A(t_f - t_0)} J(t_0),$$

откуда получаем:

$$S_{0f} = -\frac{1}{2} \psi_f^T e^{A(t_f - t_0)} J(t_0) \psi_f. \quad (56)$$

Выражение для $\tilde{S}_{0f}$ получается из (56) при дополнительном условии $\psi_f = \tilde{\psi}_f$, то есть при $\Delta \psi_f = 0$ и использовании соотношения (47); в результате имеем:

$$\tilde{S}_{0f} = V(0, x_f) - V(0, \tilde{\varphi}(t_0)). \quad (57)$$

Полагая

$$P_{t_0 t_f} = P\{\tilde{x}_{t_0} = \tilde{\varphi}(t_0) \in D; \tilde{x}_{t_f} \in R^n \setminus D\}$$

при $t_0 = t$, из (38) получаем

$$\varepsilon^2 \ln P_{tt_f} \approx -\tilde{S}_{tt_f} = -\min_{\varphi \in F} S_{tt_f}(\varphi, v). \quad (58)$$

Вернемся к (55), имея в виду возможность аппроксимации профилей в случае долговременного прогноза, то есть при больших значениях $t_f - t_0$: функции $\tilde{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке $[t_0, t_f]$ – это два решения для уравнения (39) при разных начальных условиях в момент t_0 , причем матрица A в этом уравнении по предположению – гурвицева. В силу этого разность $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\dot{z}_t = Az_t$$

и, следовательно, для любого t : $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow -\infty$. Конечно, этот факт можно получить и другим, хотя и более длинным путем, показав непосредственно для (55), что $J(t)J_0^{-1} \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow -\infty$, исходя из (44).

Далее представлены результаты вычислений профилей и χ -профилей и соответствующие им $\tilde{S}_{tt_f}, S_{tt_f}$ в функции времени. Обозначим здесь: $\tilde{S}_{\varphi_0} = \tilde{S}_{t_0 t_f}(\varphi_0) = \min_{\varphi \in F, \varphi(t_0) = \varphi_0} S_{t_0 t_f}(\varphi, v)$ для $\varphi_0 \in D$, значение ФД на χ -профиле в этот же момент t_0 обозначим $\tilde{S}$.

При этом, в качестве системы (39) использовался фильтр Баттерворта второго порядка (ФБ-2: $\xi = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$; см. упр. 16, разд. 1.7 настоящего пособия) на отрезке $[t_0, t_f] = [0, 10c.]$. Осциллограммы приведены на рисунке 6. Толстой линией обозначен χ -профиль критического состояния $(10 \ 0)^T \tilde{\varphi}(t)$, точнее, его конечный отрезок протяженностью $10c.$, а более тонкой – профиль, исходящий из начальной точки $\varphi_0 = \varphi(0) = (-0.4 \ 0)^T$, тогда как $\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}(0) = (-0.00064 \ 0)^T$: после 2-й секунды кривые на рисунке практически сливаются. По значениям ФД процесс выглядит так: $\tilde{S} = 400.0$, $\tilde{S}_{\varphi_0} = 399.9980$. Небольшое улучшение критерия $\tilde{S}_{\varphi_0}$ по сравнению с $\tilde{S}$

связано с тем, что при $\xi < 1$ система является осциллятором и начальное условие φ_0 действует синфазно с $\tilde{\varphi}(t)$. В этом можно убедиться, уменьшив относительное затухание. Приведем таблицу 9, содержащую итоговые цифры.

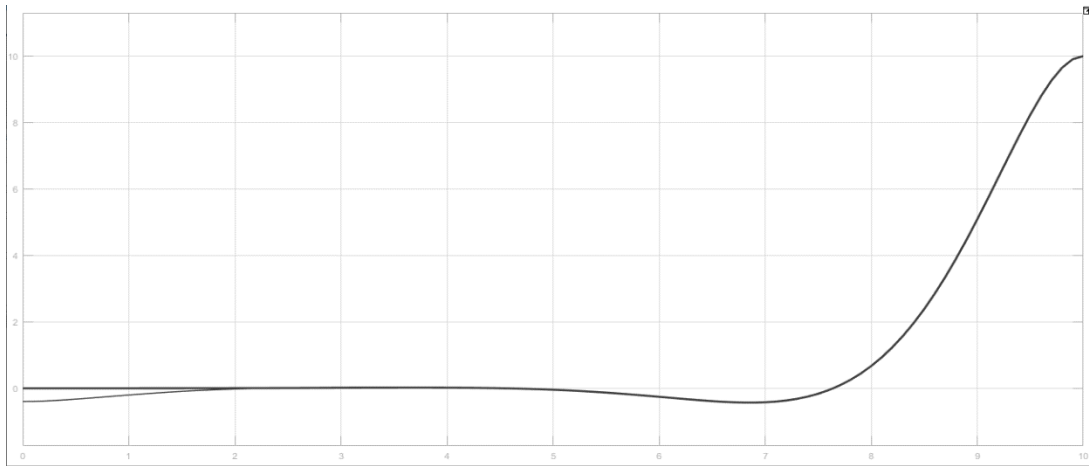


Рисунок 6 – Осциллограммы профилей для фильтра Баттерворта второго порядка

Таблица 9 – Профили для осциллятора с $\xi = 0.1/\sqrt{2}$

№ п/п	φ_0	$\tilde{\varphi}_0$	$\tilde{S}$	$\tilde{S}_{\varphi_0}$
1	–	$(0.4 \ 5.21)^T$	34.509	–
2	$(-0.4 \ 0)^T$	–	–	46.584
3	$(-0.4 \ -7)^T$	–	–	65.101
4	$(-0.4 \ 5)^T$	–	–	35.226
5	$(-0.4 \ 10)^T$	–	–	25.550

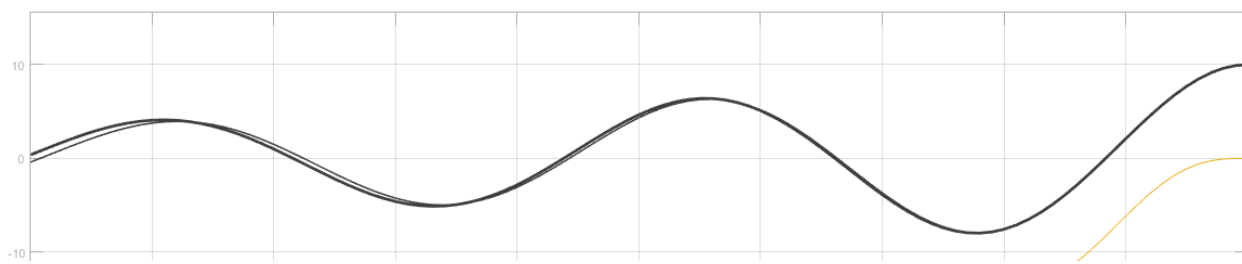
Осциллограммы профилей приведены на рисунке 7: во всех трех вариантах более жирная кривая соответствует χ -профилю, то есть строке № 1 в таблице 9, вариант (а) представлен строкой № 4, вариант (б) – строкой № 2, вариант (в) – строкой № 5, а строке № 3 соответствует панель (г), в нижней части которой желтым цветом представлена как функция t кривая

оптимального действия $\tilde{S}_{tt_f}$ между точками t и t_f , вычисляемого согласно (57) как разность соответствующих квазипотенциалов

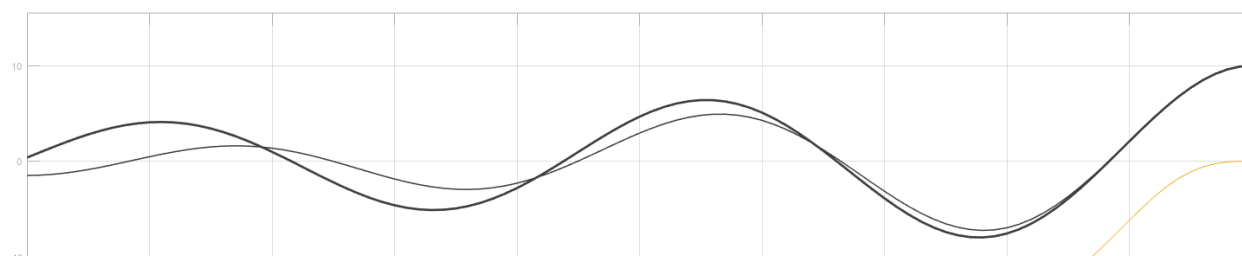
$$\tilde{S}_{tt_f} = V(0, x_f) - V(0, \tilde{\varphi}(t))$$

и, согласно (58), дающего оценку $-\ln P_{tt_f}$, то есть оценку в момент t вероятности наступления события (37) (или какого-то из (52)) через $t_f - t$ единиц времени.

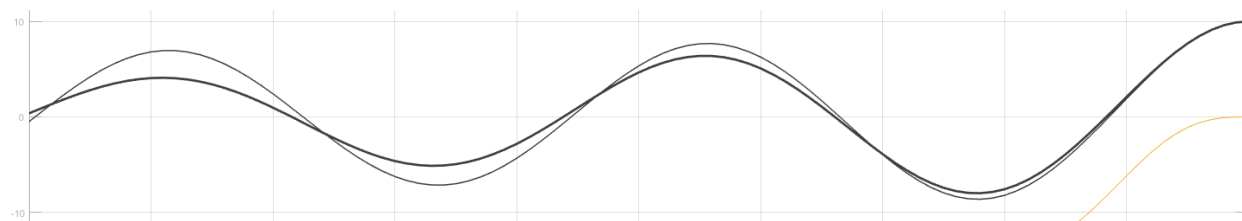
Замечание 3. Рисунок 7 (б-г) в сравнении с рисунком 6 показывает, что увеличение колебательности приводит к росту зависимости вероятности КС от фазы и величины начальных условий процесса: рисунок 7 (в) соответствует совпадению фаз и, как мы видим в таблицы 9 (№ 5) – уменьшению ФД с 34.509 до 25.550, в случае (б) совпадения фаз нет и это соответствует ФД 46.584, наконец, вариант (г) (№ 3 в таблице 9) это начальное движение точно в противофазе и значение ФД, достигаемое в этом случае 65.101, что соответствует наименьшей оценке вероятности КС. Отсюда вывод: когда все штатно и достигается управление в режиме ФБ-2 или с еще меньшим ξ можно не беспокоиться о нарушении барьерных ограничений в точке перехода от одного отрезка траектории к другому (точка O_1 на рисунке 5), если же по тем или иным причинам управление идентифицируется как весьма колебательное (ориентировочно: $0 < \xi < 1/2$), стоит обратиться к выбору момента перехода с одного сегмента на другой так, чтобы он соответствовал движению в противофазе с χ -профилем, идентифицированным в левой полукрестности O_1 . Более точные рекомендации требуют дополнительных, в том числе экспериментальных, исследований.



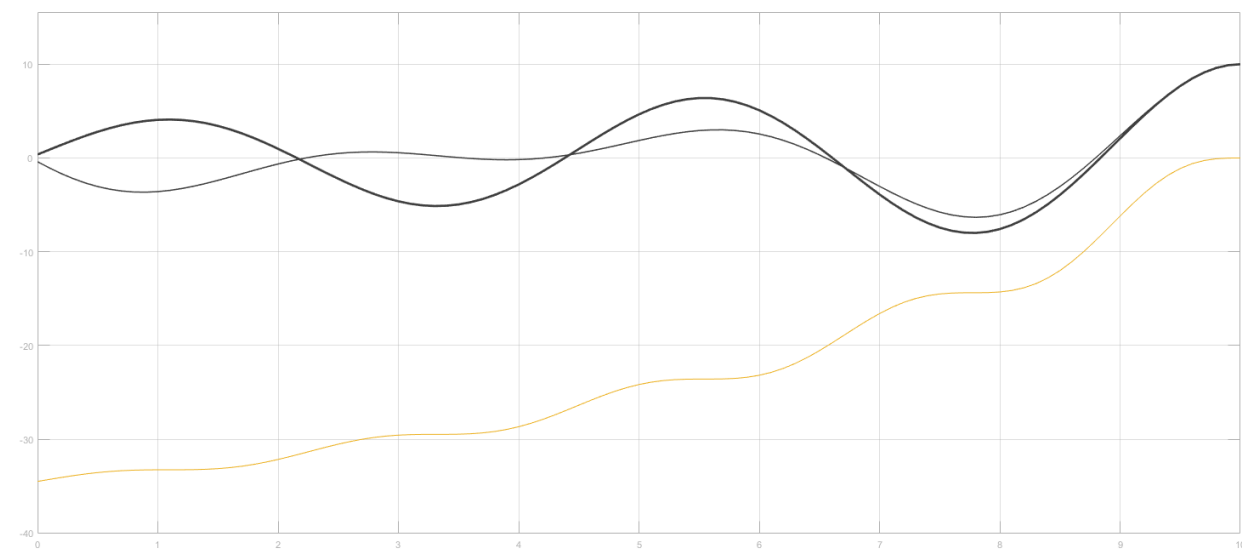
(a)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 7 – Осциллограммы профилей для осциллятора с $\xi = 0.1/\sqrt{2}$

П2. ПРИЛОЖЕНИЕ к гл. 2

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ № 5, 6 (П2.1, П2.2)

П2.1 Оценки вероятностей для больших уклонений

Цель работы: оценить вероятности больших уклонений для гауссовской случайной величины методом статистических испытаний (Монте-Карло) двумя способами:

1. прямым вычислением числа благоприятных событий (прямой метод);
2. предварительным смещением распределения (метод смещения).

Проанализировать точность получаемых оценок.

Вычисление оценок

Если для заданной функции $f(X)$ случайной величины X необходимо вычислить среднее значение $M f(X)$, то используется **метод статистических испытаний**, то есть формируются N значений X : $X_1, X_2, \dots, X_N$ и полагают (при достаточно большом N) по закону больших чисел:

$$M f(X) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i). \quad (59)$$

Вероятность события A связана с операцией усреднения с помощью функции I_A – индикатора A . То есть, для нашей цели оценки вероятности события $A = \{X > x_M\}$ имеем:

$$f(x) = I_{\{x > x_M\}} = \begin{cases} 1, & x > x_M \\ 0, & x \leq x_M \end{cases}.$$

Причем, x_M не принадлежит малой окрестности среднего, поскольку речь идет о больших уклонениях от среднего.

В работе рассматриваются большие уклонения для стандартной гауссовской величины X , то есть имеющей нулевое среднее $MX = 0$ и единичную дисперсию: $X \Leftrightarrow N(0, 1)$.

В смещенном распределении $MY = \mu \neq 0$, $Y \Leftrightarrow N(\mu, 1)$.

Прямой метод – это вычисление по формуле (59). В методе смещения также можно пользоваться этой формулой, но при этом

$$f(x) = I_{\{x > x_M\}} e^{\mu^2/2 - \mu x}. \quad (60)$$

План работы

Следует написать программы, реализующие методы прямой и смещения. Варианты заданы в таблице 10. Построить графики оценок в зависимости от $N \in \{50, 200, 500, 1000, 1500\}$.

Таблица 10

Номер варианта	Параметр диагностируемого события: x_M	Среднее для смещения: μ
1	3.0	3.1
2	3.0	3.2
3	3.0	3.15
4	2.5	2.75
5	2.5	2.6
6	3.5	3.6
7	3.5	3.65
8	3.2	3.25
9	3.2	3.35
10	3.25	3.275

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Расчёты оценок по формулам (59), (60).
2. Графики.
3. Анализ точности полученных оценок в зависимости от способа оценки и объема данных
4. Тексты программ на МАТЛАБе.
5. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Как вероятность события вычисляется с помощью операции усреднения?
2. В чем состоит метод статистических испытаний?

П2.2 Оценки плотностей и функций действия в условиях ПБУ

Цель работы: Основываясь на материале пп. 2.1, 2.2 провести исследование:

1. Для выборки из распределения Бернулли построить оценки вероятностей и плотностей распределения, исходя из ПБУ.

2. Экспериментально оценить сходимость слабой плотности $p_n(s)$ (с. 44) при $n \rightarrow \infty$ к функции действия (ФД) $I(s)$.

3. Сопоставить ФД с ее оценкой, вытекающей из центральной предельной теоремы (ЦПТ) (п. 2.1, с. 40), которую обозначим здесь как $I_c(s)$. Проанализировать точность получаемых оценок, убедиться в том, что $I(s)$ и $I_c(s)$ близки только для типовых значений (п. 2.1).

Вычисление оценок

Необходимо уточнить алгоритм вычисления $I_c(s)$. Для бернуллиевских величин [13] с параметром α и вероятностями $P(\xi_i = 1) = \alpha$, $P(\xi_i = 0) = 1 - \alpha$ искомая оценка может быть получена разложением по Тейлору в точке α до второй степени включительно. В соответствии с п. 2.1, с. 41, ФД совпадает с энтропией Кульбака - Лейблера - Санова:

$$I(s) = s \ln \frac{s}{\alpha} + (1-s) \ln \frac{1-s}{1-\alpha}, \quad s \in [0, 1].$$

Дифференцируя, имеем:

$$I'(s) = \ln \frac{s}{\alpha} - \ln \frac{1-s}{1-\alpha},$$

$$I''(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s(1-s)},$$

откуда

$$I(\alpha) = 0, \quad I'(\alpha) = 0$$

и, следовательно, искомое разложение

$$I_c(s) = \frac{1}{2} I''(\alpha) (s - \alpha)^2 = \frac{(s - \alpha)^2}{2\alpha(1-\alpha)}. \quad (61)$$

План работы

Вариант задания из $N \in \{1, 2, \dots, 9\}$ определяет значение параметра α как:

$$\alpha = N/10.$$

Следует написать программу, реализующую вычисления:

1. биномиальных вероятностей P_{s_n} для списков $sn=0:n$ (в среде MATLAB) и для значений $n \in \{10, 50, 100, 200, 400\}$ (функция `binopdf(sn, n, p)`);
2. ординат слабой плотности $p_n = n P_{s_n}$;
3. оценки $I_c(s)$ по формуле (28);
4. энтропии Кульбака - Лейблера - Санова.

Содержание отчета по лабораторной работе

1. Расчёты оценок по формулам п. 2.1.
2. Аппроксимация эмпирических данных с помощью ФД и ЦПТ (61).
3. Графики.
4. Анализ точности полученных оценок в зависимости от способа оценки и объема данных
5. Тексты программ на МАТЛАБе.
6. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое функция действия, как она связана с вероятностью события?
2. В чем состоит принцип больших уклонений?
3. Сформулируйте центральную предельную теорему (ЦПТ).
4. В чем состоит принцип локализации?
5. Что такое энтропия Кульбака - Лейблера - Санова?
6. Показать связь ФД и ЦПТ-оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бардушкин В. В. Задания для выполнения лабораторных и индивидуальных работ по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика». – М : НИУ МИЭТ, 2009. – 60с. — Текст : непосредственный.
2. Буре, В. М. Методы прикладной статистики в R и Excel : учебное пособие для вузов / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 152 с. — [URL: https://e.lanbook.com/book/405287](https://e.lanbook.com/book/405287) (дата обращения: 19.05.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — ISBN 978-5-507-47689-3. — Текст : электронный.
3. Вентцель А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. — М. : Наука, 1979. — 424с. — Текст : непосредственный.
4. Дубовик С. А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления. — Текст : непосредственный // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. — № 20(8) — С. 461-471. — DOI:10.17587/mau.20.461-471.
5. Дубовик, С. А. Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза : монография / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов. - 2020. - 248 с. : ил. ; 21 см. - (Научная мысль). - Библиография: с. 235-245. - ISBN 978-5-16-014078-0. - Текст : непосредственный.
6. Зорич В. А. Математический анализ: ч. II / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640с. — Текст : непосредственный.
7. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван ; пер. с англ. — М. : Мир, 1977. - 656 с. - Библиогр.: с. 628-637 - Предм. указ. : с. 638-647. - Текст : непосредственный.
8. Кожевникова, И. А. Стохастическое моделирование процессов : учебник для вузов / И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2025. — 148 с. — (Высшее образование). — URL:

- <https://urait.ru/bcode/563642> (дата обращения: 19.05.2025). — ISBN 978-5-534-09989-8. — Текст : электронный.
9. Коткин Г. Л. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием МАТЛАБ : учебное пособие / Г. Л. Коткин, В. С. Черкасский. — Новосибирск : НГУ, 2001. — 170с.
 10. Лукомский, Ю. А. Навигация и управление движением судов : учебник / Ю. А. Лукомский, В. Г. Пешехонов, Д. А. Скороходов. - СПб. : Элмор, 2002. - 360 с. : ил. - Предм. указ.: с. 354-355. - ISBN 5-7399-0092-1 : Б. ц. - Текст : непосредственный.
 11. Льюнг, Л. Идентификация систем: теория для пользователя / Л. Льюнг ; пер. с англ.: А. С. Мандель, А. В. Назин ; ред. Я. З. Цыпкин. - М. : Наука, 1991. - 432 с. : ил. - Библиогр.: с. 410-429. - Предм. указ.: с. 430-432. - ISBN 5-02-014511-4. - Текст : непосредственный.
 12. Медведев В. С. Control System Toolbox. MatLAB 5 для студентов / В. С. Медведев, В. Г. Потёмкин. — М. : Диалог – МИФИ, 1999. — 288 с. — Текст : непосредственный.
 13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. - 8-е издание. - Москва : Айрис - пресс, 2018. - 287 с. : граф., табл., схемы ; 23 см. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6085-0. - Текст : непосредственный.
 14. Пухальский А. А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 512с.
 15. Пухальский А. А. К теории больших отклонений. — Текст : непосредственный // Теория вероятн. и её применен. — 1993. — Т. 38. — С. 490-497.
 16. Ширяев, А. Н. Вероятность : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Математика", "Прикладная математика", "Физика" / А. Н. Ширяев. - 2-е издание, дополненное и переработанное. - Москва : Наука, 1989. - 640 с. : ил. - Библиография: с. 630-633 (101 назв.). - ISBN 5-02-013955-6. - Текст : непосредственный.

17. Dupuis P. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. Wiley Series in Probability and Statistics / P. Dupuis, R. S. Ellis. A. — New York : John Wiley, 1997. — Text : direct.
18. Fossen T. I. Guidance and Control of Ocean Vehicles. — New York : John Wiley & Sons, 1999. — 480pp. — Text : direct.
19. Shwartz A. Large Deviations for Performance Analysis. Large. Queues, Communication and Computing / Shwartz A., Weiss A. — Princeton : Princeton University, 2018.
20. Touchette H. A basic introduction to large deviations: Theory, applications, simulations / Touchette H. — arXiv: 1106.4146v3 [cond-mat.stat-mech]. — 29 Feb. — 2012.

Учебное издание

**МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ**

Учебное пособие

Составитель: **Дубовик** Сергей Андреевич

В авторской редакции

Изд. № 103/2025. Объем 5 п. л. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,9.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»