

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

ТЕОРИЯ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

Методические указания
к выполнению практических занятий по дисциплине
для магистрантов направления подготовки
09.04.03 «Прикладная информатика»
профиль «Искусственный интеллект и наука о данных»



Севастополь
СевГУ
2025

УДК 519.226.3:004.85(076.5)

ББК 22.17:32.813я73

Т338

Р е ц е н з е н т ы :

К. В. Кротов – д-р техн. наук, профессор кафедры информационных систем

М. В. Заморёнов – канд. техн. наук, доцент кафедры
информационных технологий и компьютерных систем

Ответственный за выпуск:

И. П. Шумейко – канд. физ.-мат. наук, доцент,
заведующий кафедрой информационных систем

Составитель: В. Ю. Карлусов

Т338 Теория байесовских сетей : методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине для магистрантов направления подготовки 09.04.03 «Прикладная информатика» профиль «Искусственный интеллект и наука о данных» / Севастопольский государственный университет; сост.: В. Ю. Карлусов. – Севастополь: СевГУ, 2025. – 33 с. – Текст : электронный.

Цель методических указаний: обеспечить студентов дидактическим материалом для вырабатывания практических навыков расчётов условных вероятностей и потенциалов узлов Байесовских сетей доверия.

УДК 519.226.3:004.85(076.5)

ББК 22.17:32.813я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 07 от 31 марта 2025 г.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании Учёного Совета Института информационных технологий, протокол № 05 от 14 апреля 2025 г.

© Карлусов В. Ю., сост., 2025
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Практическое занятие № 1. Формула полной вероятности и вероятности гипотез	4
2. Практическое занятие № 2. Маргинализация переменных с использованием таблиц условных вероятностей.....	8
3. Практическое занятие № 3. Расширение теоремы Байеса на случай нескольких переменных	13
4. Практическое занятие № 4. Расчёт апостериорных таблиц Байесовской сети в условиях влияния свидетельств	17
5. Практическое занятие № 5. Расчёт таблиц вероятностей с учётом топологии Байесовской сети	23
Заключение	32
Библиографический список	33

ВВЕДЕНИЕ

Байесовские сети являются одним из инструментов, позволяющих изучать явления, обладающие причинно-следственными вероятностными связями.

Вероятностные модели явно учитывают неопределённость, и поэтому имеют немаловажное значение в организации машинного обучения с использованием входных данных, имеющих статистическую структуру, поскольку наличие неопределенностей и причинно-следственных связей в той или иной мере присутствует в большинстве задач, решаемых посредством применения искусственного интеллекта.

Освоение ряда положений теории вероятности, таких как условная вероятность и правило Байеса, положенных в основу теории байесовских сетей как одного из направлений искусственного интеллекта и машинного обучения, в значительной степени поспособствует приобретению необходимых инструментальных компетенций.

Указанные компетенции позволят качественно и адекватно использовать Байесовские сети доверия, оценивать полученные результаты и осмысленно применять их в практической деятельности

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ

1. Цели и задачи занятия

- Повторение разделов теории вероятностей.
- Приобретение практических навыков в расчётах условных вероятностей.
- Приобретения опыта практического применения формулы Байеса.

2. Краткие теоретические сведения

Пусть событие A может появляться вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$, образующих полную группу $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$, тогда вероятность события A определяется по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i), \quad (1)$$

где события $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$ называются гипотезами, а $P(A / H_i)$ — условная вероятность наступления события A при осуществлении i -й гипотезы ($i = 1, 2, \dots, n$).

Полную группу событий $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$ называют пространством гипотез (Рисунок – 1).

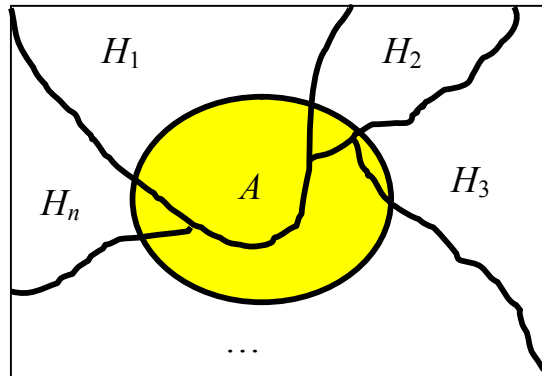


Рисунок 1 – Графическое изображение пространства гипотез

Условная вероятность осуществления гипотезы H_i при условии того, что событие A произошло, определяется по формуле вероятности гипотез, называемой **формулой Байеса**. Эта формула позволяет “пересмотреть” вероятности гипотез после наступления события A):

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)}, \quad (2)$$

где $P(H_i)$ — **априорные** вероятности гипотез H_i ; $P(H_i|A)$ — **апостериорные вероятности** гипотез H_i ($i = 1, 2, \dots, n$); причём

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1, \quad \sum_{i=1}^n P(H_i | A) = 1.$$

3. Пример выполнения заданий

Задача. Есть две ёмкости с белыми и черными шарами. В первой ёмкости 1 белый и 3 черных шара. Во второй ёмкости 3 белых и 1 черный шар. Наудачу выбирается ёмкость, затем из неё последовательно выбираются 2 шара.

- Какова вероятность того, что второй выбранный шар белый?
- Если шар белый, то какова вероятность, что выбрали вторую ёмкость?

Решение. Событие A — выбранный шар белый; гипотеза H_1 — выбрана первая ёмкость, H_2 — выбрана вторая ёмкость.

Построим дерево логического выбора для расчётов (рисунок 2).

Используем формулу полной вероятности, для нашего случая она

выглядит так:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Для вычисления вероятностей, в частности $P(A / H_i)$, воспользуемся обходом дерева.

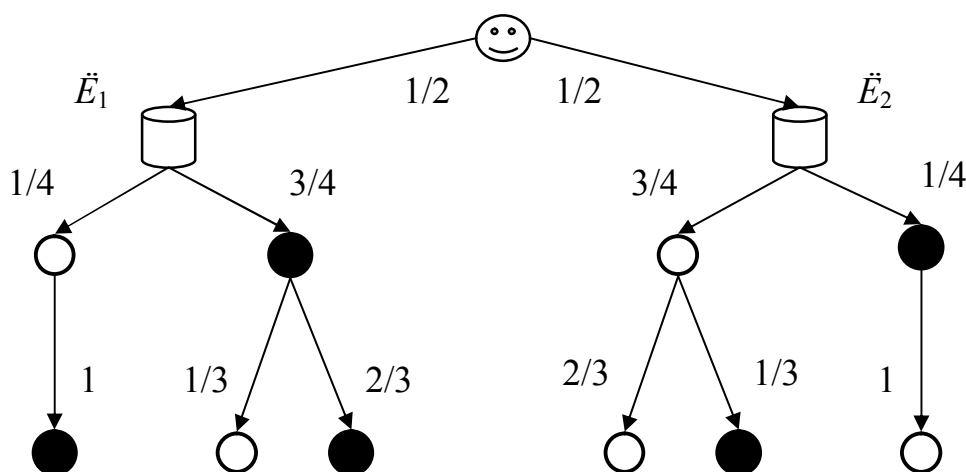


Рисунок 2 – Граф выбора шаров в ходе испытаний

Получим:
$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Значит, вероятность вытащить наудачу вторым белый шар составит 0,5. Зная значение полной вероятности, оценим вероятность, что он вытащен из ёмкости № 2. Согласно формуле Байеса (2)

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

1. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй — 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?

2. Имеются две урны. В первой — семь красных шаров и три черных, во второй — три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

3. В первом ящике из 20 деталей 4 бракованные, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

4. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов — по 20 вопросов, трое — по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность того, что он из тех трех студентов, которые подготовили только по 10 вопросов.

5. Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $P_1 = 0,2$; $P_2 = 0,5$; $P_3 = 0,3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны, соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

6. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах — по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

7. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса — 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

8. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на “хорошую”, “посредственную” и “плохую” и оценивает их вероятности для данного момента времени как 0,15, 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает: с вероятностью 0,6, когда ситуация “хорошая”; с вероятностью 0,3, когда ситуация “посредственная”; с вероятностью 0,1, когда ситуация “плохая”. Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния изменился. Какова вероятность того, что экономика страны на подъёме?

9. Согласно исследованиям аппаратных сбоев компьютерной компании ABC, на одном миллионе компьютеров в течение более 30 суток работы CPU имеет вероятность сбоя 0,02. Если сбой произошел, то вероятность повторного сбоя каждые 5 суток равна 0,3. Если сбоя в первые 30 суток не было, то вероятность сбоя 0,01 каждые 10 суток. Определить вероятность сбоя произвольного компьютера за 60 суток. Если компьютер работает без сбоя через 60 суток, то какова вероятность того, что у него не было сбоя в первые 30 суток.

10. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынимаются наудачу два шара и перекладываются во вторую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

11. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не знает ответа на поставленный вопрос, преподаватель задает ему ещё один, дополнительный. Зачёт ставится, если студент правильно отвечает хотя бы на один вопрос. Какова вероятность получения зачёта?

12. С использованием азбуки Морзе передается сообщение, состоящее из сигналов “точка” и “тире”. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $2/5$ сообщений “точка” и $1/3$ сообщений “тире”. Известно, что среди передаваемых сигналов “точка” и “тире” встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал “точка”; б) принят сигнал “тире”.

13. По каналу связи может быть передана одна из трёх последовательностей букв: XXXX, YYYU, UUUU, причем априорные вероятности каждой из последовательностей есть соответственно $3/10$, $2/5$ и $3/10$. Известно, что под действием шумов вероятность правильного приёма каждой из переданных букв равна $3/5$, а вероятности перевода каждой буквы в любую другую одинаковы и равны $1/5$. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность XXXX, если на приёмном устройстве получена последовательность XYUX.

14. Студент на переэкзаменовке пишет экзамен, длительность которого равна 1 акад. ч. Вероятность того, что студент завершит экзамен менее чем за x акад. ч., равна $x/2$, $0 \leq x \leq 1$. Известно, что по истечении 0,75 акад. ч. студент продолжал работать. Чему равна вероятность того, что студент использует полностью весь час для экзамена?

15. Курс по сердцеждению посещают 4 юноши и 6 девушек третьего года обучения и юношей четвертого года обучения. Сколько в этой группе должно быть девушек четвертого года обучения, чтобы для случайно выбранного студента этой группы пол и год обучения были независимы?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

МАРГИНАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТАБЛИЦ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Цели и задачи занятия

- Освоение алгоритмов маргинализации для случая, когда события и гипотезы представляются множеством переменных.
- Получение практических навыков расчёта.

2. Краткие теоретические сведения

Назовём переменной вероятностный результат некоторого эксперимента. Переменная имеет множество состояний, которые являются друг друга исключающими и исчерпывающими: $\text{sp}(A) = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$.

Неопределённость состояния определяется через распределение вероятностей: $P(A) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, где $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$.

Вероятность того, что A находится в состоянии a_i , обозначается как $P(A = a_i) = x_i$ или $P(a_i) = x_i$, если не вызовет двусмысленности.

Например, для переменной *Кость*, определяющей результат броска игральной кости, пространство состояний будет $\text{sp}(\text{Кость}) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, а распределение вероятностей – $P(\text{Кость}) = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$,

$$P(\text{Кость} = 3) = 1/6, P(3) = 1/6.$$

Пусть переменная B имеет состояния $\text{sp}(B) = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m)$.

Тогда $P(A|B)$ содержит $n \times m$ условных вероятностей $P(a_i|b_j)$, которая может быть представлена в виде матрицы либо таблицы, строки которой соответствуют значениям переменной A , а столбцы ассоциированы с B . При этом соблюдается равенство:

$$\sum_{i=1}^n P(A = a_i | B = b_j) = 1, \forall b_j.$$

Расчёт

$$P(AB) = P(A|B)P(B) \quad (1)$$

при заданном распределении вероятностей $P(B)$ выполняется в соответствии с правилами матричных операций.

События $(a_k, b_1), (a_k, b_2), (a_k, b_r), \dots, (a_k, b_m)$ взаимно независимы, следовательно

$$P(a_k) = \sum_{j=1}^m P(a_k, b_j) \equiv P(A) = \sum_B P(A, B). \quad (2)$$

Преобразование (3) позволяет исключать переменные из рассмотрения и построения совместных вероятностей и называется **маргинализацией**. Аналогичная процедура может быть проведена относительно переменной B :

$$P(b_k) = \sum_{j=1}^n P(a_j, b_k) \equiv P(B) = \sum_A P(A, B). \quad (3)$$

3. Примеры выполнения заданий

Примеры матричного представления условных вероятностей.

Пример 1. Пусть имеется урна. В урне 20 шаров, 3 из которых красные, 10 черные, остальные белые. Вероятность вытащить шар определенного цвета можно записать в виде вектора (одномерной таблицы):

$$P(\text{шар}) = \begin{pmatrix} P(\text{шар} = \text{красный}) \\ P(\text{шар} = \text{белый}) \\ P(\text{шар} = \text{чёрный}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,35 \\ 0,50 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть имеется 3 урны. В первой урне 10 шаров, 3 из которых красные, 2 черные остальные белые. Во второй урне 5 красных, 7 черных и 8 белых шаров. В третьей урне 5 красных, 2 черных и 3 белых шаров. Вероятность вытащить шар определенного цвета из произвольной урны можно представить двумерной таблицей (матрицей).

Введём переменные: $III = \{\kappa, \bar{\sigma}, \chi\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ для компактного представления матрицы

$$P(III|Y) = \begin{pmatrix} P(III = \kappa|y_1) & P(III = \kappa|y_2) & P(III = \kappa|y_3) \\ P(III = \bar{\sigma}|y_1) & P(III = \bar{\sigma}|y_2) & P(III = \bar{\sigma}|y_3) \\ P(III = \chi|y_1) & P(III = \chi|y_2) & P(III = \chi|y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 0,40 & 0,3 \\ 0,2 & 0,35 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Задано матричное (табличное) представление условных вероятностей

$$P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix},$$

	b_1	b_2	b_3
a_1	0,5	0,2	0,3
a_2	0,3	0,3	0,1
a_3	0,1	0,1	0,3
a_4	0,1	0,4	0,3

Пусть распределение вероятностей $P^T(B) = (0,3; 0,3; 0,4)$. Тогда вычисления по формуле (1) дают результат:

$$P(AB) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0,3 & 0,2 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,4 \\ 0,3 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,3 & 0,1 \cdot 0,4 \\ 0,1 \cdot 0,3 & 0,1 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,4 \\ 0,1 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,06 & 0,12 \\ 0,09 & 0,09 & 0,04 \\ 0,03 & 0,03 & 0,12 \\ 0,03 & 0,12 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Маргинализация (2) есть построчное суммирование матрицы $P(AB)$:

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0,15 + 0,06 + 0,12 \\ 0,09 + 0,09 + 0,04 \\ 0,03 + 0,03 + 0,12 \\ 0,03 + 0,12 + 0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,22 \\ 0,18 \\ 0,27 \end{pmatrix}.$$

Маргинализация (3) определяет суммирование матрицы $P(AB)$ по столбцам:

$$P(B) = \begin{pmatrix} 0,15 + 0,09 + 0,3 + 0,03 \\ 0,06 + 0,09 + 0,03 + 0,12 \\ 0,12 + 0,04 + 0,12 + 0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,30 \\ 0,40 \end{pmatrix}.$$

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Заданы: матрица условных вероятностей $P(A|B)$ и распределение вероятностей $P(B)$. Провести операцию маргинализации по переменным A и B .

$$01. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,30 & 0,40 \\ 0,40 & 0,30 & 0,30 \\ 0,40 & 0,20 & 0,20 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,30 \\ 0,40 \end{pmatrix}.$$

$$02. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,37 & 0,19 \\ 0,22 & 0,20 & 0,41 \\ 0,31 & 0,19 & 0,30 \\ 0,32 & 0,24 & 0,10 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,45 \\ 0,30 \end{pmatrix}.$$

$$03. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,23 & 0,17 \\ 0,41 & 0,25 & 0,43 \\ 0,18 & 0,29 & 0,19 \\ 0,28 & 0,23 & 0,21 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,37 \\ 0,40 \\ 0,23 \end{pmatrix}.$$

$$04. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,18 & 0,29 \\ 0,10 & 0,25 & 0,20 \\ 0,13 & 0,27 & 0,31 \\ 0,14 & 0,30 & 0,20 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,66 \\ 0,17 \\ 0,17 \end{pmatrix}.$$

$$05. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,14 & 0,09 \\ 0,33 & 0,22 & 0,43 \\ 0,21 & 0,43 & 0,25 \\ 0,25 & 0,21 & 0,23 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,66 \\ 0,18 \end{pmatrix}.$$

$$06. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,25 & 0,33 \\ 0,27 & 0,55 & 0,25 \\ 0,20 & 0,05 & 0,21 \\ 0,41 & 0,15 & 0,21 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,31 \\ 0,29 \\ 0,40 \end{pmatrix}.$$

$$07. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,29 & 0,15 & 0,27 \\ 0,39 & 0,26 & 0,26 \\ 0,14 & 0,18 & 0,17 \\ 0,18 & 0,41 & 0,30 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,58 \\ 0,34 \\ 0,08 \end{pmatrix}.$$

$$08. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,24 & 0,14 \\ 0,26 & 0,34 & 0,17 \\ 0,19 & 0,22 & 0,19 \\ 0,17 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,62 \\ 0,10 \end{pmatrix}.$$

$$09. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,19 & 0,40 & 0,23 \\ 0,15 & 0,17 & 0,22 \\ 0,30 & 0,14 & 0,41 \\ 0,36 & 0,29 & 0,14 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,48 \\ 0,26 \end{pmatrix}.$$

$$10. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,30 & 0,10 \\ 0,28 & 0,11 & 0,26 \\ 0,23 & 0,31 & 0,18 \\ 0,40 & 0,28 & 0,46 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,09 \\ 0,58 \end{pmatrix}.$$

$$11. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,17 & 0,15 \\ 0,14 & 0,38 & 0,23 \\ 0,41 & 0,03 & 0,33 \\ 0,12 & 0,42 & 0,29 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,34 \\ 0,33 \end{pmatrix}.$$

$$13. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,20 & 0,52 \\ 0,25 & 0,45 & 0,16 \\ 0,25 & 0,18 & 0,16 \\ 0,25 & 0,17 & 0,16 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,58 \\ 0,27 \end{pmatrix}.$$

$$14. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,28 & 0,19 \\ 0,28 & 0,56 & 0,29 \\ 0,32 & 0,03 & 0,36 \\ 0,16 & 0,13 & 0,12 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,14 \\ 0,22 \end{pmatrix}.$$

$$15. P(A|B) = \begin{pmatrix} 0,41 & 0,33 & 0,19 \\ 0,15 & 0,22 & 0,33 \\ 0,12 & 0,26 & 0,19 \\ 0,32 & 0,19 & 0,29 \end{pmatrix}; P(B) = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,14 \\ 0,41 \end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3 РАСШИРЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БАЙЕСА НА СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Цели и задачи занятия

- Освоение процедур расчёта условных вероятностей на случай многих переменных.
- Получение и закрепление практических навыков проведения расчётов.

2. Краткие теоретические сведения

Правило Байеса для событий также можно распространить на переменные. Например, для трёх переменных A , B и C справедливы выражения:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{P(A,B)}{\sum_B P(A,B)}, \quad (1)$$

$$P(B | A, C) = \frac{P(B | C)P(A | B, C)}{P(A | C)} = \frac{P(A, B | C)}{P(A | C)} = \frac{P(A, B | C)}{\sum_B P(A, B | C)}. \quad (2)$$

В знаменателях выражений (1) и (2) в последних, левых дробях стоят результаты маргинализации по соответствующим переменным.

Пусть имеется несколько переменных A , B , C , определённых на соответствующих множествах состояний. Если переменные A и B безусловно независимы, то справедливо $P(AB) = P(A|B)P(B)$, а для условно (от переменной C) независимых переменных формула примет вид:

$$P(AB|C) = P(A|B, C)P(B|C). \quad (3)$$

Две переменные A и C являются **условно независимыми относительно переменной B** , если выполняется условие: $P(a_i|c_k, b_j) = P(a_i|b_j)$, $\forall \{a_i \in \text{sp}(A), b_j \in \text{sp}(B), c_k \in \text{sp}(C)\}$, то есть $P(A|C, B) = P(A|B)$

Последняя запись означает, что когда состояние B известно, никакое знание C не изменит вероятности A . Требуется, чтобы утверждение независимости выполнялось для каждого состояния B . Если набор условий пуст, то мы говорим, что A и C маргинально независимы или просто независимы:

$$P(A|C) = P(A).$$

Если две переменные A и C являются условно независимыми относительно данной переменной B , тогда условную независимость можно переписать так:

$$P(A, C|B) = P(A|B, C) \times P(C|B) = P(A|B) \times P(C|B). \quad (4)$$

ВАЖНО. Умножение матриц выполняется поэлементно (не как определено в линейной алгебре) в соответствии с правилами построения декартового произведения: $P(a_i, c_k|b_j) = P(a_i|b_j) \otimes P(c_k|b_j)$

3. Пример выполнения заданий

Пусть были заданы распределение вероятностей $P^T(B) = (0,3; 0,3; 0,4)$ и условное распределение

$$P(A | B) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

В результате (см. пример к практическому занятию № 2) нами было получено

$$P(AB) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,06 & 0,12 \\ 0,09 & 0,09 & 0,04 \\ 0,03 & 0,03 & 0,12 \\ 0,03 & 0,12 & 0,12 \end{pmatrix},$$

а затем, в ходе маргинализации

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,22 \\ 0,18 \\ 0,27 \end{pmatrix} \text{ и } P(B) = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,30 \\ 0,40 \end{pmatrix}.$$

Пусть, также, известно условное распределение

$$P(C|B) = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,90 & 0,30 \\ 0,05 & 0,05 & 0,20 \\ 0,75 & 0,05 & 0,50 \end{pmatrix}.$$

Применение (1) даёт следующее

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,33} & \frac{0,3 \cdot 0,3}{0,22} & \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,18} & \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,27} \\ \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,33} & \frac{0,3 \cdot 0,3}{0,22} & \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,18} & \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,27} \\ \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3} & \frac{0,4 \cdot 0,1}{0,4 \cdot 0,1} & \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3} & \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,454 & 0,409 & 0,167 & 0,111 \\ 0,182 & 0,409 & 0,167 & 0,444 \\ 0,364 & 0,182 & 0,666 & 0,445 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для расчётов в случае условной независимости:

$$\begin{aligned}
 P(A, C | B) &= P(A|B)P(C | B) = \\
 &\left\{ \begin{aligned} &(0.20 \cdot 0.5 \quad 0.20 \cdot 0.3 \quad 0.20 \cdot 0.1 \quad 0.20 \cdot 0.1) \\ &(0.05 \cdot 0.5 \quad 0.05 \cdot 0.3 \quad 0.05 \cdot 0.1 \quad 0.05 \cdot 0.1) \\ &(0.75 \cdot 0.5 \quad 0.75 \cdot 0.3 \quad 0.75 \cdot 0.1 \quad 0.75 \cdot 0.1) \end{aligned} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(0.90 \cdot 0.2 \quad 0.90 \cdot 0.3 \quad 0.90 \cdot 0.1 \quad 0.90 \cdot 0.4) \\ &(0.05 \cdot 0.2 \quad 0.05 \cdot 0.3 \quad 0.05 \cdot 0.1 \quad 0.05 \cdot 0.4) \\ &(0.05 \cdot 0.2 \quad 0.05 \cdot 0.3 \quad 0.05 \cdot 0.1 \quad 0.05 \cdot 0.4) \end{aligned} \right\} \\
 &\left\{ \begin{aligned} &(0.3 \cdot 0.3 \quad 0.3 \cdot 0.1 \quad 0.3 \cdot 0.3 \quad 0.3 \cdot 0.3) \\ &(0.2 \cdot 0.3 \quad 0.2 \cdot 0.1 \quad 0.2 \cdot 0.3 \quad 0.2 \cdot 0.3) \\ &(0.5 \cdot 0.3 \quad 0.5 \cdot 0.1 \quad 0.5 \cdot 0.3 \quad 0.5 \cdot 0.3) \end{aligned} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &(0.100 \quad 0.060 \quad 0.020 \quad 0.020) \\ &(0.025 \quad 0.015 \quad 0.005 \quad 0.005) \\ &(0.375 \quad 0.225 \quad 0.075 \quad 0.075) \end{aligned} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(0.18 \quad 0.270 \quad 0.090 \quad 0.36) \\ &(0.01 \quad 0.015 \quad 0.005 \quad 0.02) \\ &(0.01 \quad 0.015 \quad 0.005 \quad 0.02) \end{aligned} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(0.09 \quad 0.03 \quad 0.09 \quad 0.09) \\ &(0.06 \quad 0.02 \quad 0.06 \quad 0.06) \\ &(0.15 \quad 0.05 \quad 0.15 \quad 0.15) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Указания использовать для расчётов полученные ранее (на практическом занятии № 2) исходные данные и результаты.

$$\begin{aligned}
 01. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,10 & 0,12 & 0,33 \\ 0,56 & 0,28 & 0,45 \\ 0,34 & 0,60 & 0,22 \end{pmatrix} . & 02. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,17 & 0,29 & 0,37 \\ 0,57 & 0,31 & 0,44 \\ 0,26 & 0,40 & 0,19 \end{pmatrix} . \\
 03. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,11 & 0,19 & 0,48 \\ 0,53 & 0,29 & 0,26 \\ 0,36 & 0,52 & 0,28 \end{pmatrix} . & 04. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,52 & 0,17 & 0,48 \\ 0,43 & 0,42 & 0,18 \\ 0,05 & 0,41 & 0,46 \end{pmatrix} . \\
 05. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,14 & 0,33 & 0,50 \\ 0,61 & 0,28 & 0,30 \\ 0,25 & 0,39 & 0,20 \end{pmatrix} . & 06. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,17 & 0,24 & 0,11 \\ 0,33 & 0,19 & 0,50 \\ 0,50 & 0,57 & 0,39 \end{pmatrix} . \\
 07. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,20 & 0,17 & 0,53 \\ 0,28 & 0,23 & 0,22 \\ 0,52 & 0,60 & 0,25 \end{pmatrix} . & 08. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,13 & 0,14 & 0,31 \\ 0,62 & 0,28 & 0,23 \\ 0,25 & 0,58 & 0,46 \end{pmatrix} . \\
 09. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,21 & 0,15 & 0,29 \\ 0,33 & 0,28 & 0,52 \\ 0,46 & 0,57 & 0,19 \end{pmatrix} . & 10. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,33 & 0,27 & 0,18 \\ 0,38 & 0,56 & 0,28 \\ 0,29 & 0,17 & 0,54 \end{pmatrix} . \\
 11. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,08 & 0,48 & 0,34 \\ 0,77 & 0,04 & 0,33 \\ 0,15 & 0,48 & 0,33 \end{pmatrix} . & 12. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,24 & 0,40 & 0,09 \\ 0,58 & 0,15 & 0,70 \\ 0,18 & 0,45 & 0,21 \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,17 & 0,51 & 0,10 \\ 0,82 & 0,18 & 0,26 \\ 0,01 & 0,31 & 0,64 \end{pmatrix}. & 14. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,20 & 0,31 & 0,07 \\ 0,66 & 0,16 & 0,59 \\ 0,14 & 0,53 & 0,34 \end{pmatrix}. \\
 15. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,11 & 0,33 & 0,23 \\ 0,21 & 0,22 & 0,31 \\ 0, & 0,45 & 0,46 \end{pmatrix}. & 16. P(C | B) &= \begin{pmatrix} 0,22 & 0,25 & 0,21 \\ 0,42 & 0,65 & 0,33 \\ 0,36 & 0,10 & 0,46 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

РАСЧЁТ АПОСТЕРИОРНЫХ ТАБЛИЦ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ В УСЛОВИЯХ ВЛИЯНИЯ СВИДЕТЕЛЬСТВ

1. Цели и задачи занятия

- Освоение алгоритмов пересчёта таблиц апостериорных вероятностей при получении свидетельств о значениях переменных.
- Получение практических навыков расчёта таблиц условной вероятности Байесовской сети при наличии свидетельств в её узлах.

2. Краткие теоретические сведения

Под термином “**Свидетельство**” (**evidence**) понимают сведение о принятии переменной, соответствующей узлу Байесовской сети, какого-либо значения из множества возможных.

Появление свидетельств в Байесовской сети приводит к изменению апостериорных вероятностей реализаций гипотез и принятия переменными на множестве значений тех или иных реализаций.

Указанные вероятностные распределения необходимо пересчитывать, учитывая причинно-следственные связи и таблицы априорных вероятностей.

Пересчёты выполняются на основании расширенной формы теоремы Байеса, которые рассмотрены нами ранее. Алгоритмы пересчёта имеют вид:

$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(A)} = \frac{P(A, B)}{P(A)} = \frac{P(A, B)}{\sum_B P(A, B)}, \quad (1)$$

$$P(B | A, C) = \frac{P(B | C)P(A | B, C)}{P(A | C)} = \frac{P(A, B | C)}{P(A | C)} = \frac{P(A, B | C)}{\sum_B P(A, B | C)}. \quad (2)$$

Иногда вычисления удобно проводить в алгебре потенциалов.

Под потенциалом в Байесовских сетях понимают аналог таблицы совместных вероятностей $P(X_1, X_2, \dots, X_k | Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, он определяется как $\varphi: \text{sp}(X) \rightarrow R$,

где sp – множество состояний.

Умножение потенциалов имеет следующие свойства:

- $\text{dom}(\varphi_1 \varphi_2) = \text{dom}(\varphi_1) \cup \text{dom}(\varphi_2)$.
- Коммутативный закон: $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \varphi_1$.
- Ассоциативный закон: $(\varphi_1 \varphi_2) \varphi_3 = \varphi_1 (\varphi_2 \varphi_3)$.
- Существует потенциал единицы, который определяется как $1 \times \varphi = \varphi$ для всех потенциалов φ .

где $\text{dom}(\varphi)$ – область потенциала.

Потенциалы могут подвергаться маргинализации: $\sum_A \varphi$ есть потенциал над $\text{dom}(\varphi) \setminus \{A\}$, а сама операция маргинализации коммутативна $\sum_A \sum_B \varphi = \sum_B \sum_A \varphi$ и дистрибутивна: если $A \notin \text{dom}(\varphi_1)$, тогда $\sum_A \varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \sum_A \varphi_2$.

Алгоритмы действий над потенциалами иллюстрируются ниже

	a_1	a_2
b_1	x_1	x_2
b_2	x_3	x_4

$\varphi_1(A, B)$

	c_1	c_2
b_1	y_1	y_2
b_2	y_3	y_4

$\varphi_2(C, B)$

	a_1	a_2
b_1	$(x_1 y_2, x_1 y_2)$	$(x_2 y_1, x_2 y_2)$
b_2	$(x_3 y_3, x_3 y_4)$	$(x_4 y_3, x_4 y_4)$

$\varphi_1(A, B) \cdot \varphi_2(C, B)$

	a_1	a_2
b_1	$(x_1 y_1 + x_1 y_2)$	$(x_2 y_1 + x_2 y_2)$
b_2	$(x_3 y_3 + x_3 y_4)$	$(x_4 y_3 + x_4 y_4)$

$\sum_C \varphi_1(A, B) \cdot \varphi_2(C, B)$

	$(y_1 + y_2)$
b_1	$(y_1 + y_2)$
b_2	$(y_3 + y_4)$

$\sum_C \varphi_2(C, B)$

	a_1	a_2
b_1	$x_1 \cdot (y_1 + y_2)$	$x_2 \cdot (y_1 + y_2)$
b_2	$x_3 \cdot (y_3 + y_4)$	$x_4 \cdot (y_3 + y_4)$

$\varphi_1(A, B) \cdot \sum_C \varphi_2(C, B)$

3. Пример выполнения заданий

Заданы переменные A , B и C и их вероятностными характеристиками. В ходе испытаний были получены свидетельства $A = a_2$ и $C = c_1$.

Необходимо вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(B | a_2, c_1)$.

Таблица 1 – Вероятностные характеристики переменных

	b_1	b_2	b_3
a_1	(0,00 0,05 0,05)	(0,05 0,05 0,00)	(0,05 0,05 0,05)
a_2	(0,10 0,10 0,00)	(0,10 0,00 0,10)	(0,20 0,00 0,05)

Ячейке таблицы числа соответствуют c_1 , c_2 и c_3 .

1-й способ.

По результатам опыта мы выбираем вторую строку (a_2) и первые (c_1) элементы в каждой тройке второй строки: $P(a_2, B, c_1) = \{0.10, 0.10, 0.20\}$. Проводим вычисления

$$P(B | a_2, c_1) = \frac{P(a_2, B, c_1)}{P(a_2, c_1)} = \frac{P(a_2, B, c_1)}{\sum_B P(a_2, B, c_1)} =$$

$$= \frac{(0.1 \quad 0.1 \quad 0.2)}{0.1 + 0.1 + 0.2} = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \right).$$

2-й способ

Преобразуем $P(a_2, B, c_1)$ в распределение вероятностей путём нормализации распределение, деля каждое число на сумму всех чисел.

$$P(B | a_2, C) = \frac{P(a_2, B, C)}{P(a_2, C)}.$$

$$P(a_2, C) = \{0.1 + 0.1 + 0.2; 0.1 + 0.0 + 0.0; 0.0 + 0.1 + 0.05\} = \{0.4; 0.1; 0.2\}$$

Вычисляем $P(a_2, B, C)$

	b_1	b_2	b_3
c_1	0.10	0.10	0.20
c_2	0.10	0.00	0.00
c_3	0.00	0.10	0.05

Вычисляем $P(B|a_2, C)$:

	b_1	b_2	b_3
c_1	$0.10 : 0.40 = 0.25$	$0.10 : 0.40 = 0.25$	$0.20 : 0.40 = 0.50$
c_2	$0.10 : 0.10 = 1.00$	$0.00 : 0.10 = 0.00$	$0.00 : 0.10 = 0.00$
c_3	$0.00 : 0.15 = 0.00$	$0.10 : 0.15 = 2/3$	$0.05 : 0.15 = 1/3$

Поскольку имела реализация c_1 , выбирается 1-я строка, что соответствует набору вероятностей $P(B|a_2, C) = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \right)$.

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

1. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

2. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = c_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

3. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_3$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

4. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = c_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

5. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = c_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

6. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = c_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,00 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,05)	(0,10 0,10 0,10)	(0,20 0,05 0,00)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

7. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

8. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

9. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_3$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

10. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

11. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

12. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_3$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)
x_2	(0,10 0,10 0,10)	(0,05 0,10 0,10)	(0,05 0,05 0,20)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

13. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

14. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

15. Получены свидетельства $X = x_i = x_1$ и $Z = z_j = z_3$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

16. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_1$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

17. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_2$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

18. Получены свидетельства $X = x_i = x_2$ и $Z = z_j = z_3$. Вычислить таблицу апостериорных вероятностей $P(Y | x_i, z_j)$. Вероятностные характеристики переменных X , Y и Z :

	y_1	y_2	y_3
x_1	(0,05 0,05 0,20)	(0,05 0,10 0,10)	(0,10 0,10 0,10)
x_2	(0,05 0,05 0,05)	(0,10 0,10 0,05)	(0,05 0,05 0,05)

В ячейке таблицы числа соответствуют z_1, z_2 и z_3 .

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

РАСЧЁТ ТАБЛИЦ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С УЧЁТОМ ТОПОЛОГИИ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ

1. Цели и задачи занятия

- Приобретение компетенций в использовании цепного правила Байесовской сети.
- Закрепление навыков расчётов таблиц условных вероятностей в зависимости от конфигурации Байесовской сети.
- Усовершенствование навыков расчётов, проводимых в Байесовских сетях.

2. Краткие теоретические сведения

Расчёт и пересчёт таблиц условных вероятностей для Байесовской сети осуществляется с использованием общего правила цепи и цепного правила Байесовской сети.

Общее правило цепи. Пусть $U = \{A_1, \dots, A_n\}$ – множество переменных. Тогда для любого распределения вероятностей $P(U)$ будет справедливо:

$$P(U) = P(A_n | A_1, \dots, A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1, \dots, A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1).$$

Цепное правило для байесовских сетей (The Chain Rule for Bayesian Networks) задаётся в виде конструктивной теоремы.

Теорема. Пусть BN – байесовская сеть над $U = \{A_1, \dots, A_n\}$. Тогда BN задаёт уникальное совместное распределение вероятностей $P(U)$, заданное произведением всех таблиц условной вероятностей, указанных в BN :

$$P(U) = \prod_{j=1}^n P[A_j | \text{pa}(A_j)],$$

где $\text{pa}(A_j)$ – родители A_j в BN , а $P(U)$ отражает вероятностные свойства Байесовской сети.

3. Пример выполнения заданий

Имеется Байесовская сеть, представленная на рисунке 1, со следующими переменными и множествами принимаемых ими значений:

- $\text{sp}(T) = (0, 1)$,
- $\text{sp}(S) = (0, 1)$,
- $\text{sp}(D) = (0, 1, 2)$,
- $\text{sp}(Z) = (0, 1)$.

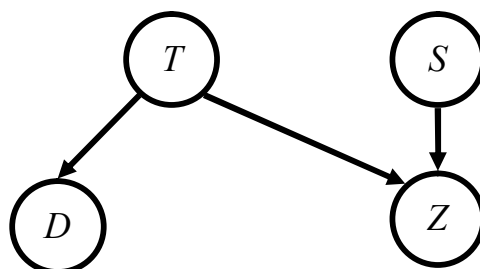


Рисунок 1 – Байесовская сеть

Заданы маргинальные вероятности для переменных T и S :

$$P(T = 0) = 0,98; P(T = 1) = 0,02;$$

$$P(S = 0) = 0,96; P(S = 1) = 0,04$$

и рассчитаны таблицы условных вероятностей для переменных S и Z .

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,39	0,001
$D = 1$	0,60	0,001
$D = 2$	0,01	0,998

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,99	0,00	0,01	0,00
$Z = 1$	0,01	1,00	0,99	1,00

Совместную таблицу вероятностей будем рассчитывать по правилу цепочки для байесовских сетей:

$$P(T, S, D, Z) = P(T)P(S)P(D|T)P(Z|T, S).$$

Выполним расчёт всех возможных комбинаций случаев при различных значениях маргинальных вероятностей и таблиц условных вероятностей (ТУВ) для ситуации, когда $Z = 1$.

$$P(T = 0, S = 0, D = 2, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,39 \cdot 0,01 = 0,00367;$$

$$P(T = 0, S = 0, D = 1, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,60 \cdot 0,01 = 0,00565;$$

$$P(T = 0, S = 0, D = 2, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = 0,00009;$$

$$P(T = 0, S = 1, D = 2, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,04 \cdot 0,39 \cdot 0,99 = 0,01514;$$

$$P(T = 0, S = 1, D = 1, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,04 \cdot 0,60 \cdot 0,99 = 0,02328;$$

$$P(T = 0, S = 1, D = 2, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,04 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 0,00039;$$

$$P(T = 1, S = 0, D = 2, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,96 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,00002;$$

$$P(T = 1, S = 0, D = 1, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,96 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,00002;$$

$$P(T = 1, S = 0, D = 2, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,96 \cdot 0,998 \cdot 1 = 0,01916;$$

$$P(T = 1, S = 1, D = 2, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,04 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,0;$$

$$P(T = 1, S = 1, D = 1, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,04 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,0;$$

$$P(T = 1, S = 1, D = 2, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,04 \cdot 0,998 \cdot 1 = 0,00080.$$

Для того, чтобы определить вероятность того, что $S = 0$, и, при том, $Z = 1$, просуммируем соответствующие строки.

$$P(S = 0, Z = 1) = 0,00367 + 0,00565 + 0,00009 + 0,00002 + 0,00002 + 0,01916 = 0,02861.$$

Аналогично для случая, когда $S = 1$ и $Z = 1$:

$$P(S = 1, Z = 1) = 0,01514 + 0,00233 + 0,00039 + 0,0 + 0,0 + 0,0008 = 0,03961.$$

Пусть переменная Z получила свидетельство “1”.

$$P(S = 0 \mid Z = 1) = 0,02861 / (0,02861 + 0,03961) = 0,02861 / 0,06822 = 0,419;$$

$$P(S = 1 \mid Z = 1) = 0,03961 / (0,02861 + 0,03961) = 0,03961 / 0,06822 = 0,581.$$

Пусть $D = 1$. Переменная Z получила свидетельство “1”. Переменная S получила свидетельство “1”.

$$P(T = 0, S = 0, D = 1, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,6 \cdot 0,01 = 0,00565;$$

$$P(T = 1, S = 0, D = 1, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,96 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,00002;$$

$$P(T = 0, S = 1, D = 1, Z = 1) = 0,98 \cdot 0,04 \cdot 0,6 \cdot 0,99 = 0,02328;$$

$$P(T = 1, S = 1, D = 1, Z = 1) = 0,02 \cdot 0,04 \cdot 0,001 \cdot 1 = 0,0;$$

$$P(S = 1 \mid Z = 1) = 0,02328 / (0,00567 + 0,02328) = 0,02328 / 0,02895 = 0,8041 - \text{вероятность, того что } Z = 1 \text{ вследствие } S = 1.$$

$$P(S = 0 \mid Z = 1) = 0,00567 / (0,00567 + 0,02328) = 0,00567 / 0,02895 = 0,1959 - \text{в противоположном случае.}$$

4. Упражнения для аудиторной и самостоятельной работы

Общее задание: выполнить полный расчёт Байесовской сети доверия, показанной на рисунке 1 при следующих исходных данных виде маргинальных и условных вероятностей.

1.

$$P(T = 0) = 0,85; P(T = 1) = 0,15;$$

$$P(S = 0) = 0,10; P(S = 1) = 0,90.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,30	0,06
$D = 1$	0,60	0,04
$D = 2$	0,10	0,90

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,90	0,85	0,22	0,00
$Z = 1$	0,10	0,15	0,78	1,00

2.

$$P(T = 0) = 0,75; P(T = 1) = 0,25;$$

$$P(S = 0) = 0,20; P(S = 1) = 0,80.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,30	0,16
$D = 1$	0,65	0,14
$D = 2$	0,05	0,70

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,85	0,75	0,67	0,05
$Z = 1$	0,15	0,25	0,33	0,95

3.

$$P(T = 0) = 0,65; P(T = 1) = 0,35;$$

$$P(S = 0) = 0,25; P(S = 1) = 0,75.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,30	0,25
$D = 1$	0,30	0,45
$D = 2$	0,40	0,30

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,75	0,63	0,23	0,10
$Z = 1$	0,25	0,37	0,77	0,90

4.

$$P(T = 0) = 0,11; P(T = 1) = 0,89;$$

$$P(S = 0) = 0,83; P(S = 1) = 0,17.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,37	0,66
$D = 1$	0,23	0,17
$D = 2$	0,40	0,17

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,75	0,63	0,23	0,10
$Z = 1$	0,25	0,37	0,77	0,90

5.

$$P(T = 0) = 0,83; P(T = 1) = 0,17;$$

$$P(S = 0) = 0,09; P(S = 1) = 0,91.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,37	0,66
$D = 1$	0,23	0,17
$D = 2$	0,40	0,17

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,13	0,57	0,11	0,15
$Z = 1$	0,87	0,43	0,89	0,85

6.

$$P(T = 0) = 0,08; P(T = 1) = 0,92;$$

$$P(S = 0) = 0,33; P(S = 1) = 0,67.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,16	0,31
$D = 1$	0,66	0,29
$D = 2$	0,18	0,40

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,31	0,16	0,15	0,25
$Z = 1$	0,69	0,84	0,85	0,75

7.

$$P(T = 0) = 0,15; P(T = 1) = 0,85;$$

$$P(S = 0) = 0,80; P(S = 1) = 0,20.$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,58	0,28
$D = 1$	0,34	0,62
$D = 2$	0,08	0,10

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,98	0,85	0,28	0,30
$Z = 1$	0,11	0,15	0,72	0,70

8.

$$P(T=0) = 0,12; P(T=1) = 0,88;$$

$$P(S=0) = 0,86; P(S=1) = 0,14$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,26	0,33
$D=1$	0,48	0,09
$D=2$	0,26	0,58

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,45	0,23	0,75	0,68
$Z=1$	0,55	0,77	0,25	0,32

9.

$$P(T=0) = 0,09; P(T=1) = 0,91;$$

$$P(S=0) = 0,82; P(S=1) = 0,18$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,14	0,33
$D=1$	0,61	0,28
$D=2$	0,25	0,39

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,20	0,16	0,27	0,12
$Z=1$	0,80	0,84	0,73	0,88

10.

$$P(T=0) = 0,14; P(T=1) = 0,86;$$

$$P(S=0) = 0,31; P(S=1) = 0,69$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,17	0,24
$D=1$	0,33	0,19
$D=2$	0,50	0,57

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,82	0,21	0,71	0,15
$Z=1$	0,18	0,79	0,29	0,85

11.

$$P(T=0) = 0,61; P(T=1) = 0,39;$$

$$P(S=0) = 0,53; P(S=1) = 0,47$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,11	0,20
$D=1$	0,59	0,28
$D=2$	0,39	0,52

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,05	0,85	0,17	0,81
$Z=1$	0,95	0,15	0,83	0,19

12.

$$P(T=0) = 0,23; P(T=1) = 0,77;$$

$$P(S=0) = 0,27; P(S=1) = 0,73$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,17	0,53
$D=1$	0,23	0,22
$D=2$	0,60	0,25

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,15	0,34	0,55	0,18
$Z=1$	0,85	0,66	0,45	0,82

13.

$$P(T=0) = 0,14; P(T=1) = 0,86;$$

$$P(S=0) = 0,68; P(S=1) = 0,32$$

$P(D T)$	$T=0$	$T=1$
$D=0$	0,13	0,58
$D=1$	0,25	0,14
$D=2$	0,62	0,28

$P(Z T, S)$	$S=0$		$S=1$	
	$T=0$	$T=1$	$T=0$	$T=1$
$Z=0$	0,07	0,57	0,35	0,71
$Z=1$	0,93	0,43	0,65	0,29

14.

$$P(T = 0) = 0,97; P(T = 1) = 0,03;$$

$$P(S = 0) = 0,23; P(S = 1) = 0,77$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,31	0,29
$D = 1$	0,23	0,52
$D = 2$	0,46	0,19

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,60	0,22	0,84	0,41
$Z = 1$	0,40	0,78	0,16	0,59

15.

$$P(T = 0) = 0,44; P(T = 1) = 0,56;$$

$$P(S = 0) = 0,73; P(S = 1) = 0,27$$

$P(D T)$	$T = 0$	$T = 1$
$D = 0$	0,33	0,26
$D = 1$	0,28	0,57
$D = 2$	0,39	0,17

$P(Z T, S)$	$S = 0$		$S = 1$	
	$T = 0$	$T = 1$	$T = 0$	$T = 1$
$Z = 0$	0,46	0,88	0,90	0,79
$Z = 1$	0,54	0,12	0,10	0,21

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

“Наука выполняет свою задачу не тем, что объясняет причины появления пятен на солнце, а тем, что выясняет законы нашей собственной жизни и последствия их нарушения”

*Дж. Рёскин
(1819 – 1900, теоретик искусства, публицист)*

Вероятностные модели явно учитывают неопределённость, которая обусловлена нашими представлениями о явлениях и процессах, происходящих вокруг, когда что-то “идёт не по правилам”. Поэтому такие модели вносят весомый вклад в процессы машинного обучения, ибо наша точка зрения на устройство мира всегда будет находиться в границах принятых моделей бизнес-процессов и результатов их мониторинга.

Построение вероятностных моделей в виде Байесовских сетей доверия требует хорошего знания предметной области и изрядных вычислительных мощностей для проведения расчётов. И того, и другого, зачастую, недостаёт. Вследствие этого, всегда будет иметь место разумный компромисс между числом переменных в модели, её топологией и адекватностью моделируемому явлению.

Отдельно следует выделить общее место применимости методов математического моделирования на практике: сбор статистики на объекте моделирования. Лицам, эксплуатирующим объект, как правило, есть чем заняться, помимо этого, им бывает порою трудно втолковать, какие данные и с какой периодичностью следует регистрировать. Эти моменты следует рассматривать как общее “универсальное” препятствие на пути внедрения будь-какой инновации на местах, связанной с математическими моделями, основанными на статистических данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Печатные издания

1. Басакер Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука, 1974. – 368 с. — Текст : непосредственный.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — изд. 8-е, испр. и доп. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с. — Текст : непосредственный.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. — изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с. — Текст : непосредственный.
4. Тулупьев А. Л. Основы теории байесовских сетей : учебник / А. Л. Тулупьев, С. И. Николенко, А. В. Сироткин. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. — 399 с. — ISBN 978-5-288-05892-9. — Текст : непосредственный.

Электронные ресурсы

5. Гончаров М. Байесовские сети / Гончаров М. — URL: <http://www.businessdataanalytics.ru/download/BayesianNetworks.pdf> (дата обращения: 11.03.2025).
6. Дауни, А. Б. Байесовские модели / А. Б. Дауни ; перевод с английского В. А. Яроцкого. — Москва : ДМК Пресс, 2018. — 182 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/131695> (дата обращения: 11.03.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — ISBN 978-5-97060-664-3. — Текст : электронный.
7. Карпов, Д. В. Теория графов / Д. В. Карпов. — URL: https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf (дата обращения: 11.03.2025). — Текст : электронный.
8. Ромов П. Обучение структуры байесовских сетей при помощи пакета bnlearn системы R /П. Ромов — URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/5/58/Practice_Romov_R_bnlearn.pdf (дата обращения: 11.03.2025). — Текст : электронный.
9. Barber D. Bayesian Reasoning and Machine Learning / D. Barber. — URL: <http://web4.cs.ucl.ac.uk/staff/D.Barber/textbook/090310.pdf> (дата обращения: 11.03.2025). — Текст : электронный.
10. Barber D. Machine Learning. A Probabilistic Approach / D. Barber. — URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/7bc7/54bc548f32b9ac53df67e3171e8e4df66d15.pdf> (дата обращения: 11.03.2025). — Текст : электронный.

ТЕОРИЯ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ

Методические указания

Составитель: **Карлусов** Вадим Юрьевич

В авторской редакции

Изд. № 108/2025. Объем 2,25 п. л. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,205.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»