

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Информационная безопасность»

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
для обучающихся очной
и очно-заочной форм обучения
по направлению
10.03.01 «Информационная безопасность»

Севастополь
СевГУ
2025

УДК 004.056.5:519.72(075.8)
ББК 32.973-018.2:22.18я73
Т338

Р е ц е н з е н т :

Ю. Ю. Эндржикиевич - д-р. техн. наук, доцент,
профессор кафедры «Информационная безопасность»

Составитель: Е. А. Контылева

Т338 Теория информации в информационной безопасности : учебно-методическое пособие для обучающихся очной и очно-заочной форм обучения по направлению 10.03.01 «Информационная безопасность» / Севастопольский государственный университет; сост. Е. А. Контылева. – Севастополь : СевГУ, 2025. – 30 с. – Текст : электронный.

Рассмотрены основные понятия множеств, булевой алгебры, графов, числовых рядов и Рядов Фурье. Данное пособие может быть использовано для самостоятельной подготовки студентов очной и очно-заочной форм обучения направления подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность».

УДК 004.056.5:519.72(075.8)
ББК 32.973-018.2:22.18я73

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Информационная безопасность», протокол № 9 от 27 марта 2025 г.

© Контылева Е. А., сост., 2025
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Множества и их свойства.....	5
1.1.Операции над множествами.....	5
1.2. Диаграммы Эйлера - Венна.....	5
1.3. Свойства операций над множествами.....	6
1.4. Отношения.....	6
2. Булева функция: определение и свойства.....	7
2.1. Основные равносильности.....	8
2.2. Дополнительные равносильности.....	9
3. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальная форма булевой функции.....	10
3.1. Элементарные канонические формы.....	10
3.2. Нормальные формы формул.....	10
3.3. Приведение формул к нормальным формам.....	10
4. Карты Карно.....	11
4.1. Принцип минимизации.....	11
4.2. Порядок работы с картой Карно.....	13
4.3. Принципы склейки.....	14
4.4. Описание.....	15
5. Графы и их свойства. Маршруты, пути и циклы в графах.....	16
5.1. Типы графов.....	17
5.2. Изоморфизм графов.....	18
5.3. Способы задания графа.....	18
5.4. Маршрут, путь, цепь в графе.....	19
6. Числовые ряды и их свойства.Признаки сходимости числовых рядов.....	21
6.1. Числовые ряды – основные понятия и теоремы.....	21
6.2. Необходимый признак сходящегося знакопостоянного ряда.....	23
6.3. Достаточные условия сходимости знакопостоянного ряда.....	24
6.4. Признак Даламбера. Признак Коши. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда (признак Лейбница).....	24
6.5. Функциональные ряды.....	25
6.6. Степенной ряд.....	25
6.7. Необходимый признак сходимости числового ряда.....	26
7. Ряд Фурье.....	28
Список использованной литературы.....	30

ВВЕДЕНИЕ

Разделы, рассматриваемые в данном учебно-методическом пособии, остаются наиболее динамичной областью знаний. Сегодня значимой областью применения дискретной математики является область информационной безопасности и компьютерной безопасности. Модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках.

Методы дискретной математики пригодны для описания и последующего конструктивного анализа многих проблемных ситуаций и позволяют при необходимости активно использовать современную вычислительную технику, новые информационные технологии. Важность владения знаниями дискретной математики обусловлена тем, что современная информационная техника обработки информации базируется на дискретных представлениях.

Цель данного учебного пособия – дать необходимый теоретический материал с примерами для практических занятий и домашних заданий.

Студенту необходимо понимать и уметь выбирать современные информационные технологии и программные средства, в том числе отечественного производства, для решения задач профессиональной деятельности.

1. МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Определение. *Множество* – любая определенная совокупность объектов произвольной природы. Обозначают множества прописными латинскими буквами: $A, B, \dots$, а его элементы обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, \dots$.

Определение. *Пустое множество* – это множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается оно символом: $\emptyset$.

Множество элементов, удовлетворяющих свойству $P(x)$ обозначается $\{x | P(x)\}$

1.1. Операции над множествами

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } B \text{ одновременно}\}$$

Пересечением множеств A и B ($A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и первому и второму одновременно.

Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) называется множество, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

Симметрической разностью множеств A и B ($A \Delta B$) называется множество, состоящее из элементов множества A , не являющихся элементами множества B и элементов множества B , не являющихся элементами множества A .

Дополнением множества A ($\bar{A}$) называется множество, состоящее из элементов множества U , не принадлежащих множеству A . $\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$.

1.2. Диаграммы Эйлера - Венна

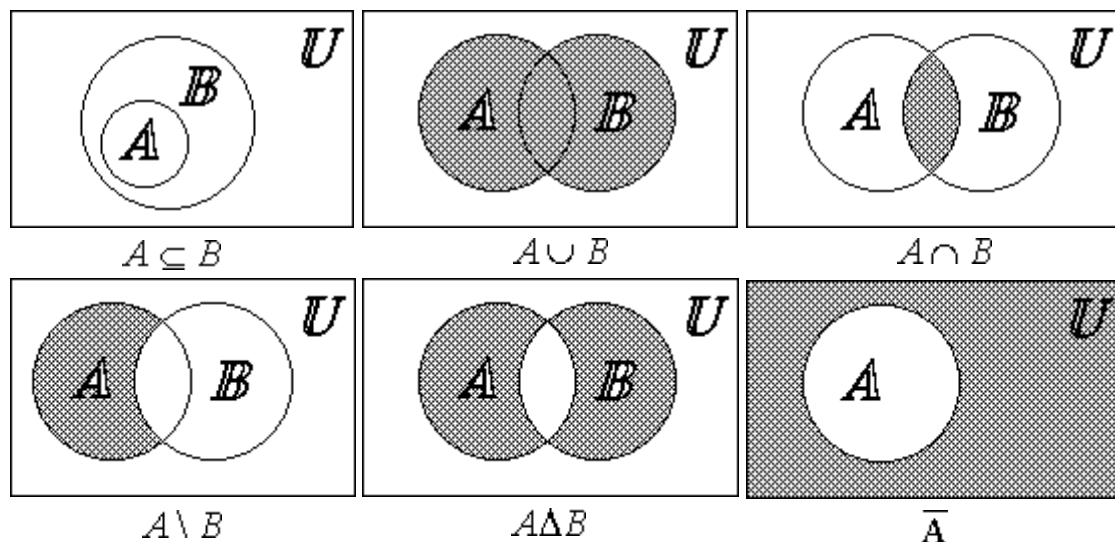


Рис. 1. Диаграмма Эйлера - Венна

Диаграммы Эйлера - Венна – это геометрическое представление множеств. Множество U изображается прямоугольником, рассматриваемые множества – фигурами (окружностями). Для выделения результата применяется штриховка.

1.3. Свойства операций над множествами

Объединение и пересечение:

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность.
2. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ассоциативность.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность.
7. $A \cup A = A$ – идемпотентность.
8. $A \cap A = A$ – идемпотентность.
9. $A \cup \bar{A} = U$ – свойство дополнения.
10. $A \cap \bar{A} = 0$ – свойство дополнения.
11. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – закон де Моргана.
12. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – закон де Моргана.
13. $A \cup 0 = A$ – свойство нуля.
14. $A \cap 0 = 0$ – свойство нуля, дополнение.
15. $\bar{\bar{A}} = A$ – инволютивность.
16. $A \setminus B = A \cap \bar{B} = A(A \cap B)$.
17. $A \Delta B = (A \cup B)(A \cap B)$.

Разность, симметрическая разность:

18. $A \setminus 0 = A$.
19. $A \setminus A = 0$.
20. $A \Delta B = B \Delta A$.
21. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
22. $A \Delta 0 = A$.
23. $A \Delta A = 0$.

1.4. Отношения

Отношение это один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-либо признака R у элемента множества A . Например, "быть четным" на множестве натуральных чисел. Все элементы множества A , отличающиеся признаком R , образуют подмножество множества A , называемое отношением R .

Пример 1.

Исходные данные: числовые множества $A = \{ 3, 5, 7, 12 \}$ и $B = \{ 2, 5, 8, 11, 12, 13 \}$. Необходимо найти объединение и пересечение исходных множеств.

Решение. Определим объединение исходных множеств. Запишем все элементы, к примеру, множества A : 3, 5, 7, 12. Добавим к ним недостающие элементы множества B : 2, 8, 11, 13. В конечном итоге имеем числовое множество: $\{ 3, 5, 7, 12, 2, 8, 11, 13 \}$.

Упорядочим элементы полученного множества и получим искомое объединение: $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13 \}$ $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13 \}$.

Определим пересечение исходных множеств. Согласно правилу, переберем один за другим все элементы первого множества A и проверим, входят ли они во множество B . Рассмотрим первый элемент - число 3: он не принадлежит множеству B , а значит, не будет являться элементом искомого пересечения. Проверим второй элемент множества A , т.е. число 5: оно принадлежит множеству B , а значит, станет первым элементом искомого пересечения. Третий элемент множества A – число 7. Оно не является элементом множества B , а, следовательно, не является элементом пересечения. Рассмотрим последний элемент множества A : число 12. Оно также принадлежит и множеству B , и соответственно станет одним из элементов пересечения.

Таким образом, пересечение исходных множеств – множество, состоящее из двух элементов: 5 и 12, т.е. $A \cap B = \{ 5, 12 \}$.

Ответ: объединение исходных множеств – $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13 \}$; пересечение исходных множеств – $A \cap B = \{ 5, 12 \}$.

Пример 2.

Исходные данные: заданы числовые множества $A = (7, +\infty)$ и $B = [-3, +\infty)$. Необходимо найти пересечение и объединение данных множеств.

По итоговому изображению объединения исходных множеств A и B получаем: $A \cup B = [-3, +\infty)$.

Пересечения заданных множеств. Очевидно, что оно является множеством всех действительных чисел больше числа 7, т.е.: $A \cap B = (7, +\infty)$.

2. БУЛЕВА ФУНКЦИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА

Переменная x , принимающая значения 0 или 1, называется булевой (или логической, двоичной). Функция F , зависящая от булевых переменных

$x_1, x_2, \dots, x_n$ и принимавшая также значения 0 или 1, называется булевой (или логической, двоичной) и обозначается $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Основные элементарные булевы функции от двух переменных приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Основные элементарные булевы функции от двух переменных

x_1	x_2	конъюнкция $x_1 \wedge x_2$	дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	импликация $x_1 \rightarrow x_2$	эквивалентность $x_1 \sim x_2$	сложение по модулю два $x_1 \oplus x_2$	стрелка Пирса $x_1 \downarrow x_2$	штрих Шеффера $x_1 x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Функция $x_1 \wedge x_2$ называется конъюнкцией, ее обозначают также $x_1 \& x_2$, но чаще всего знак конъюнкции аналогично знаку умножения опускают и пишут $x_1 x_2$. Конъюнкция $x_1 x_2$ равна единице, только если $x_1=1$ и $x_2=1$ одновременно, поэтому ее часто называют функцией И. Еще одно название конъюнкции — логическое умножение, поскольку ее таблица истинности действительно совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ равна единице, только если $x_1=1$ или $x_2=1$ (т.е. хотя бы одна переменная равна единице), поэтому ее часто называют функцией ИЛИ.

Кроме таблицы истинности булевы функции могут быть заданы аналитически с помощью формул. Например, $F = (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3) \oplus (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Если формула a реализует булеву функцию F , которая тождественно равна единице, то она называется тождественно истинной. Если формула a реализует булеву функцию F , которая тождественно равна нулю, то она называется тождественно ложной.

Если формулы a и b , зависят от одних и тех же переменных и реализуют одну и ту же булеву функцию F , то формулы a и b называются равносильными.

2.1. Основные равносильности

Закон двойного отрицания $\overline{\bar{x}} = x$.

Идемпотентность $x \vee x \vee \dots \vee x = x$, $x x \dots x = x$.

Коммутативность $x \vee y = y \vee x$, $xy = yx$.

Ассоциативность $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x(yz) = (xy)z$.

Дистрибутивность $x(y \vee z) = xy \vee xz$, $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$.

Законы де Моргана $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$.

Формулы с константами $x \vee \bar{x} = 1$, $0 \vee x = x$, $1 \vee x = 1$, $x\bar{x} = 0$, $0x = 0$
 $1x = x$.

2.2. Дополнительные равносильности

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y,$$

$$x \sim y = \bar{x} \bar{y} \vee xy,$$

$$x \sim y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x),$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y},$$

$$x \oplus 1 = \bar{x},$$

$$x \vee y = x \oplus y \oplus xy,$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y},$$

$$x | y = \overline{xy},$$

$$xy \vee x\bar{y} = x, \quad (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x \quad (\text{законы склеивания}),$$

$$x \vee xy = x \quad (\text{закон поглощения}).$$

$$xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz \quad (\text{закон обобщенного склеивания}).$$

Переменная x_i булевой функции F называется (или фиктивной), если $F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, то есть если изменение значения x_i в каждом наборе значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ не меняет значения функции. При этом существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_i .

Пример. С помощью таблицы истинности убедиться в справедливости законов де Моргана $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Решение. Построим таблицу истинности для $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$.

x	y	xy	$\overline{xy}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Так как в таблице истинности булевым функциям $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ соответствуют одинаковые столбцы, то формулы $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ равносильны.

3. КОНЪЮНКТИВНАЯ И ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

3.1. Элементарные канонические формы

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более 1 раза.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более 1 раза.

3.2. Нормальные формы формул

Дизъюнктивной нормальной формой (Д.Н.Ф.) называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (К.Н.Ф.) называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций.

К.Н.Ф. называется совершенной и обозначается С.К.Н.Ф., если каждая переменная входит в каждую элементарную дизъюнкцию ровно один раз с отрицанием или без.

Д.Н.Ф. называется совершенной и обозначается С.Д.Н.Ф., если каждая переменная входит в каждую элементарную конъюнкцию ровно один раз с отрицанием или без.

3.3. Приведение формул к нормальным формам

Любую логическую формулу (кроме 0) можно привести к С.Д.Н.Ф. следующим образом:

1. Все не булевские операции заменить на булевские ($\&$, $\cup$, $\emptyset$) с помощью равносильностей: $x \oplus y = \overline{x}y \vee x\overline{y}$, $x | y = \overline{x}y = \overline{x} \vee \overline{y}$, $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \sim y = xy \vee \overline{x} \overline{y}$.

2. Все отрицания "спустить" до переменных с помощью законов де Моргана.

3. Раскрыть скобки (дистрибутивность, ассоциативность).

4. Удалить лишние конъюнкции, повторения переменных в конъюнкциях и константы.

Для приведения к С.Д.Н.Ф.:

5. Расщепить те конъюнкции, которые содержат не все переменные.

Пример. С помощью основных равносильностей доказать закон обобщенного склеивания $xy \vee \overline{x}z = xy \vee \overline{x}z \vee yz$.

Решение. Применяя закон склеивания (в обратном порядке, то есть $yz = xyz \vee \overline{x}yz$) и дистрибутивность (то есть вынесем за скобки xy и $\overline{x}z$),

получим:

$$xy \vee \bar{x}z \vee yz = xy \vee \bar{x}z \vee xyz \vee \bar{x}yz = xy(1 \vee z) \vee \bar{x}z(1 \vee y) = xy \vee \bar{x}z$$

4. КАРТЫ КАРНО

Куб Карно – графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции. Карты Карно можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом

4.1. Принцип минимизации

$X_3 X_4$		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	10	0	1	1	0
	11	1	0	0	1

Рис. 2. Принцип выбора ячеек

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами (членами), содержащими одинаковые переменные, вхождения которых (прямые и инверсные) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке.

Таким образом, главной задачей при минимизации СДНФ и СКНФ является поиск термов, пригодных к склейке с последующим поглощением, что для больших форм может оказаться достаточно сложной задачей. Карты Карно предоставляют наглядный способ отыскания таких термов.

Как известно, булевы функции N переменных, представленные в виде СДНФ или СКНФ, могут иметь в своем составе 2N различных термов. Все

эти члены составляют некоторую структуру, топологически эквивалентную N-мерному кубу, причем любые два терма, соединенные ребром, пригодны для склейки и поглощения.

На рисунке изображена простая таблица истинности для функции из двух переменных, соответствующий этой таблице 2-мерный куб (квадрат), а также 2-мерный куб с обозначением членов СДНФ и эквивалентная таблица для группировки термов.

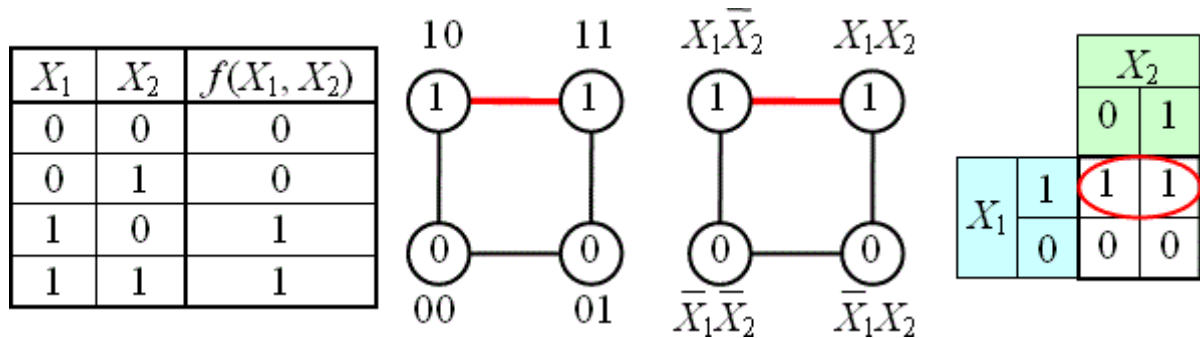


Рис. 3. Таблица истинности для функции из двух переменных и соответствующий ей куб

В случае функции трех переменных приходится иметь дело с трехмерным кубом. Это сложнее и менее наглядно, но технически возможно. На рисунке в качестве примера показана таблица истинности для булевой функции трех переменных и соответствующий ей куб.

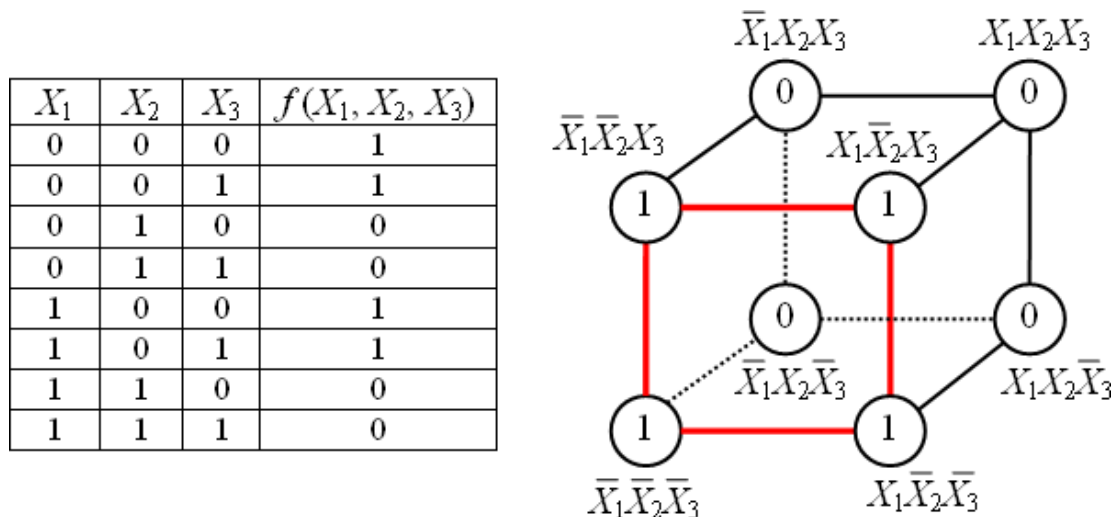


Рис. 4. Таблица истинности для булевой функции трех переменных и соответствующий ей куб

Таблица не верна. Верной будет: 1 1 0 0 1 1 0 0. Как видно из рисунка, для трехмерного случая возможны более сложные конфигурации термов. Например, четыре терма, принадлежащие одной грани куба, объединяются в один терм с поглощением двух переменных:

$$\begin{aligned} & \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3 \vee X_1\bar{X}_2\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1\bar{X}_2X_3 \vee X_1\bar{X}_2X_3 = \\ & = \bar{X}_2(\bar{X}_1\bar{X}_3 \vee X_1\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1X_3 \vee X_1X_3) = \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_1)(\bar{X}_3 \vee X_3) = \bar{X}_2 \end{aligned}$$

В общем случае можно сказать, что 2^K термов, принадлежащие одной K -мерной грани гиперкуба, склеиваются в один терм, при этом поглощаются K переменных.

Для упрощения работы с булевыми функциями большого числа переменных был предложен следующий удобный прием. Куб, представляющий собой структуру термов, разворачивается на плоскость как показано на рисунке. Таким образом, появляется возможность представлять булевы функции с числом переменных больше двух в виде плоской таблицы. При этом следует помнить, что порядок кодов термов в таблице (00 01 11 10) не соответствует порядку следования двоичных чисел, а клетки, находящиеся в крайних столбцах таблицы, соседствуют между собой.

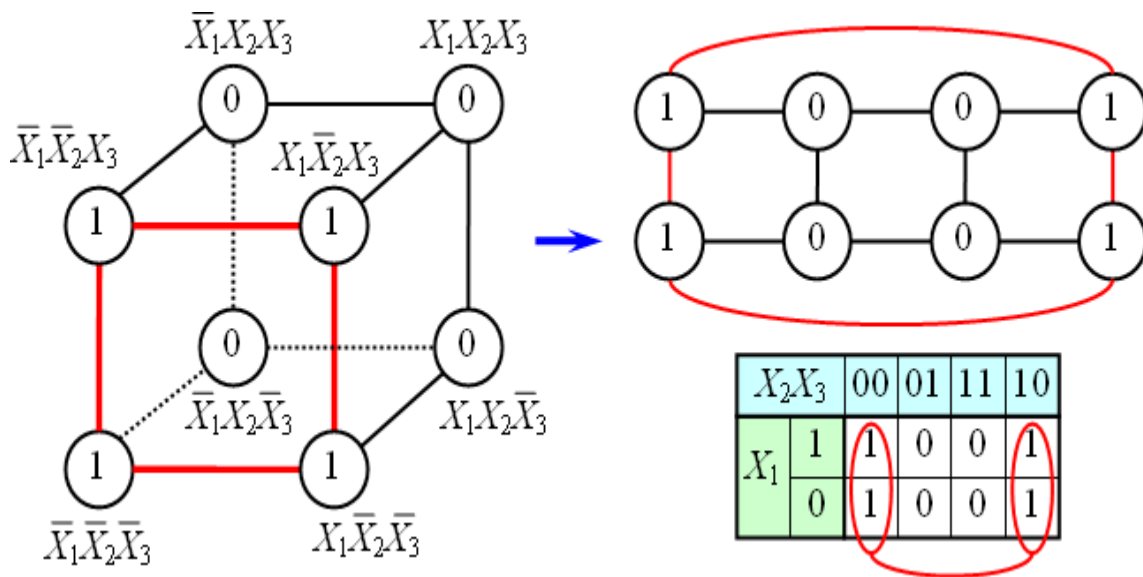


Рис. 5. Булевы функции с числом переменных больше двух

Аналогичным образом можно работать с функциями пяти, семи (обязательно простое число) и т.д., используя не визуализируемые многомерные булевы кубы.

4.2. Порядок работы с картой Карно

Исходной информацией для работы с картой Карно является таблица истинности минимизируемой функции. Таблица истинности содержит полную информацию о логической функции, задавая ее значения на всех возможных 2^N наборах входных переменных $X_1 \dots X_N$. Карта Карно также содержит 2^N клеток, каждая из которых ассоциируется с уникальным набором входных переменных $X_1 \dots X_N$. Таким образом, между таблицей истинности и картой Карно имеется взаимно однозначное соответствие, и карту Карно можно считать соответствующим образом отформатированной таблицей истинности.

В данном разделе в качестве примера используется функция четырех

переменных, заданная таблицей истинности, изображенной на рис. 6, а. Карта Карно для той же функции изображена на рис. 6, б.

a	X_1	X_2	X_3	X_4	F
	0	0	0	0	1
	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0
	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	1
	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	1
	1	0	1	1	0
	1	1	0	0	0
	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1

b	$X_3 X_4$	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

b	$X_3 X_4$	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

g	$X_3 X_4$	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

Рис. 6. Функция четырех переменных, заданная таблицей истинности

4.3. Принципы склейки

Склейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФ) или по нулям (если требуется КНФ).

Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей) 2^n , где n – целое число. Для карт Карно с числом переменных более четырех могут получаться более сложные области, о чем будет сказано в следующих разделах.

Область, которая подвергается склейке, должна содержать только единицы (нули).

Крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали также граничат между собой (топологически карта Карно для четырех переменных представляет собой тор) и могут объединяться в прямоугольники. Следствием этого правила является смежность всех четырех угловых ячеек карты Карно для $N=4$. Если во всех четырех угловых ячейках стоят единицы (нули) они могут быть объединены в квадрат, как показано на рис. 2, в.

Все единицы (нули) должны попасть в какую-либо область.

С точки зрения минимальности ДНФ (КНФ) число областей должно быть как можно меньше (каждая область представляет собой терм), а число клеток в области должно быть как можно больше (чем больше клеток в области, тем меньше переменных содержит терм. Терм размером 2^n ячеек содержит $N-n$ переменных).

Одна ячейка карты Карно может входить сразу в несколько областей.

Это следует из очевидного свойства булевых функций: повторение уже существующего слагаемого (сомножителя) не влияет на функцию.

В отличие от СДНФ (СКНФ), ДНФ (КНФ) не единственны. Возможно несколько эквивалентных друг другу ДНФ (КНФ), которые соответствуют разным способам покрытия карты Карно прямоугольными областями.

4.4. Описание

Карта Карно может быть составлена для любого количества переменных, однако удобно работать при количестве переменных не более пяти. По сути, Карта Карно – это таблица истинности, составленная в 2-мерном виде. Благодаря использованию кода Грея в ней верхняя строка является соседней с нижней, а правый столбец соседний с левым, т.е. вся Карта Карно сворачивается в фигуру тор (бублик).

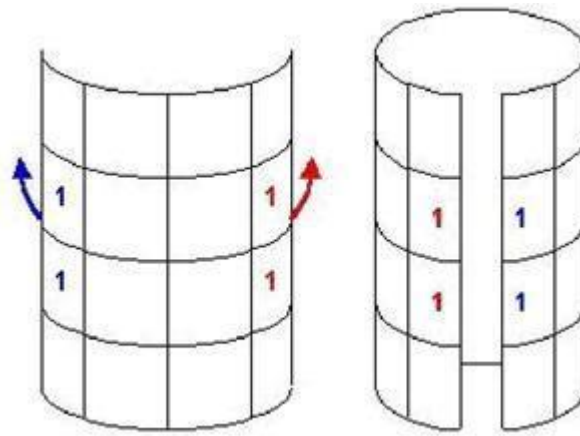


Рис. 7. Принцип склейки ячеек

На пересечении строки и столбца проставляется соответствующее значение из таблицы истинности. После того как Карта заполнена, можно приступать к минимизации.

Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки, которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки, которые содержат нули. Сама минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ):

1. Объединяем смежные клетки, содержащие единицы, в область так, чтобы одна область содержала 2^n клеток (помним про то, что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток, содержащих нули;
2. Область должна располагаться симметрично оси (ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);
3. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну;
4. Область должна быть как можно больше, а количество областей как можно меньше;

5. Области могут пересекаться;
6. Возможно несколько вариантов покрытия.

Далее берем первую область и смотрим, какие переменные не меняются в пределах этой области, выписываем конъюнкцию этих переменных; если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4) = S_1 \vee S_2 \vee S_3 = \overline{X_1} \overline{X_4} \vee X_1 \overline{X_2} X_4 \vee \overline{X_4}$$

инверсию. Берем следующую область, выполняем то же самое, что и для первой, и т. д. для всех областей. Конъюнкции областей объединяем дизъюнкцией. Так для Карты Карно выражение в формате ДНФ будет иметь вид:

В формате КНФ:

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4) = S_1 S_2 S_3 = (X_1 \vee \overline{X_4})(X_2 \vee \overline{X_4})(\overline{X_1} \vee \overline{X_2} \vee X_4)$$

Так же из ДНФ в КНФ и обратно можно перейти используя Законы де Моргана.

5. ГРАФЫ И ИХ СВОЙСТВА. МАРШРУТЫ, ПУТИ И ЦИКЛЫ В ГРАФАХ

Простым графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V . Множество V называется *множеством вершин*, множество E называется *множеством ребер*.

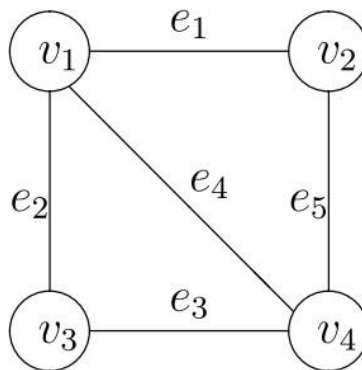


Рис. 8. Граф с множеством ребер и вершин

Если элементами множества E являются *упорядоченные пары* (т.е. пары, в которых фиксирован порядок элементов), то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества V называются *узлами*, а элементы множества E – *дугами*. Первую вершину упорядоченной пары называют *началом дуги*, вторую – *концом*.

Пара одинаковых элементов V вида называется *петлей*. Граф с петлями называется *псевдографом*.

Если E не множество, а *семейство*, то есть если E содержит одинаковые элементы, то такие элементы называются **кратными ребрами**, а граф называется *мультиграфом*.

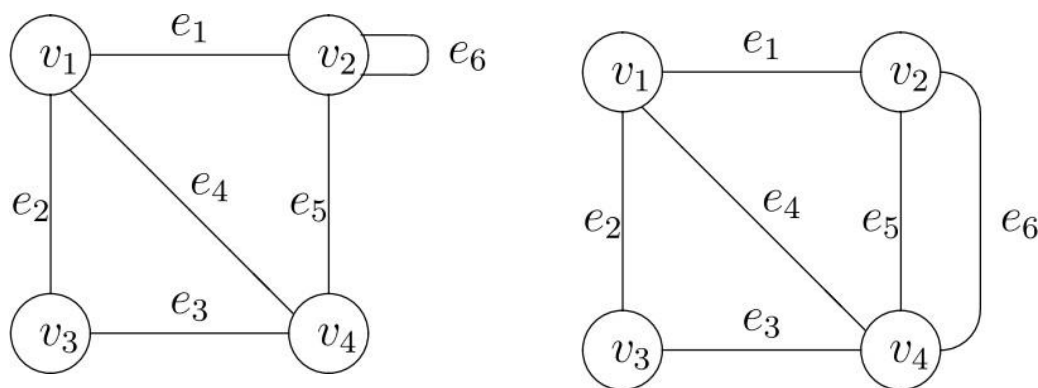


Рис. 9. Графы с петлями

Пусть v_1, v_2 – вершины, $e = v_1v_2$ – соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*, две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*.

Количество ребер, инцидентных вершине v , называется *степенью* (или *валентностью*) вершины v и обозначается d .

Если степень вершины равна 0, то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна 1, то вершина называется *висячей*.

В данном графе v_1 и v_4 – висячие вершины, v_2 – изолированная.

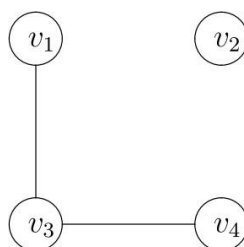


Рис. 10. Граф с висячими вершинами

Лемма (Эйлера). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

Эта лемма также называется «лемма о рукопожатиях» и имеет следующую интерпретацию: если произошло q рукопожатий, то всего участвующие в этом люди пожали руки $2q$ раз.

Теорема о числе вершин нечетной степени. Число вершин нечетной степени в графе четно.

5.1. Типы графов

Граф $G(V, E)$ называется *тривиальным*, если он состоит из одной вершины: $p = 1, E = \emptyset$.

Граф $G(V, E)$ называется *пустым*, если $E = \emptyset$.

Граф $G(V, E)$ называется *полным*, если в нем любые две вершины смежны, то есть $\forall u, v \in V: uv \in E$ (обозначение K_p).

5.2. Изоморфизм графов

Графы называются *изоморфными*, если между их вершинами можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность: Вершины в одном графе смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие вершины во втором графе.

Если графы являются изоморфными, то они имеют одинаковое количество вершин и ребер, а также одинаковое число вершин одной валентности. Обратное неверно: графы, у которых все эти характеристики совпадают, могут не быть изоморфными.

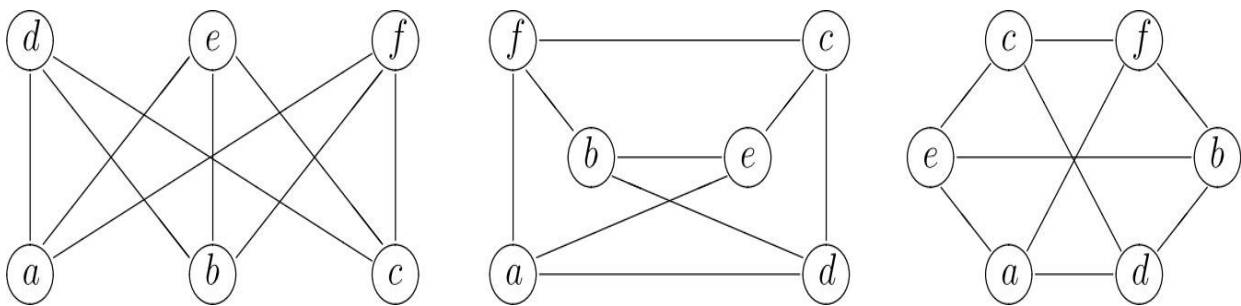


Рис. 11. Изоморфные графы

5.3. Способы задания графа

Списки вершин и ребер уже рассмотрены выше.

Списки смежности. Каждой вершине графа сопоставляется список смежных ей вершин.

Примеры.

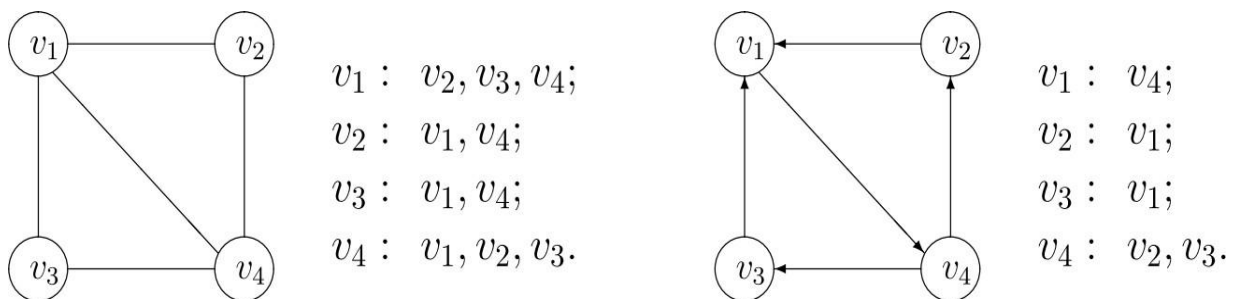
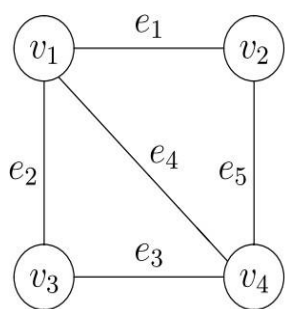
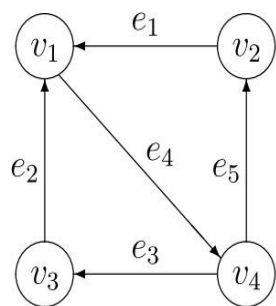


Рис. 12. Примеры смежных вершин в графе

Матрица инцидентий.



$$H(G) = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



$$H(D) = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Рис. 13. Примеры графов с соответствующими матрицами инцидентности

5.4. Маршрут, путь, цепь в графе

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер вида $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$, в которой $e_i = v_{i-1} v_i$. Вершина v_0 называется *начальной*, а v_k – *конечной* вершиной маршрута.

Для графа без кратных ребер достаточно указать только последовательность вершин.

Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит и ребра) в маршруте различны, то маршрут называется *простой цепью*.

Если $v_0 = v_k$, маршрут называется замкнутым.

Если все ребра в замкнутом маршруте различны, то он называется *циклом*. Если все вершины в замкнутом маршруте, кроме первой и последней, различны, то он называется *простым циклом*.

В орграфе цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

На рис. 14 изображено следующее:

abdbс – маршрут, но не цепь;

aabdbсb – цепь, но не простая цепь;

abcde – простая цепь;

abdbсa – замкнутый маршрут, но не цикл;

abfedbсa – цикл, но не простой цикл;

abсa – простой цикл.

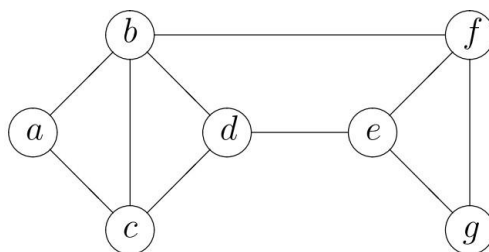
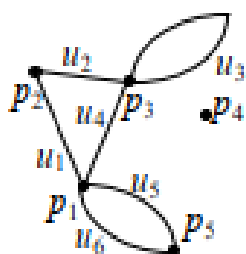
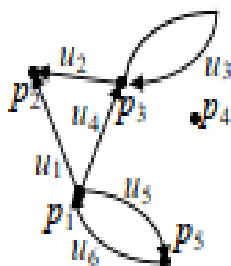


Рис. 14. Пример маршрута, цепи и цикла в графе

Пример 1. Построить матрицу инцидентности для неориентированного и ориентированного графа



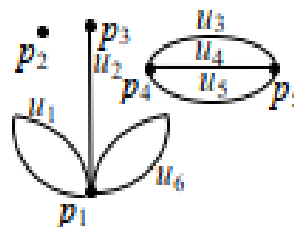
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



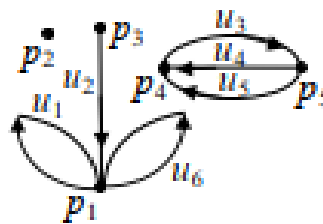
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Восстановить геометрическое представление графа по матрице инцидентности.

$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{matrix}$$



$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array}
 \end{array}$$



6. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И ИХ СВОЙСТВА. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Рядом называют выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где $a_1, a_2, a_3, \dots$ — члены некоторой бесконечной последовательности.

Член a_n называют общим членом ряда.

Три точки в конце выражения указывают на то, что последнего слагаемого нет, то есть ряд является бесконечной суммой.

6.1. Числовые ряды - основные понятия и теоремы

Если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — числа, то ряд называют числовым. В зависимости от знака чисел ряды могут быть знакопостоянными и знакопеременными (знакопеременяющийся).

Например, ряды:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots ,$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2n + \dots ,$$

$$-1 - 3 - 5 - \dots - (2n - 1) - \dots$$

являются знакопостоянными, а ряды

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots ,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \dots$$

являются знакопеременными (знакопеременяющиеся).

Найти суммы бесконечного числа слагаемых непосредственным сложением не может ни человек, ни ЭВМ. Найти можно только сумму конечного числа слагаемых. Такие суммы называют частичными суммами ряда. Например,

$$S_1 = a_1 ,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

А может ли существовать сумма бесконечного количества слагаемых?
Рассмотрим пример: найти сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots .$$

Вычислим частичные суммы этого ряда:

$$S_1 = 1 ,$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} ,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} ,$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} ,$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} .$$

Не для каждого ряда последовательность частичных сумм при $n \rightarrow \infty$ приближается к конкретному числу.

Например, для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots ,$$

частичные суммы S_n равны или 0, или 1; для ряда

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots ,$$

частичная сумма $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ряд, для которого существует предел последовательности частичных сумм при $n \rightarrow \infty$ называют **сходящимся рядом**, а число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ - **суммой ряда**. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ либо не существует, то ряд называют

расходящимся и ему не приписывают ни одного числового значения.

При исследовании рядов основными являются два вопроса: будет ли данный ряд сходящимся и чему будет равна сумма ряда. Во многих практических задачах принципиальным является первый вопрос. Поэтому

основное внимание уделим вопросу установлению является ли ряд сходящимся.

6.2. Необходимый признак сходящегося знакопостоянного ряда

Необходимый признак сходящегося знакопостоянного ряда: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящийся, то его общий член a_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Пример.

Дан общий член ряда: а) $b_n = \frac{n^3+1}{n^2}$, б) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3}$. Написать ряд в

развёрнутом виде и проверить, выполняется ли необходимый признак сходящегося ряда.

Решение:

а) Находим $b_1 = \frac{1^3+1}{1^2} = 2$, $b_2 = \frac{2^3+1}{2^2} = \frac{9}{4}$, $b_3 = \frac{3^3+1}{3^2} = \frac{28}{9}$, $b_4 = \frac{4^3+1}{4^2} = \frac{65}{16}$;

то есть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2} = 2 + \frac{9}{4} + \frac{28}{9} + \frac{65}{16} + \dots$

Потому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{n^2} = \infty \neq 0$, то необходимый признак сходящегося ряда не выполняется, следовательно ряд расходящийся.

б) Находим

$$a_1 = \frac{1^2+1}{1^3} = 2, a_2 = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{5}{8}, a_3 = \frac{3^2+1}{3^3} = \frac{10}{27}, a_4 = \frac{4^2+1}{4^3} = \frac{17}{64}, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} = 2 + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \dots$$

Записываем ряд:

Необходимый признак сходимости ряда выполняется, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3} = 0$

Тем не менее, сделать вывод о сходимости ряде в данном случае невозможно. Для определения сходимости ряда необходимо проверить выполняются ли достаточные условия сходимости.

6.3. Достаточные условия сходимости знакопостоянного ряда

Основные вопросы, которые возникают при работе с числовым рядом:

1. Сходится ли он?

2. Если сходится, то какова его сумма?

Первый из этих вопросов можно выяснить не только по определению, но и с помощью, так называемых, **признаков сходимости ряда**.

Первый признак сравнения

Пусть дано два ряда $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём $a_n > b_n$. Тогда

а) из сходящегося ряда (A) (с большими членами) вытекает сходимость ряда (B) (с меньшими членами); б) из расходящегося ряда (B) вытекает расхождение ряда (A).

При использовании данного признака часто используют ряды, сходимость которых известна. Это может быть гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(расходящийся); обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (который сходящийся при $\alpha > 1$, расходящийся при $\alpha < 1$); геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (сходящийся при $|q| < 1$).

Второй признак сравнения

Пусть дано два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, где $\lambda \neq 0, \lambda \neq \infty$, то оба ряда ведут себя одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно.

6.4. Признак Даламбера. Признак Коши. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда (признак Лейбница)

Признак Даламбера

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходящийся; при $\rho > 1$ ряд расходящийся; при $\rho = 1$ необходимо воспользоваться другим признаком.

Признак Коши

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, то при $\rho < 1$ ряд сходящийся; при $\rho > 1$ ряд расходящийся; при $\rho = 1$ необходимо воспользоваться другим признаком.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. (признак Лейбница).

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ убывают по абсолютной величине и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ то ряд сходящийся.

Для знакопеременных рядов вводят понятие **абсолютной сходимости.** Знакопеременный (знакопеременяющийся) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходятся одновременно данный ряд и ряд, состоящий из абсолютных величин его членов. Если сходится только знакопеременный ряд, то его называют **условно сходящимся** рядом.

6.5. Функциональные ряды

Если у ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

члены последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ функции, то ряд называют функциональным.

Например, функциональными будут ряды

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots,$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots,$$

$$\ln x + \ln(1+x) + \ln(2+x) + \dots + \ln(n+x) + \dots.$$

Если в функциональный ряд подставить $x=x_0$, то он преобразуется в числовой. Полученный при $x=x_0$ числовой ряд может быть сходящимся, или расходящимся.

Точку $x=x_0$, в которой функциональный ряд преобразуется в сходящийся числовой ряд, называют **точкой сходимости** ряда. Совокупность всех точек сходимости для данного функционального ряда называют **областью сходимости.**

Очевидно, что в точках сходимости x_i существуют значения сумм S_i

числовых рядов, и можно установить соответствие между точками сходимости и значениями сумм. Следовательно, суммой функционального ряда является некоторая функция $f(x)$, область определения которой совпадает с областью сходимости функционального ряда. Говорят, что

функциональный ряд сходится с функцией $f(x)$, или что функция $f(x)$ разлагается на ряд. Имеем:

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

в области сходимости ряда.

Рассмотрим некоторые функциональные ряды.

6.6. Степенной ряд

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \dots + a_n(x-b)^n + \dots$$

называют степенным рядом.

Здесь x - независимая переменная, $a_0, a_1, \dots, a_n$ - постоянные коэффициенты ряда, b - произвольное постоянное.

Если ввести замену $x - b = z$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Следовательно, для изучения степенных рядов можно ограничиться рассмотрением ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Признак сходимости степенного ряда (теорема Абеля)

Если степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ сходящийся при $x = x_0$, то он сходящийся, причём абсолютно, при всех x , для которых выполняется условие $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходящийся при $x = x_0$, то он расходящийся для всех $|x| > |x_0|$.

Таким образом, из сходимости степенного ряда в одной точке x_0 следует его сходимость в целом интервале $-x_0 < x < x_0$.

Область сходимости степенного ряда может быть равна:

- а) одной точки $x = a$;
- б) отрезку $(a; b)$;

в) всей числовой оси.

Свойства степенных рядов

Степенные ряды имеют ряд интересных свойств:

1. Суммой степенного ряда является непрерывная функция в области его сходимости.
2. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке из области его сходимости.
3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке из области его сходимости.

6.7. Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ совпадает, то его n -й член u_n при неограниченном росте номера n стремится к нулю.

Существует несколько признаков, которые позволяют утверждать сходимость или расхождение числовых рядов.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Признак сравнения рядов

Если каждый член ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ с положительными членами меньше (или равен) соответствующего члена сходящегося ряда $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$ с положительными членами, то ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ сходится.

Если каждый член ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ больше (или равен) соответствующего члена расходящегося ряда $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$, то ряд $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ расходится.

Признак Даламбера

Пусть все члены ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ положительные и пусть при неограниченном росте номера n предел отношения $(n+1)$ -го члена к n -му существует и равен некоторому числу l , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда:

1. Если $l < 1$, то ряд сходится.
2. Если $l > 1$, то ряд расходится.
3. Если $l = 1$, то признак не дает ответа на вопрос о сходимости или расхождении ряда, то есть ряд в данном случае может как сходиться, так и расходиться.

Интегральный признак Коши

Пусть $y=f(x)$ - непрерывная, монотонно убывающая и положительная в интервале $[1, \infty)$ функция, значение которой $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n) \dots$ совпадают с соответствующими положительными членами ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$. Тогда для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ имел конечную величину.

Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница

Упомянутые признаки сходимости числовых рядов относились к рядам с положительными членами. Рассмотрим теперь ряды, часть членов которых положительная, а часть — отрицательная или равна нулю.

Если члены числового ряда имеют разные знаки, то ряд называется знакопеременным.

Если два подряд члена ряда имеют разные знаки, то знакопеременный ряд называют знакопеременным. Он имеет вид $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + (-1)^{n-1}u_n + \dots$. Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ —

положительные. На вопрос о сходимости или расхождении такого ряда дает ответ признак Лейбница, который формулируется в виде теоремы.

ТЕОРЕМА. Если с ростом номера n члены ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + (-1)^{n-1}u_n + \dots$ по абсолютной величине убывают, а

общий член u_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость ряда

Рассмотрим знакопеременный ряд, в котором члены с положительными и отрицательными знаками не обязательно чередуются. Обозначим такой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, где u_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) — числа как положительные, так и отрицательные.

Составляем ряд из абсолютных величин его членов: $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$

Если ряд из абсолютных величин сходится, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, то знакопеременный ряд называется не абсолютно сходящимся (или условно сходящимся).

ТЕОРЕМА. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

7. РЯД ФУРЬЕ

Периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ можно представить как сумму ряда такого вида:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \dots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad ,$$

где $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – постоянные величины.

Такой ряд называют тригонометрическим рядом, а постоянные $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – коэффициентами ряда. Говорят, что такая запись представляет собой разложение периодической функции $f(x)$ в тригонометрический ряд. Положим $\omega t = x$, тогда ряд приобретает вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Как видим, все слагаемые ряда Т – тригонометрические функции с общим периодом 2π . Поэтому и сумма ряда Т будет периодической функцией с таким же периодом. В силу периодичности суммы ряда Т разложить в тригонометрический ряд непериодическую функцию можно только на отрезке, длина которого равна 2π . В дальнейшем используется отрезок $(-\pi, \pi)$.

Перейдём к вопросу нахождения коэффициентов ряда. Формулы нахождения коэффициентов вводятся путём интегрирования левой и правой частей ряда (Т) и умножения на $\cos nx$ или $\sin nx$. Запишем формулы:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx ; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned}$$

Тригонометрический ряд, коэффициенты которого определены по приведённым формулам называют **рядом Фурье** функции $f(x)$, а функцию $f(x)$ — порождающей для ряда.

Заметим, что записанный для функции $f(x)$ ряд Фурье не всегда сходится именно к ней. приведём достаточное условие сходимости ряда Фурье к порождающей его функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.Е. Дискретная математика: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 139 с.
2. Алексеев В.Е, Захарова Д.В. ТЕОРИЯ ГРАФОВ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 119 с.
3. Н.В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М.А. Корешникова, Е.Г. Полищук, И.Ю. Андреева. Ряды : учебное пособие. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 116 с.
4. Кривцова И.Е., Лебедев И.С., Настека А.В., Основы дискретной математики. Часть 1. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 92 с.
5. Прокопенко Н.Ю. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Н. Ю. Прокопенко; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. – 251с.
6. Дискретные методы обеспечения информационной безопасности: учебно-методическое пособие для обучающихся по направлению 10.03.01 «Информационная безопасность» очной и очно-заочной форм обучения / Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и информационной безопасности, кафедра «Информационная безопасность» : сост.: Е. А. Контылева, В.В. Пелись. – Севастополь : СевГУ, 2022. – 28 с.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Составитель: **Контылева** Елена Александровна

В авторской редакции

Изд. № 116/2025. Объем 2 п. л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»