

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МОРСКОЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Судовое электрооборудование»

Ю.В. Матвеев, В.М. Цалоев

МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СУДОВЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания

к практическим занятиям для студентов специальности
26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования
и средств автоматики»
всех форм обучения

В двух частях

Часть 1

Севастополь
СевГУ
2026

УДК [621.317:629.5.064.5](076.5)

ББК 31.221:39.459-5*я73

МЗЗ

Рецензент:

С.А. Конева - канд. техн. наук, доцент кафедры судового электрооборудования

Матвеев Ю. В.

МЗЗ Метрологическое обеспечение судовых электромеханических систем : методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики» всех форм обучения. – В 2-х частях. Ч. 1 / Ю. В. Матвеев, В. М. Цалоев ; Севастопольский государственный университет, Морской институт, кафедра «Судовое электрооборудование». – Севастополь : СевГУ, 2026. – 43 с. – Текст : электронный.

Методические указания предназначены для студентов Севастопольского государственного университета, Морского института, специальности 26.05.07 – «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики» всех форм обучения, выполняющих практические занятия по дисциплине «Метрологическое обеспечение судовых электромеханических систем».

УДК [621.317:629.5.064.5](076.5)

ББК 31.221:39.459-5*я73

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Судовое электрооборудование», протокол № 3 от 22 октября 2025 г.

© Матвеев Ю.В., Цалоев В.М., 2026
© ФГАОУВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Практическое занятие № 1. Оценка инструментальных погрешностей.....	5
Практическое занятие № 2. Оценка погрешности прямых измерений при однократных и многократных наблюдениях.....	14
Практическое занятие № 3. Оценка погрешности косвенных измерений....	25
Практическое занятие № 4. Измерение напряжений и токов в электрических цепях	33
Библиографический список.....	40
Приложение А. Табличные данные для оценки случайных погрешностей и статистической обработки результатов измерений.....	41

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемых методических указаниях изложено содержание практических занятий по данной дисциплине, читаемых автором в Севастопольском национальном техническом университете для студентов специальности 26.05.07 – Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики очной и заочной форм обучения. Материал практических занятий по дисциплине «Метрологическое обеспечение судовых электромеханических систем» изложен в двух частях методических указаний.

В соответствии с целями и задачами дисциплины содержание методических указаний охватывает: основы метрологии; основы теории электрических измерений; методы и средства измерений электрических и неэлектрических величин.

Практические занятия имеют целью закрепить знания студентами теоретических положений курса, обучить их методам расчета и обработки данных, получаемых в ходе выполнения эксперимента, а также привить навыки научного анализа.

Материалы к каждому практическому занятию содержат: тему; учебную цель; основные теоретические положения; типовые аудиторские задачи и задачи для самостоятельного решения с ответами. Для лучшего усвоения материала в методических указаниях приведены примеры решения задач. Решение задач послужит одним из средств овладения системой знаний, а также поможет более глубоко и всесторонне усвоить программный материал по дисциплине.

В целях самопроверки и закрепления знаний, полученных при изучении определенной темы курса на практических занятиях, в конце материала по каждому практическому занятию предлагается примерный перечень контрольных вопросов.

Для лучшего освоения теоретического материала и подготовке студентов к практическим занятиям в методических указаниях приведен библиографический список [1 - 5].

Автор считает своим долгом выразить благодарность за рецензирование и ценные замечания канд. техн. наук, доценту кафедры СЭО, С.А. Коневой.

Автор

Практическое занятие № 1

ОЦЕНКА ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Цель занятия

1.1.1. Ознакомление с методами расчета инструментальных погрешностей.

1.1.2. Усвоение и закрепление теоретических вопросов, связанных с расчетом погрешности измерительных приборов при однократных электрических измерениях.

1.2. Основные теоретические положения

1.2.1. Основные метрологические понятия

Измерением называют совокупность операций, выполняемых с помощью технического средства, хранящего единицу величины и позволяющего сопоставить с ней измеряемую величину. Полученное значение величины и есть результат измерений.

По способу получения информации измерения разделяют на: прямые; косвенные; совокупные и совместные.

Прямые измерения — это непосредственное сравнение физической величины с ее мерой.

Косвенные измерения отличаются от прямых тем, что искомое значение величины устанавливают по результатам прямых измерений таких величин, которые связаны с искомой определенной зависимостью. Например, с помощью ваттметра можно в цепи постоянного тока измерить мощность прямым измерением, а если измерить силу тока амперметром, а напряжение вольтметром, то измерить мощность косвенным способом можно, перемножая показания амперметра и вольтметра.

Совокупные измерения сопряжены с решением системы уравнений, составляемых по результатам одновременных измерений нескольких однородных величин. Решение системы уравнений дает возможность вычислить искомую величину.

Совместные измерения — это измерения двух или более неоднородных физических величин для определения зависимости между ними.

По характеру изменения измеряемой величины в процессе измерений бывают статистические, динамические и статические измерения.

Статистические измерения связаны с определением характеристик случайных процессов, звуковых сигналов, уровня шумов и т.д.

Статические измерения имеют место тогда, когда измеряемая величина практически постоянна.

Динамические измерения связаны с такими величинами, которые в процессе измерений претерпевают те или иные изменения.

По количеству измерительной информации различают однократные и многократные измерения.

Однократные измерения — это одно измерение одной величины, т.е. число измерений равно числу измеряемых величин.

Многократные измерения характеризуются превышением числа измерений количества измеряемых величин. Преимущество многократных измерений заключается в значительном снижении влияний случайных факторов на погрешность измерения.

Для практического измерения единицы величины применяются технические средства, имеющие нормированные погрешности. Эти средства называются **средствами измерений**.

К **средствам измерений** относят: меры; измерительные преобразователи; измерительные приборы; измерительные установки и системы; измерительные принадлежности.

Мерой называют средство измерения, предназначенное для воспроизведения физических величин заданного размера. К данному виду средств измерений относятся гири, концевые меры длины и т.п.

Измерительный преобразователь — это средство измерений, которое служит для преобразования сигнала измерительной информации в форму, удобную для обработки или хранения, а также передачи в показывающее устройство.

Измерительные приборы — это средства измерений, которые позволяют получать измерительную информацию в форме, удобной для восприятия пользователем. Различаются измерительные приборы прямого действия и приборы сравнения.

Приборы прямого действия отображают измеряемую величину на отсчетном устройстве, имеющем соответствующую градуировку в единицах этой величины. К приборам прямого действия относят, например, вольтметры, амперметры, ваттметры и т.д.

Приборы сравнения предназначены для сравнения измеряемых величин с величинами, значения которых известны.

Измерительные установки и системы — это совокупность средств измерений, объединенных по функциональному признаку со вспомогательными устройствами, для измерения одной или нескольких физических величин объекта измерений.

Измерительные принадлежности — это вспомогательные средства измерений величин. Они необходимы для вычисления поправок к результатам измерений, если требуется высокая степень точности.

1.2.2. Погрешности измерений

Погрешностью называют отклонение результата измерений от действительного (истинного) значения измеряемой величины.

В зависимости от источника возникновения погрешности измерений делятся на:

- **методическую погрешность**, обусловленную несовершенством метода измерения (измерение сопротивления с помощью делителя напряжения);

- **аппаратурную** (инструментальную) погрешность, обусловленную влиянием применяемых средств измерения (зависит от схемы включения и качества измерительных приборов);

— **внешнюю погрешность**, обусловленную внешними по отношению к прибору воздействиями;

— **субъективную погрешность** (зависит от особенностей экспериментатора).

В соответствии с условиями применения средств измерения разделяют на:

— **основную погрешность**, которая имеет место при нормальных условиях эксплуатации, оговоренных в ГОСТе или в технических условиях (ТУ) на средство измерения;

— **дополнительную погрешность**, появляющуюся при отклонении условий эксплуатации средств измерений от нормальных, соответствующих ТУ или ГОСТу.

По закономерности появления различают:

— **систематическую погрешность** — это погрешность, которая остается постоянной (по величине и знаку) или проявляющуюся с определённой закономерностью при повторных измерениях одной и той же величины;

— **случайные погрешности** — это погрешности, которые изменяются случайным образом при повторных измерениях одного и того же значения физической величины;

— **грубые погрешности (промахи)** — их отбрасывают и не учитывают.

Способ борьбы с систематической погрешностью заключается в устранении источника погрешности, предварительного их изучения и введения поправок. Поправка — значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения одной из систематических составляющих погрешности. Знак поправки противоположен знаку погрешности

$$C = -\Delta A,$$

где ΔA — абсолютная погрешность измерения.

Способ борьбы с систематической погрешностью состоит в статистической обработке результатов измерения, например, усреднение.

Одним из способов борьбы с грубой погрешностью заключается в применении "**закона 3σ** ".

Погрешность является количественной характеристикой точности. Чем меньше погрешность, тем выше точность.

Существуют два понятия погрешностей, которые нельзя смешивать:

— **погрешность измерения**;

— **погрешность измерительного прибора**.

Разница этих понятий заключается в том, что имея высокоточный прибор при неправильно поставленном эксперименте или неграмотном использовании прибора можно получить некачественные результаты измерений.

По способу выражения различают следующие виды **погрешностей измерений** [1]:

— **абсолютная погрешность измерения**

$$\Delta A = A_x - A,$$

где A_x — измеренное значение, A — истинное значение измеряемой величины;

— **относительная погрешность измерения**

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\% \approx \frac{\Delta A}{A_x} \cdot 100\%.$$

Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина. В свою очередь относительная погрешность является безразмерной величиной, либо измеряется в процентах. На практике вместо истинного значения используют действительное значение величины, то есть значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

В свою очередь различают **абсолютную, относительную и приведённую погрешности электроизмерительных приборов**. Первые две погрешности определяются аналогично, как и для погрешностей измерений. **Абсолютная погрешность** находится по выражению [1]:

$$\Delta = X_{\text{п}} - X = \pm a,$$

где $X_{\text{п}}$ — показание прибора, X — истинное значение измеряемой величины.

Относительная погрешность прибора определяется по формуле [1]:

$$\delta = \frac{X_{\text{п}} - X}{X} \cdot 100\%.$$

Вследствие того, что истинное значение бывает часто неизвестно, **относительную погрешность** прибора можно определить следующим образом [2]:

$$\delta = \frac{X_{\text{п}} - X}{X_{\text{п}}} \cdot 100\% = \pm c.$$

У измерительного прибора существует еще **приведённая погрешность** (γ), **определяемая как** отношение абсолютной погрешности ΔA к нормирующему значению L , выраженное в процентах [1]:

$$\gamma = \frac{\Delta}{L} \cdot 100\% = \frac{X_{\text{п}} - X}{L} \cdot 100\%.$$

Для приборов с нулевой отметкой на краю шкалы нормирующее значение L равно конечному значению диапазона измерений $X_{\text{к}}$. Если нулевая отметка находится посередине шкалы, то L равно арифметической сумме конечных значений шкалы без учёта знака.

Основной погрешностью измерительного прибора является погрешность, возникающая при нормальном использовании прибора.

На рисунке 1.1 изображен график зависимости абсолютной погрешности (прямая 1) от значения измеряемой величины.

Уравнение прямой, описывающее абсолютную погрешность с учетом мультипликативной погрешности, можно представить в виде суммы погрешностей — аддитивной (прямая 2) и мультипликативной (прямая 3) [2]:

$$|\Delta_{\text{max}}| = |a| + |bX|,$$

где X — текущее значение измерений; a — аддитивная погрешность; b — мультипликативная погрешность.

Значение абсолютной погрешности, ограничивается двумя прямыми, сим-

метричными относительно оси абсцисс. С учетом мультипликативной погрешности абсолютная погрешность определится как

$$\Delta = \pm(a + bX). \quad (1.1)$$

Аддитивная погрешность не зависит от чувствительности прибора и является постоянной для всего диапазона измерений. Наименьшее значение величины, которое может быть измерено прибором, зависит от этой погрешности.

Мультипликативная погрешность зависит от чувствительности прибора и изменяется пропорционально текущему значению входной величины. Причиной появления этой погрешности может быть физическое старение узлов измерительных приборов и других внешних факторов.

Предельное значение относительной погрешности прибора $\delta_{\max}$ можно определить через значение максимальной абсолютной погрешности $\Delta_{\max}$ [3]:

$$\delta_{\max} = \pm \frac{\Delta_{\max}}{X} \cdot 100\%.$$

В соответствии со значением приведённой погрешности средствам измерений присваиваются **классы точности**.

Класс точности — это обобщённая характеристика прибора, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей.

У приборов, аддитивная погрешность которых резко преобладает над мультипликативной, все значения погрешностей оказываются в пределах двух прямых (прямые 2, рисунок 2.1).

В результате допускаемая абсолютная и приведённые погрешности прибора оказываются постоянными в любой точке его шкалы. У таких приборов **класс точности** равен **максимальному** значению приведенной погрешности, выраженной в процентах и округленной до ближайшего большего значения из ряда чисел [4]:

$$(1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6) \cdot 10^n,$$

где $n = 1; 0; -1; -2; \dots$

В соответствии с ГОСТ 8711-78, классы точности на амперметры и вольтметры, установлены следующие: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 и 5,0.

Основная приведённая погрешность у приборов, выраженная в %, не превышает значения, соответствующего класса точности.

Класс точности приборов, у которых аддитивная и мультипликативная составляющие основной погрешности соизмеримы, обозначается в виде **двух чисел разделённых косой чертой**. К приборам, класс точности которых выражается дробью, относятся цифровые измерительные приборы, мосты сравнения и т.д. **Предельное значение основной относительной погрешности прибора**,

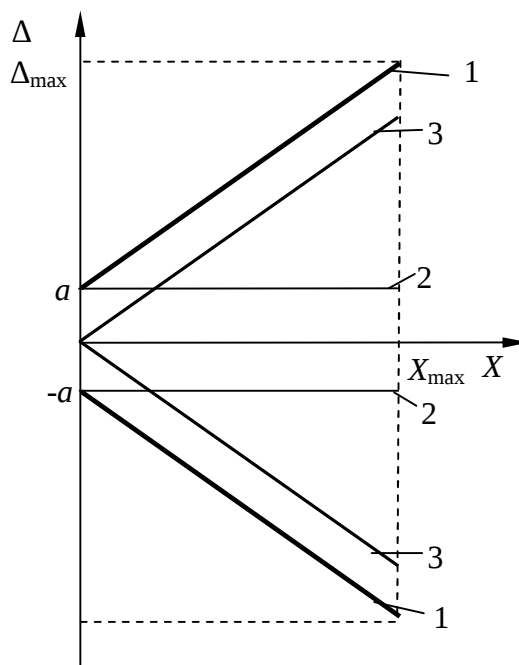


Рисунок 1.1 — График зависимости абсолютной погрешности от значения измеряемой величины

выраженное в процентах, в этом случае может быть определено по формуле [5]:

$$\delta_{\text{пред.}} = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_{\text{к}}}{X} \right| - 1 \right) \right] \% , \quad (1.2)$$

где $c = b + \frac{a}{X_{\text{к}}} = \gamma_{\text{к}}$ — приведенное значение аддитивной погрешности в конце

диапазона; $d = \frac{a}{X_{\text{к}}} = \gamma_{\text{н}}$ — приведенное значение аддитивной погрешности в на-

чале диапазона; $X_{\text{к}}$ — конечное значение диапазона измерений (предел измерений); X — измеренное значение. В последнем выражении первое слагаемое правой части имеет смысл относительной погрешности средств измерений при $X = X_{\text{к}}$, а второе слагаемое — характеризует возрастание относительной погрешности при уменьшении показаний средства измерения. Например, в паспорте цифрового вольтметра приведен класс точности 0,01/0,005. Это означает, что предельное значение основной относительной погрешности прибора можно записать следующим образом

$$\delta_{\text{пред.}} = \pm \left[0,01 + 0,005 \left(\frac{X_{\text{к}}}{X} - 1 \right) \right] \% .$$

1.3. Задачи

1.3.1. Аудиторные задачи

Задача № 1. К источнику ЭДС 24 В с внутренним сопротивлением 1 Ом присоединен вольтметр с входным сопротивлением 20 кОм. Определить показание вольтметра и оценить погрешность измерения, обусловленную наличием внутреннего и входного сопротивлений.

Задача № 2. В цепь с последовательным включением сопротивления 100 Ом и источника с ЭДС 24 В и внутренним сопротивлением 1 Ом включили амперметр, сопротивление которого 0,05 Ом. Определить показание амперметра и вычислить относительную погрешность, обусловленную отличием сопротивления амперметра от нуля.

Задача № 3. Оценить относительные погрешности измерений напряжения, выполняемых в нормальных условиях, вольтметром с конечным значением шкалы 150 В, если класс точности прибора равен 2,0, а показания прибора 20 В и 60 В.

Задача № 4. Основная приведенная погрешность амперметра с максимальным отклонением стрелки 10 А, равна 1,0%. Оценить абсолютную и относительную погрешности измерения, если показание прибора равно 1 А, а нулевая отметка находится на краю шкалы.

Задача № 5. Методом сравнения определены показания образцового вольтметра 2 В и поверяемого вольтметра 1,98 В. Определить абсолютную систематическую погрешность и поправку для поверяемого средства измерения.

Задача № 6. Милливольтметр с максимальным показанием 100 мВ имеет равномерную шкалу в 100 делений, его класс точности обозначен 0,5. Определить цену деления и пределы абсолютной допускаемой погрешности.

Задача № 7. Вольтметр с равномерной шкалой имеет пределы: 30 В; 100 В; 150 В. Показание прибора равно 20 В, а предел допускаемой относительной погрешности равен 4,8%. Определить класс точности прибора, записать результат измерения с указанием границ абсолютной погрешности.

Задача № 8. При поверке аналогового вольтметра с помощью цифрового вольтметра, устанавливали на шкале поверяемого прибора показание 5 В, и получили ряд наблюдений: 5,50 В; 5,60 В; 5,20 В; 5,45 В; 5,35 В. Определить систематическую составляющую погрешности измерения аналогового средства измерения.

Задача № 9. Результат измерения напряжения милливольтметром ВЗ-38 в нормальных условиях имеет вид: $U=50 \text{ В} \pm 10\%$. Определить предел шкалы, на котором произведено измерение напряжения.

Задача № 10. На шкалах измерительных приборов имеются следующие обозначения: 0,5; 0,2; 0,5/0,3. Оценить пределы допускаемой погрешности, соответствующие этим обозначениям.

1.3.2. Примеры решения задач

Задача № 1. Измеренное значение сопротивления $R=100,0 \text{ Ом}$. Предел допускаемой относительной погрешности измерения $\delta_{\text{п}}=1,0\%$.

Определить интервал, в котором должно находиться $R_{\text{и}}$ — истинное значение сопротивления.

Решение. Значение абсолютной погрешности можно определить по выражению $\Delta = R - R_{\text{и}}$, где истинное значение сопротивления равно $R_{\text{и}} = R - \Delta$.

Значение абсолютной погрешности лежит в пределах $-\Delta_{\text{п}} \leq \Delta \leq \Delta_{\text{п}}$. Тогда с учетом погрешности значение сопротивления лежит в пределах

$$R - \Delta_{\text{п}} \leq R_{\text{и}} \leq R + \Delta_{\text{п}}.$$

Абсолютную погрешность определим, зная значение относительной погрешности

$$\Delta_{\text{п}} \cong \delta_{\text{п}} R / 100\% = 1,0 \text{ Ом}.$$

Окончательно находим интервал, в пределах которого лежит истинное значение измеренного сопротивления

$$99,0 \text{ Ом} \leq R_{\text{и}} \leq 101,0 \text{ Ом}.$$

Задача № 2. Имеется три средства измерений: А, Б, С. Обозначения их классов точности, соответственно — 1,0; 0,1; 0,1/0,05.

Представить для каждого из этих средств измерений выражения предельных значений основной абсолютной, основной относительной и основной приведенной погрешностей. При этом значение измеряемой величины обозначить как x , а нормирующее значение — как x_N .

Решение. Для средства измерений А получим значения погрешностей:

$$\Delta=0,01 x_N; \delta=(x_N / x) \%; \gamma=1,0\%.$$

Погрешности для средства измерений Б будут иметь следующие значения:

$$\Delta=0,001 x; \delta=0,1\%; \gamma=(0,1 x / x_N)\%.$$

Для средства измерений С погрешности будут иметь следующие значения:

$$\Delta=0,0005 x + 0,0005 x_N; \delta=0,1\% + 0,05\% \cdot [|x_N / x| - 1]; \gamma=(0,05 x / x_N + 0,05)\%.$$

Задача № 3. Напряжение измеряется двумя вольтметрами. Один имеет предел измерения 25 В и класс точности 2,0, а другой — 60 В и класс точности 1,0 соответственно. Первый вольтметр показал 16 В, а второй — 16,4 В. Определить показания какого вольтметра точнее.

Решение. Вначале определим абсолютную погрешность первого вольтметра $\Delta_1 = \frac{2 \cdot 25}{100} = 0,5$ В. Далее найдем абсолютную погрешность второго вольтметра $\Delta_2 = \frac{1 \cdot 60}{100} = 0,6$ В. Сравнивая два результата, можно сделать вывод, что первый вольтметр точнее.

Задача № 4. Требуется выбрать один из двух поддиапазонов измерений магнитоэлектрического вольтметра класса точности 1,0 — (0...15)В и (0...30)В, так чтобы минимизировать максимальную, без учета знака, погрешность измерения напряжения, значение которого близко к 10 В. Измерения проводятся при нормальных условиях, погрешность отсчитывания пренебрежимо мала, выходное сопротивление источника напряжения $R_{\text{и}}$ не превышает 20 Ом (вариант 1) или 200 Ом (вариант 2). Значение тока полного отклонения для указанных поддиапазонов измерений составляет $I_{\text{п.о}} = 3$ мА.

Решение. Для решения задачи следует воспользоваться следующими выражениями:

$$|\Delta|_{\text{max}} = \Delta_{\text{о.п}} + |\Delta_{\text{в}}|_{\text{max}}; \Delta_{\text{о.п}} = 0,01 \gamma_{\text{о.п}} U_{\text{к}}; |\Delta_{\text{в}}|_{\text{max}} = U R_{\text{и max}} / R_{\text{в}}; R_{\text{в}} = U_{\text{к}} / I_{\text{п.о}};$$

Подставив значения, в указанные выше выражения для 1-го варианта получим следующие значения:

$$U_{\text{к}} = 15 \text{ В: } |\Delta|_{\text{max}} = 0,19 \text{ В; } U_{\text{к}} = 30 \text{ В: } |\Delta|_{\text{max}} = 0,32 \text{ В.}$$

Для второго варианта погрешности для поддиапазонов примут значения:

$$U_{\text{к}} = 15 \text{ В: } |\Delta|_{\text{max}} = 0,55 \text{ В; } U_{\text{к}} = 30 \text{ В: } |\Delta|_{\text{max}} = 0,5 \text{ В.}$$

Из результатов расчета видно, что для второго варианта абсолютная погрешность выше.

Задача № 5. На шкале вольтметра имеется обозначение класса точности 0,1. Написать выражение пределов допускаемой погрешности.

Решение. Величина 0,1 соответствует предельной приведенной погрешности $\pm 0,1\%$. Если измерение напряжения происходит на пределе шкалы $U_{\text{к}}$, то предельную абсолютную погрешность следует определять из выражения

$$\Delta = \frac{0,1 U_{\text{к}}}{100} \text{ В.}$$

1.3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Определить класс точности вольтметра с пределом измерения 10 В, если точкам шкалы 2, 4, 6, 8, 10 В соответствуют значения напряжений, В: 2,047; 3,983; 6,024; 8,015; 9,873.

Ответ: 0,5.

Задача № 2. Вольтметром с диапазоном показаний (0...30) В и пределом допускаемой приведенной погрешности 0,5% выполнено измерение напряжения. Результат измерения равен 9,5 В.

После определения более точным вольтметром действительного значения напряжения выяснилось, что относительная погрешность первого вольтметра составила 1,5%. Не противоречит ли это заявленной для первого вольтметра точности?

Ответ: нет, не противоречит.

Задача № 3. На рисунке 1.2 изображена схема для измерения косвенным методом активной мощности потребляемой нагрузкой. Мощность, потребляемая нагрузкой от источника постоянного напряжения, измеряется косвенно с помощью вольтметра (V) и амперметра (A).

При этих измерениях не учитывается влияние на результат измерения внутреннего сопротивления амперметра, равное 0,1 Ом и вольтметра — 1 кОм. В результате таких измерений может возникнуть погрешность.

Определить значение относительной погрешности метода, если показания амперметра 100 мА, а вольтметра — 1,0 В.

Ответ: 1 %.

Задача № 4. Определить интервал возможных значений погрешности взаимодействия для прибора, включенного в схему, изображенную на рисунке 1.3. Известны данные схемы: $R_1=100$ Ом; $R_2=200$ Ом; $R_3=100$ Ом; $R_V > 12$ кОм.

Показание прибора — $U_V = 100$ В.

Ответ: интервал возможных значений погрешности лежит от –1 В до нуля.

Задача № 5. Вольтметр класса точности 1,0 с пределом измерения 300 В, имеющий максимальное число делений 150, проверен на отсчетах 30, 60 и 100 делений, при этом абсолютная погрешность в этих точках составила 1,8; 0,7 и 2,5 В.

Определить, соответствует ли прибор указанному классу точности, и относительные погрешности на каждой отметке.

Ответ: 3%, 0,6%, 1,25%.

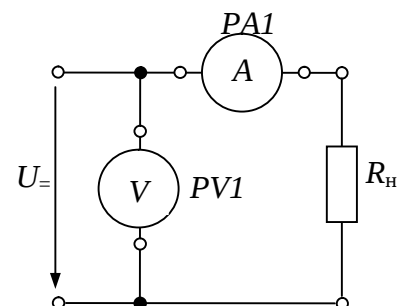


Рисунок 1.2

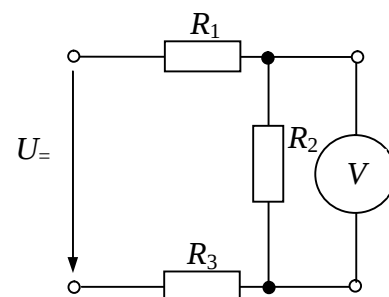


Рисунок 1.3

1.4. Контрольные вопросы

1. Какие задачи решает метрология в экономике государства?
2. В чем заключается единство измерений?
3. Что называется измерением?
4. Какие существуют виды измерений?
5. Как определяются абсолютная и относительная погрешности?
6. Что относят к средствам измерений?
7. Как определяется приведенная погрешность?
8. Как определяется предельное значение относительной погрешности?
9. Чем отличается поправка от погрешности?
10. В чем заключается отличие прямых измерений от косвенных?

Практическое занятие № 2

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ОДНОКРАТНЫХ И МНОГОКРАТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

2.1. Цель занятия

2.1.1. Ознакомление с методикой расчета случайной составляющей погрешности измерений при однократных и многократных наблюдениях.

2.1.2. Усвоение и закрепление теоретических вопросов, связанных с расчетом случайной составляющей погрешности измерений при однократных и многократных наблюдениях.

2.2. Основные теоретические положения

2.2.1. Оценка случайных погрешностей

В ходе проведения в одинаковых условиях повторных наблюдений одной и той же постоянной величины можно получить результаты, отличающиеся друг от друга. Этот факт свидетельствует о наличии в результатах измерений случайных погрешностей.

Случайные погрешности — это погрешности, которые изменяются случайным образом при повторных измерениях одного и того же значения физической величины;

Как правило, для уменьшения влияния случайных погрешностей на результат измерений, необходимо провести усреднение многократных измерений величины в одинаковых условиях.

При выполнении измерений случайные и систематические погрешности появляются одновременно, поэтому погрешность измерения $\Delta = \Delta_c + \overset{\circ}{\Delta}$ следует рассматривать как случайную величину, где систематическая погрешность Δ_c есть математическое ожидание этой величины, а случайная погрешность $\overset{\circ}{\Delta}$ — центрированная случайная величина.

Полным описанием случайных погрешностей являются законы их распределения: интегральный $F(\Delta) = P(\Delta_i \leq \Delta)$ и дифференциальный $f(\Delta)$, связь между которыми имеет следующий вид [5]:

$$f(\Delta) = dF(\Delta)/d\Delta \text{ и } F(\Delta) = \int_{-\infty}^{\Delta} f(\Delta)d\Delta.$$

К числовым характеристикам закона распределения относятся математическое ожидание $M[\Delta]$ и дисперсия $D[\Delta]$, которые определяются по формулам [5]:

$$M[\Delta] = \Delta_c = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta f(\Delta)d\Delta, \quad (2.1)$$

$$D[\Delta] = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - \Delta_c)^2 f(\Delta)d\Delta. \quad (2.2)$$

Средняя квадратическая погрешность определяется по выражению [5]:

$$\sigma[\Delta] = \sqrt{D(\Delta)}, \quad (2.3)$$

а вероятность попадания погрешности Δ в интервале (Δ_1, Δ_2) — по формуле [5]:

$$P[\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2] = F(\Delta_2) - F(\Delta_1) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} f(\Delta) d\Delta. \quad (2.4)$$

На практике наиболее часто встречаются следующие законы распределения: закон равномерной плотности, треугольный закон, нормальный закон и распределение Стюдента.

Закон равномерной плотности имеет следующие числовые характеристики [3]:

$$\left. \begin{aligned} M[\Delta] &= (\Delta_1 + \Delta_2) / 2 \\ \sigma[\Delta] &= (\Delta_2 - \Delta_1) / 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\}, \quad (2.5)$$

где Δ_1 и Δ_2 — границы закона распределения.

Числовые характеристики треугольного закона распределения [3]:

$$\left. \begin{aligned} M[\Delta] &= (\Delta_1 + \Delta_2) / 2 \\ \sigma[\Delta] &= (\Delta_2 - \Delta_1) / 2\sqrt{6} \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Нормальный закон распределения описывается выражением [3]:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\Delta - M[\Delta])^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.7)$$

Для практического применения нормального закона необходимо принять какое-то значение измеряемой величин за истинное. В качестве такого значения принимается среднее арифметическое значение ряда измерений величины X , полученное из формулы [4]:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.8)$$

где n — число измерений в ряде (объем выборки); $\bar{X}$ — среднее арифметическое ряда измерений (математическое ожидание); X_i — i -й результат измеряемой величины из ряда (выборки) $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Средняя квадратическая погрешность (СКП) измерения определяется по формуле [4]:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.9)$$

Погрешность $\pm 3\sigma$ принимают за максимальную погрешность.

Погрешности больше 3σ , считаются **промахами** и при обработке результатов измерений не учитываются, а в случае, если выполняется условие [5]:

$$\Delta_{i \max} \leq 3\sigma,$$

то считается, что в результатах измерений промахов нет (с вероятностью ошибки 0,3%). Часто это условие называют "законом 3-х сигм". В практике измерений число опытов n всегда конечно, поэтому используют статистические числовые характеристики, которые называют оценками характеристик.

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического [5]:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{X}} = \tilde{\sigma} / \sqrt{n} \quad (2.10)$$

На практике обычно используются интервальные оценки в виде доверительной вероятности и доверительных границ погрешности (доверительного интервала).

Одним из наиболее распространённых законов, применяемых в практике электрических измерений, является нормальный закон или распределение Гаусса.

Для нормального закона доверительная вероятность $P(t)$ определяется с помощью интеграла вероятности $\Phi(t)$ [5]:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.11)$$

где $t = \varepsilon / \sigma$ — кратность случайной погрешности, ε — доверительный интервал.

При известных доверительных границах $\varepsilon_1 = \dot{\Delta} + \Delta_c$ и $\varepsilon_2 = \dot{\Delta} - \Delta_c$, можно определить доверительную вероятность [5]:

$$P(t) = P[\varepsilon_1 \leq \Delta \leq \varepsilon_2] = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\dot{\Delta}_2 - \Delta_c}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\dot{\Delta}_1 + \Delta_c}{\sigma}\right) \right]. \quad (2.12)$$

Если доверительные границы ε_1 и ε_2 симметричны, т.е. $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = |\varepsilon|$, то $\Delta_c = 0$ и $|\dot{\Delta}_1| = |\dot{\Delta}_2| = |\dot{\Delta}|$. Тогда [4]:

$$P(t) = P[|\dot{\Delta}| \leq |\varepsilon|] = \Phi(\varepsilon / \sigma) = \Phi(t). \quad (2.13)$$

Значения интеграла вероятности $P(t) = \Phi(t)$ приведены в таблице А.1 **приложения А**.

При малом числе измерений в ряде ($n < 20$) используется распределение Стьюдента. Плотность вероятности зависит от значения случайной погрешности $\dot{\Delta}$ и числа измерений в ряде n , т.е. $f(\dot{\Delta}, n)$.

Доверительные границы ε случайной погрешности результата измерения при заданной вероятности P определяют по выражению [4]:

$$\varepsilon = \pm t_s \tilde{\sigma}_{\bar{X}}, \quad (2.14)$$

где t_s — коэффициент Стьюдента, значение которого определяется из таблицы А.3 **приложения А**. Доверительная граница и доверительная вероятность также зависят от числа измерений.

2.2.2. Порядок статистической обработки результатов измерений

При статистической обработке результатов наблюдений выполняются следующие операции.

1. Вначале необходимо исключить систематические погрешности введением поправок.

2. Далее, по выражению 2.8, необходимо вычислить среднее арифметическое $\bar{X}$ исправленных результатов наблюдений, которое принимается за оценку истинного значения измеряемой величины.

3. Затем по формулам 2.9 и 2.10 необходимо вычислить оценки средней квадратической погрешности измерений ($\tilde{\sigma}$) и среднего арифметического измерения ($\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$).

4. Далее следует проверить гипотезу о нормальности распределения результатов наблюдений. При числе наблюдений $n < 15$ принадлежность их к нормальному распределению не проверяют, а доверительные границы случайной погрешности результата определяют лишь в том случае, если достоверно известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному закону. Если результаты наблюдений распределены нормально, то определяется наличие промахов.

В таблице А.4 приложения А указаны предельные значения коэффициента t_{τ} для различных значений теоретической вероятности появления большой ошибки, которую обычно называют уровнем значимости $q = 1 - P$, при определенном объеме выборки.

Процедура обнаружения промахов заключается в следующем [4].

Вначале строится вариационный ряд из результатов наблюдений $X_1 < X_2 < \dots < X_n$.

Затем определяется среднее арифметическое выборки ($\bar{X}$) и СКП выборки ($\tilde{\sigma}$).

Далее вычисляют коэффициенты

$$t_{\varepsilon 1} = (\bar{X} - X_1) / \tilde{\sigma}, \quad t_{\varepsilon n} = (X_n - \bar{X}) / \tilde{\sigma}. \quad (2.15)$$

На следующем шаге полученные значения $t_{\varepsilon 1}$ и $t_{\varepsilon n}$ сравнивают с t_{τ} для заданного уровня значимости q при заданном объеме выборки. Если $t_{\varepsilon 1} > t_{\tau}$ или $t_{\varepsilon n} > t_{\tau}$, то данный результат является промахом и должен быть отброшен.

Если количество опытов $n > 50$, то проверка гипотезы о нормальности распределения может осуществляться по критерию χ^2 (Пирсона) или ω^2 (Мизеса - Смирнова).

В случае, если количество опытов $15 < n < 50$, то проверка гипотезы о нормальности распределения может осуществляться по составному критерию.

Проверка согласия экспериментального распределения нормальному осуществляется с помощью составного критерия.

Вначале проверяем первый критерий.

Для этого по данным наблюдений вычисляем значение d по формуле [4]:

$$d = \Delta_{\text{cp}} / \sigma_{\text{см}}, \quad (2.16)$$

$$\text{где } \Delta_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|; \quad \sigma_{\text{см}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|^2}.$$

Далее выбираем уровень значимости q_1 в пределах от 0,02 до 0,1.

Затем производим сравнение вычисляемой по опытным данным величины d с теоретическими точками распределения $d_{1\left(1-\frac{q_1}{2}\right)}$ и $d_{2\left(\frac{q_1}{2}\right)}$, соответствующие заданному уровню значимости q_1 критерия 1. Значения $d_{1\left(1-\frac{q_1}{2}\right)}$ и $d_{2\left(\frac{q_1}{2}\right)}$ для заданного уровня значимости q_1 критерия 1 находим по таблице А.5 приложения А.

Гипотеза о принадлежности данного ряда результатов наблюдений к нормальному закону распределений верна, если вычисленная величина d лежит в пределах [4]:

$$d_1\left(1-\frac{q_1}{2}\right) < d \leq d_2\left(\frac{q_1}{2}\right). \quad (2.17)$$

Далее проверяем второй критерий. Оценка по второму критерию заключается в определении числа отклонений m_3 экспериментальных значений t_{3i} от теоретического значения t_T для заданного уровня значимости q_2 . Для этого при заданных q_2 и n находится параметр α по данным из таблицы А.6 приложения А.

Далее находится квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения t_T , который определяется из таблицы А.2 приложения А для значения $F(t_T) = (1 + \alpha)/2$.

Затем вычисляются экспериментальные значения параметра t_{3i} по формуле [4]:

$$t_{3i} = |X_i - \bar{X}| / \tilde{\sigma}. \quad (2.18)$$

Вычисленное значение t_{3i} сравнивается с теоретическим значением t_T и подсчитывается число отклонений m_3 , для которых удовлетворяется неравенство $t_{3i} > t_T$. Значение m_3 сравнивается с теоретическим числом отклонений m_T , которое находится из таблицы А.6 приложения А.

Если $m_3 < m_T$, то распределение данного ряда наблюдений не противоречит нормальному.

Если соблюдаются оба критерия, то данный ряд подчиняется нормальному распределению. При этом уровень значимости составного критерия принимается равным [4]:

$$q \leq q_1 + q_2.$$

5. Далее по выражению 2.14 вычисляем доверительные границы случайной погрешности результата измерения при доверительной вероятности 0,95 или 0,99.

6. Следующим шагом следует определить границы неисключенной систематической погрешности результата измерений. Определение границ неисключенной систематической погрешности осуществляется по формуле [5]:

$$\theta = \bar{K} \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, \quad (2.19)$$

где θ_i — граница i -й неисключенной систематической погрешности; $\bar{K}$ — коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью; при значении $P=0,95$ $\bar{K} = 1,1$.

В качестве границ неисключенной систематической погрешности можно принимать пределы допускаемых основной и дополнительной погрешностей средств измерений.

7. Далее следует вычислить доверительные границы погрешности результата измерения.

При вычислении доверительной границы погрешности результата определяют отношение $\theta/\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$.

Если $\theta/\tilde{\sigma}_{\bar{x}} > 8$, то пренебрегают случайной погрешностью и принимают, что $\Delta = \theta$.

Если $0,8 < \theta/\tilde{\sigma}_{\bar{x}} < 8$, то границу погрешности находят путем суммирования случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины [3]:

$$\Delta = K\sigma_{\Sigma},$$

где K — коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешности; σ_{Σ} — оценка СКП среднего арифметического [3]:

$$K = \frac{\varepsilon + \theta}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\theta_i^2}{3} \right)}}, \quad \sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\theta_i^2}{3} \right) + \tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2}. \quad (2.20)$$

Границы случайной ε и систематической θ погрешностей нужно выбирать при одной и той же доверительной вероятности.

8. Окончательно записываем результат измерений в виде $\bar{X} \pm \Delta, P$.

2.3. Задачи

2.3.1. Аудиторные задачи

Задача № 1. В нормальных условиях получен ряд из следующих наблюдений: 9,8 В; 9,9 В; 10,3 В; 9,6 В; 10,2 В.

Требуется определить: результат измерения, оценку среднеквадратического отклонения результата измерения и доверительный интервал результата измерения при доверительной вероятности 0,95.

Задача № 2. Во время проведения эксперимента в электрической цепи при нормальных условиях были сделаны замеры тока: 5,01 А; 5,04 А; 5,11 А; 4,98 А; 4,76 А; 5,1 А; 5,12 А; 5,04 А; 5,04 А; 5,15 А.

Необходимо, используя правило "трех сигм", определить есть ли промахи при проведении эксперимента.

Задача № 3. В нормальных условиях при измерении напряжения осуществлено 5 наблюдений: 26,87 В; 26,92 В; 27,04 В; 27,01 В; 27,05 В.

Требуется оценить среднеквадратические отклонения результата наблюдений и доверительные границы (доверительный интервал) погрешности результата измерения при вероятности 0,95.

Задача № 4. После проведения эксперимента известен результат измерения ваттметром: $12,14 \pm 0,05$ Вт при числе наблюдений 15, вероятности 0,98 и нормальных условиях.

Определить среднеквадратическое отклонение результата наблюдения.

Задача № 5. Проверить принадлежит ли результат показания амперметра 5,2 А с вероятностью наблюдения 0,99 к ряду из 12-ти наблюдений: 5,14 А; 5,12 А; 5,01А; 5,08 А; 5,06 А; 5,04 А; 5,08 А; 5,1 А; 5,03 А; 5,04 А; 5,06 А; 5,08 А?

Задача № 6. В нормальных условиях с помощью высокоточного частотомера были произведены измерения частоты: 50,201 Гц; 50,103 Гц; 50,020 Гц; 50,053 Гц; 50,101 Гц.

Записать результат измерения частоты с доверительной вероятностью 0,99.

Задача № 7. После проведения наблюдений стал известен результат, выполненный в нормальных условиях: $223,6 \pm 0,8$ В, доверительная вероятность 0,99, число наблюдений 20, условия измерения нормальные.

Найти среднеквадратическое отклонение результата наблюдения.

Задача № 8. При измерении тока в нормальных условиях выполнено 6 наблюдений: 1,43 А; 1,52 А; 1,47 А; 1,43 А; 1,49 А; 1,5 А.

Требуется оценить среднеквадратические отклонения результата наблюдений и результата измерений, а также доверительные границы (доверительный интервал) погрешности результата измерения при вероятности 0,95.

Задача № 9. В процессе поверки амперметра прецизионным средством измерения была обнаружена систематическая погрешность и составлена таблица поправок 2.1.

Затем, с помощью этого амперметра, выполнили двенадцатикратные наблюдения двух значений токов в нормальных условиях, получив следующие результаты измерений : $2,12 \pm 0,11$ А и $5,01 \pm 0,03$ А с вероятностью 0,98.

Таблица 2.1— Таблица поправок

Измеренное значение, А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Поправки, А	-0,02	-0,13	-0,01	0,02	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05

Записать результаты измерений с учетом таблицы поправок.

Задача № 10. Оценка среднеквадратического отклонения случайной составляющей погрешности результата наблюдений частотомера, определённая при 30 наблюдениях, равна 0,72 Гц. Сколько наблюдений необходимо провести этим частотомером, чтобы доверительный интервал случайной составляющей погрешности результата измерений с вероятностью 0,99 не превосходил 0,6 Гц.

2.3.2. Примеры решения задач

Задача № 1. Распределение погрешности результата измерения напряжения изображено на рисунке 2.1. Эта погрешность распределена равномерно в интервале от $\Delta_1 = -2$ В до $\Delta_2 = 4$ В.

Найдите систематическую погрешность результата измерения, среднюю квадратическую погрешность $\sigma[\Delta]$ и вероятность того, что погрешность результата измерения лежит в пределах от $\Delta_{\text{н}} = -1$ В до $\Delta_{\text{в}} = 1$ В.

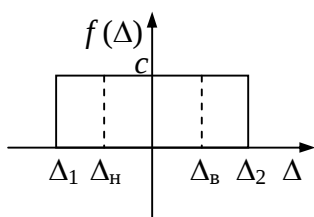


Рисунок 2.1

Решение. Для равномерного закона распределения систематическая погрешность равна математическому ожиданию и определяется формулами (2.1) и (2.5).

$$M[\Delta] = \Delta_c = (\Delta_1 + \Delta_2) / 2 = (-2 + 4) / 2 = 1 \text{ В.}$$

Средняя квадратическая погрешность определяется по выражению (2.5).

$$\sigma[\Delta] = (\Delta_2 - \Delta_1) / 2\sqrt{3} = (5 + 3) / 2\sqrt{3} = 2,31 \text{ В.}$$

Вероятность попадания погрешности в заданный интервал определяется по формуле (2.4).

$$P[\Delta_{\text{н}} \leq \Delta \leq \Delta_{\text{в}}] = \int_{\Delta_{\text{н}}}^{\Delta_{\text{в}}} f(\Delta) d\Delta = \int_{\Delta_{\text{н}}}^{\Delta_{\text{в}}} c d\Delta = c(\Delta_{\text{в}} - \Delta_{\text{н}}),$$

где $c = 1/(\Delta_2 - \Delta_1)$ — значение высоты закона распределений.

$$\text{Тогда, } P[\Delta_{\text{н}} \leq \Delta \leq \Delta_{\text{в}}] = \frac{\Delta_{\text{в}} - \Delta_{\text{н}}}{\Delta_2 - \Delta_1} = \frac{1+1}{5+3} = 0,25.$$

Задача № 2. Погрешность результата измерения тока распределена по нормальному закону. Значения случайных погрешностей $\dot{\Delta}_1 = 3 \text{ мА}$ и $\dot{\Delta}_2 = -3 \text{ мА}$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,2 \text{ мА}$. Определить вероятность выхода погрешности за границы доверительного интервала q для двух случаев:

1. систематическая погрешность $\Delta_c = 0$;
2. систематическая погрешность $\Delta_c = 0,5 \text{ мА}$.

Решение. Определим границу доверительного интервала: при отсутствии систематической погрешности $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \pm 3 \text{ мА}$.

При наличии систематической погрешности $\varepsilon_1 = 3,5 \text{ мА}$, $\varepsilon_2 = -2,5 \text{ мА}$.

Далее найдем вероятность нахождения случайной погрешности в границах доверительного интервала.

При отсутствии систематической погрешности по выражению (2.13) она составит

$$P[|\dot{\Delta}| \leq |\varepsilon|] = \Phi(\varepsilon / \sigma) = \Phi(2,5) \approx 0,988,$$

а при наличии систематической погрешности по формуле (2.13) она определится следующим образом

$$\begin{aligned} P[-\varepsilon_2 \leq \Delta \leq \varepsilon_1] &= \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{3,5}{1,2}\right) + \Phi\left(\frac{2,5}{1,2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(2,92) + \Phi(2,08)] = \frac{1}{2} (0,99654 + 0,96200) = 0,97927. \end{aligned}$$

Следовательно, вероятность выхода погрешности за границы доверительного интервала примет значения:

1. $q = 1 - 0,988 = 0,012$;
2. $q = 1 - 0,97927 = 0,021$.

Задача № 3. С помощью частотомера частота сигнала измерялась 16 раз. Среднее арифметическое значение параметра, вычисленного по ряду наблюдений составило $\bar{f} = 100 \text{ кГц}$, а среднее квадратическое отклонение среднего арифметического — $\sigma_{\bar{f}} = 1 \text{ Гц}$. Требуется определить доверительную вероятность по нормальному закону и распределению Стьюдента, если границы доверительного интервала в процентном отношении от среднего арифметического установлены $|\delta_{\text{н}}| = |\delta_{\text{в}}| = 0,001\%$.

Решение. Переведем значения границ доверительного интервала в абсолютные значения $|\Delta_n| = |\Delta_v| = 1$ Гц или $|\Delta| = \pm 1$ Гц.

Доверительная вероятность при нормальном законе распределения найдется по выражению (2.13) и с учетом таблицы А.1 приложения А:

$$\sigma = \sigma_{\bar{f}} \sqrt{n} = 1 \cdot \sqrt{16} = 4 \text{ Гц};$$

$$P = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = \Phi(0,25) = 0,19741.$$

Окончательно, используя принцип линейной интерполяции между соседними значениями, из найденного значения коэффициента Стьюдента

$t_s = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{f}}} = 2/2 = 1$, числа измерений $n=16$ и данных таблицы А.3 приложения А, находим доверительную вероятность.

Для значения $t_{s1} = 0,866$ значение вероятности составляет $P_{s1} = 0,6$, а для $t_{s2} = 1,074$ значение вероятности — $P_{s2} = 0,7$. Тогда

$$P_s = P_{s1} + (t_s - t_{s1}) \frac{P_{s2} - P_{s1}}{t_{s2} - t_{s1}} = 0,60 + (1,0 - 0,866) \frac{0,70 - 0,60}{1,074 - 0,866} = 0,66.$$

Задача № 4. Погрешность измерения тока распределена по нормальному закону, причем систематическая погрешность равна нулю, а средняя квадратическая погрешность $\sigma = 2$ мА. Найти вероятность P того, что результат измерения отличается от истинного значения не более, чем на $\varepsilon = \pm 2,5$ мА.

Решение. Для определения вероятности того, что результат измерения отличается от истинного значения и воспользовавшись формулой (2.13)

$$P(t) = P[|\Delta| \leq |\varepsilon|] = \Phi(\varepsilon / \sigma) = \Phi(t),$$

получим

$$P(t) = \Phi(2,5 / 2) = 0,79$$

Задача № 5. С помощью амперметра проведено $n=3$ измерений. В результате получены экспериментальные данные: $I_1=16,3$ А; $I_2=16,4$ А; $I_3=16,7$ А.

Решение. 1. Рассчитываем среднее арифметическое значение

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = \frac{1}{3} (16,3 + 16,4 + 16,7) \approx 16,47 \text{ А.}$$

Согласно правилам приближенных вычислений среднее арифметическое значение должно иметь на один разряд больше, чем исходные данные. Поэтому оставляем в I_{cp} сотые доли.

2. Находим оценку среднеквадратического отклонения результата измерения

$$S_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - I_{\text{cp}})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(16,3 - 16,47)^2 + (16,4 - 16,47)^2 + (16,7 - 16,47)^2}{3(3-1)}} \approx 0,12 \text{ А.}$$

Погрешность должна содержать не более двух значащих цифр, поэтому в оценке среднеквадратического отклонения результата измерения, которая является промежуточной величиной, оставляем три значащие цифры.

3. Из таблицы А.3 **приложения А** для $n=3$ выбираем значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n} = 4,3$.

4. Определяем абсолютную погрешность измерения. Если инструментальная погрешность не задана в задаче, то абсолютная погрешность измерения определится как

$$\Delta_I = t_{\alpha,n} S_{\bar{I}} = 4,3 \cdot 0,12 = 0,506 \text{ А.}$$

В случае, если известна инструментальная погрешность, то в расчете следует учесть еще эту погрешность. Для большинства электротехнических измерений оценку погрешностей производят при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$, при этом инструментальную погрешность $\Delta_{\text{и}}$ следует учитывать с коэффициентом $2/3$. Тогда абсолютную погрешность измерения с учетом случайной и инструментальной погрешностей определится как

$$\Delta_I = \sqrt{(t_{\alpha,n} S_{\bar{I}})^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{\text{и}}\right)^2}.$$

5. Находим относительную погрешность по выражению

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta_I}{I_{\text{ср}}} \cdot 100\% = \frac{0,506}{16,47} = 3,07\%.$$

6. Записываем окончательный результат измерения в следующем виде:

$$I = (16,5 \pm 0,5) \text{ А}; \quad \varepsilon_I = 3,1\%; \quad \alpha = 0,95.$$

2.3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Погрешность результата измерения тока распределена равномерно с параметрами $M[\Delta] = 1 \text{ мА}$, $\sigma[\Delta] = 1,15 \text{ мА}$. Определить границы интервала погрешности Δ_1 и Δ_2 .

Ответ: $\Delta_1 = -1 \text{ мА}$; $\Delta_2 = 3 \text{ мА}$.

Задача № 2. При пятикратном измерении с помощью амперметра одного и того же тока были получены следующие результаты, А: 5,35; 5,4; 5,3; 5,45; 5,25. Считая среднее арифметическое значение измеряемого напряжения действительным его значением, определить границы абсолютной и относительной погрешности.

Ответ: $5,35 \pm 0,1 \text{ А}$, $\pm 1,6 \%$.

Задача № 3. Для $n = 16$ измерений среднее арифметическое значение измеренного напряжения $\bar{U} = 35,4 \text{ В}$, а оценка среднего квадратического отклонения $\sigma[\Delta] = 0,25 \text{ В}$. Определить доверительную вероятность P_s , если $\bar{U}$ отличается от истинного значения $U_{\text{ист}}$ на величину доверительного интервала и имеет место неравенство $(35,2 \leq U_{\text{ист}} \leq 35,6) \text{ В}$.

Ответ: $P_s = 0,927$.

Задача № 4. Шестикратное ($n=6$) измерение сопротивления дало следующие результаты R_i , Ом: 723,61; 723,57; 723,52; 723,46; 723,44; 723,40. Определить среднее арифметическое значение $\bar{R}$ измеренного сопротивления и доверительный интервал случайной погрешности ε при доверительной вероятности $P_S = 0,99$. Записать результат измерения, воспользовавшись выражениями (2.8) — (2.10) и (2.14).

Ответ: $R = (723,50 \pm 0,13)$ Ом; $P_S = 0,99$.

Задача № 5. При измерении силы тока были получены следующие результаты: 20,42; 20,43; 20,40; 20,43; 20,42; 20,43; 20,39; 20,30; 20,40; 20,43; 20,42; 20,41; 20,39; 20,40, мА. Определить, не содержит ли результат 8-го измерения грубой погрешности при доверительной вероятности $P = 0,95$?

Ответ: содержит.

2.4. Контрольные вопросы

1. Каким образом уменьшить вклад случайной погрешности в окончательный результат измерения?
2. С какой целью проводится метрологическая аттестация?
3. Как определить, содержится ли в результате измерений систематическая погрешность?
3. Что такое систематическая и случайная погрешности?
4. В чем заключается методика обработки данных результатов измерений с многократными наблюдениями?
5. Как определяется наиболее вероятное значение измеряемой величины?
6. Каким образом определяются границы доверительного интервала?
7. Как определяется среднее квадратическое отклонение результатов наблюдения?
8. От чего зависит ширина доверительного интервала Δ ?
9. Как определить наличие промахов с помощью «закона 3-х сигм»?
10. Для чего нужна оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдения?

Практическое занятие № 3

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Цель занятия

3.1.1. Ознакомление с методами расчета погрешности косвенных измерений.

3.1.2. Усвоение и закрепление теоретических вопросов, связанных с расчетом погрешности косвенных измерений.

3. 2. Основные теоретические положения

При косвенных измерениях физическая величина y определяется функциональной зависимостью:

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_N),$$

где $x_1, x_2 \dots x_N$ — непосредственно измеряемые величины.

Обработка результатов косвенных измерений проводится в следующей последовательности.

1. Вначале находим средние значения и погрешности (абсолютную и относительную) каждой из непосредственно измеренных величин $x_1, x_2 \dots x_N$. Погрешности $\Delta_{x_{i\text{cp}}}$ и $\delta_{x_{i\text{cp}}}$ определяются из прямых измерений или, как инструментальная погрешность прибора при доверительной вероятности, справедливой для большинства электрических измерений $\alpha = 0,95$.

2. Далее находим значение y_{cp} искомой величины при средних арифметических значениях параметров:

$$y_{\text{cp}} = f(x_{1\text{cp}}, x_{2\text{cp}} \dots x_{N\text{cp}}). \quad (3.1)$$

3. Погрешность искомой величины y_{cp} зависит от погрешностей непосредственно измеренных величин, входящих в формулу (3.1).

Определение погрешности y_{cp} можно выполнить одним из двух способов.

Способ 1. При первом способе вначале определяется абсолютная погрешность, а потом относительная погрешность.

Абсолютная погрешность определяется по выражению[5]:

$$\Delta_{y_{\text{cp}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{x_{i\text{cp}}} \right)^2}, \quad (3.2)$$

где $\Delta_{x_{i\text{cp}}}$ — абсолютная погрешность величины x_i , а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные, вычисляемые при $x_i = x_{i\text{cp}}$. В выражении (3.2) используется геометрическое суммирование. При алгебраическом суммировании частных погрешностей для получения результирующей погрешности косвенного измерения $\Delta_{y_{\text{cp}}}$ следует просуммировать выражения $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{x_{i\text{cp}}}$.

Далее находится относительная погрешность по формуле [5]:

$$\delta_{y_{\text{ср}}} = \frac{\Delta_{y_{\text{ср}}}}{y_{\text{ср}}} 100 \%. \quad (3.3)$$

Способ 2. При втором способе вначале определяется относительная погрешность, а потом абсолютная погрешность.

Относительная погрешность определяется по выражению [5]:

$$\delta_{y_{\text{ср}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta_{x_{i\text{ср}}} \right)^2} 100 \%, \quad (3.4)$$

где $\Delta_{x_{i\text{ср}}}$ — абсолютная погрешность величины x_i , а $\frac{\partial f \ln f}{\partial x_i}$ — частные производные, вычисляемые при $x_i = x_{i\text{ср}}$.

Далее находится абсолютная погрешность по формуле [5]:

$$\Delta_{y_{\text{ср}}} = \frac{y_{\text{ср}} \delta_{y_{\text{ср}}}}{100}. \quad (3.5)$$

Окончательно округляем результат косвенных измерений и делаем его запись в виде:

$y = (\text{измер.знач.} \pm \text{абс.погр.} - \text{ть}) \text{ед. измерения}$; $\delta_y = \text{относит. погр.ть}$; $\alpha = 0,95$.

При выборе способа расчета следует руководствоваться следующим.

1. В случае, если искомая величина является функцией одной переменной, то можно воспользоваться первым способом и преобразованной формулой (3.2), принявшей вид [5]:

$$\Delta_{y_{\text{ср}}} = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta_{x_{\text{ср}}}.$$

2. При зависимости искомой величины, определяемой как произведение (частное от деления) нескольких непосредственно измеряемых величин, то следует воспользоваться вторым способом.

Например, есть величина $y = \frac{Ax_1^a}{x_2^b}$. Если прологарифмировать эту величину, то получим $\ln y = \ln A + a \ln x_1 - b \ln x_2$. С учетом того, что $\frac{\partial f \ln x_1}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$ и

$\frac{\partial f \ln x_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$, а производная от постоянной величины равна нулю, по выраже-

нию (3.4), то
$$\delta_{y_{\text{ср}}} = \sqrt{\left(\frac{a \Delta_{x_{1\text{ср}}}}{x_{1\text{ср}}} \right)^2 + \left(\frac{b \Delta_{x_{2\text{ср}}}}{x_{2\text{ср}}} \right)^2} 100\% = \sqrt{a^2 \varepsilon_{x_{1\text{ср}}}^2 + b^2 \varepsilon_{x_{2\text{ср}}}^2} 100 \%.$$

3. Если измеряемая величина определяется суммой или разностью двух величин, то погрешность величины определить можно по первому способу.

К примеру, если измеряемая величина $y = Ax \pm Bz$, то по формуле (3.1) $y_{\text{ср}} = Ax_{\text{ср}} \pm Bz_{\text{ср}}$, а по выражению (3.2) абсолютная погрешность определится как $\Delta_{y_{\text{ср}}} = \sqrt{A^2 \Delta_{x_{\text{ср}}}^2 + B^2 \Delta_{z_{\text{ср}}}^2}$.

Если погрешности аргументов заданы средними квадратическими погрешностями аргументов, то по аналогии $\sigma_{yi} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{xi}$. Для случая использования средних квадратических погрешностей абсолютных погрешностей аргументов и при отсутствии корреляционных связей между ними, результирующая погрешность косвенного измерения при алгебраическом сложении составит

$$\sigma_{\text{уалг.}} = \sum_{i=1}^n \sigma_{yi}, \text{ а при геометрическом сложении — } \sigma_{\text{угеометр.}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{yi}^2}.$$

Если погрешности коррелированы, то

$$\sigma_{\text{угеометр.}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{xi}^2 + 2 \sum_{i+j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r_{ij} \sigma_{xi} \sigma_{xj}}, \quad (3.6)$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между СКП случайных погрешностей x_i и x_j аргументов.

Формулы, приведенные выше, учитывают только случайную составляющую погрешности прямых измерений аргументов. Если при проведении измерения имеется неисключенная систематическая погрешность θ_i , то ее заменяют эквивалентной случайной величиной, распределенной по равномерному закону.

Тогда

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 [\sigma^2(x_i) + \theta_i^2 / 3]}. \quad (3.7)$$

3.3. Задачи

3.3.1. Аудиторные задачи

Задача № 1. На основе прямых измерений тока и напряжения в цепи получены результаты: $0,40 \pm 0,01$ А; 100 В $\pm 3\%$; при доверительной вероятности $0,95$ в нормальных условиях измерения. Определить потребляемую мощность и записать результат измерения.

Задача № 2. Разность потенциалов между обкладками конденсатора емкостью 500 мкФ равна 10 В. Определить энергию электрического поля конденсатора, если погрешности измерения емкости конденсатора и приложенного к нему напряжения равны соответственно $\pm 10\%$ и $\pm 5\%$.

Задача № 3. На магазине сопротивлений КМС-4 набрано сопротивление 5432 Ом. Величина и предельные погрешности декад имеют следующие значения: (5000 ± 5) Ом, $(400,0 \pm 0,2)$ Ом, $(30,00 \pm 0,04)$ Ом, $(2,000 \pm 0,001)$ Ом. Определить абсолютную погрешность сопротивления и записать установленное зна-

чение сопротивления с учетом погрешности при алгебраическом и геометрическом суммировании.

Задача № 4. Определить значение потребленной электрической энергии в цепи, а также оценить погрешность ее измерения и записать результат, если ток в цепи равен $(9,120 \pm 0,015)$ А; сопротивление составляет $(6,07 \pm 0,01)$ Ом; время равно $(394,1 \pm 0,1)$ с. Границы погрешности указаны для вероятности 0,95 при нормальных условиях измерения.

Задача № 5. Для определения частоты с помощью осциллографа был измерен период. Оценить абсолютную и относительную погрешности измерения частоты, если период равен 10 мкс, а абсолютная погрешность его измерения равна ± 1 мкс при доверительной вероятности 0,95 и нормальных условиях измерений.

Задача № 6. Имеются два резистора с номинальными значениями сопротивлений $R_1=1$ кОм и $R_2=3$ кОм и пределами допускаемого относительного отклонения реального сопротивления от номинального равными $\delta_{R1п}=0,2\%$ и $\delta_{R2п}=1,0\%$.

Определить номинальное значение эквивалентного сопротивления $R_{пар}$, соответствующего параллельному соединению резисторов R_1 и R_2 , а также пределы допускаемых относительных отклонений реального эквивалентного сопротивления от $R_{пар}$.

Задача № 7. Необходимо определить значение электрической энергии и погрешность ее определения при алгебраическом и геометрическом суммировании, если по нагрузке $R = (10,25 \pm 0,07)$ кОм протекает ток $I = (40,1 \pm 0,1)$ мА в течение времени $t = (230,4 \pm 0,3)$ с.

Задача № 8. Результат косвенного измерения величины Y определяется соотношением $Y = (X_1 + X_2)/X_1 X_2$, где $X_1=20$, $X_2=30$; предельные абсолютные погрешности $\Delta_{x_1} = \pm 0,1$, $\Delta_{x_2} = \pm 0,2$. Определить предельное значение погрешности измерения Δ_Y и записать результат измерения.

Задача № 9. Результатом косвенного измерения является величина $Y = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$, где $X_1 = 200$; $X_2 = 300$; $X_3 = 20$; $X_4 = 30$, причем средние квадратические погрешности аргументов следующие: $\sigma_{x_1} = 4$; $\sigma_{x_2} = 2$; $\sigma_{x_3} = 1$; $\sigma_{x_4} = 2$. Определить результат измерения и его погрешность.

Задача № 10. С помощью моста была измерена индуктивность. Значение индуктивности рассчитывается по выражению $L_X = R_2 R_4 C$. Известны: средние квадратические погрешности сопротивлений $\sigma_{R_2} = 1$ Ом и $\sigma_{R_4} = 2$ Ом; эталонной емкости $\sigma_C = 0,02$ мкФ. Значения величин моста: $R_2=100$ Ом; $R_4=200$ Ом; $C=2$ мкФ. Корреляционная связь между погрешностями отсутствует. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения индуктивности σ_{L_X} и записать результат измерения.

3.3.2. Примеры решения задач

Задача № 1. Для проведения измерений в схему, изображенную на рисунке 3.1, последовательно с резистором включен амперметр класса точности 1,0 с диапазоном показаний (0...10) А. Показание амперметра $I=5,0$ А, причем существенной является, только основная погрешность прибора.

Номинальное значение сопротивления резистора $R=20$ Ом; предел допускаемого относительного отклонения реального сопротивления от номинального $\delta_{R,п}=0,5\%$.

Определить мощность рассеяния резистора $P_{\text{расс}}$ и представить результат в виде доверительного интервала для доверительной вероятности $P = 1$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся первым способом.

Вначале определим рассеиваемую мощность по выражению

$$P_{\text{расс}} = I^2 R = 500 \text{ Вт};$$

Далее определим абсолютную погрешность косвенного измерения тока

$$\Delta_{Iп} = \gamma_{о.п} (I_N / 100\%) = 0,1 \text{ А}$$

и абсолютную погрешность сопротивления, связанную с отклонением его номинала от истинного значения

$$\Delta_{Rп} = \delta_{Rп} (R / 100\%) = 0,002 \text{ Ом}.$$

Затем определим частные производные рассеиваемой мощности по току и сопротивлению

$$\partial P_{\text{расс}} / \partial I = 2 I R = 200,0 \text{ В};$$

$$\partial P_{\text{расс}} / \partial R = I^2 = 25,0 \text{ А}^2.$$

Окончательно, подставив значения в выражение

$$\Delta_{п} = \left| \partial P_{\text{расс}} / \partial I \right| \Delta_{Iп} + \left| \partial P_{\text{расс}} / \partial R \right| \Delta_{Rп};$$

получим

$$\Delta_{п} = 20,05 \text{ Вт}$$

и запишем результат в виде

$$P=500,0 \pm 20,1 \text{ Вт}; P = 1.$$

Задача № 2. Измеряемая величина y с датчика угла поворота является функцией одной переменной — изменения угла φ и определяется зависимостью $y = 5,6 \cos \varphi$.

В результате прямых многократных измерений результаты измерений следующие: $\varphi_{ср} = (10,0 \pm 0,1)^\circ$; $\delta_{\varphi} = 3\%$; $\alpha = 0,95$.

Решение. При расчете погрешностей тригонометрических функций необходимо абсолютную погрешность угловых величин выразить в радианах

$$1^\circ = 0,0175,$$

тогда $\Delta_{\varphi} = 0,1^\circ = 0,1^\circ \cdot 0,0175 = 0,175 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$

Значение косвенно измеряемой величины будет равно

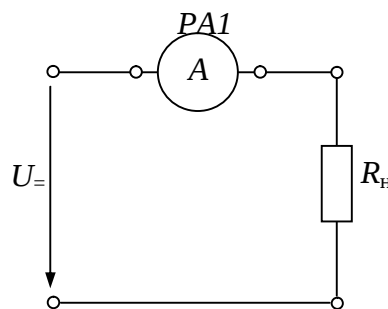


Рисунок 3.1

$$y_{\text{ср}} = 5,6 \cos \varphi_{\text{ср}} = 5,6 \cos 10,0^\circ = 5,515.$$

Далее сделаем расчет погрешности по способу 1. Воспользовавшись выражением (3.2) рассчитаем абсолютную погрешность

$$\Delta_y = \left| \frac{dy}{d\varphi} \Delta_\varphi \right| = 5,6 \cdot \Delta_\varphi \cdot \sin \varphi_{\text{ср}} = 5,6 \cdot 0,175 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 10,0 = 0,0017.$$

Затем, по выражению (3.3) находим относительную погрешность

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{y} 100\% = \frac{0,0017}{5,515} 100\% \approx 0,04\%.$$

Окончательно записываем результат:

$$y = 5,515 \pm 0,002; \delta_y = 0,04\%; \alpha = 0,95.$$

Задача № 3. С помощью амперметра и вольтметра косвенным методом определялась мощность в цепи постоянного тока, причем показание вольтметра было $U = 200$ В, а амперметра — $I = 0,5$ А. Средние квадратические погрешности (СКП) измерения напряжения и тока равны $\sigma_U = 0,5$ В, $\sigma_I = 5$ мА, не исключенные систематические погрешности измерения напряжения и тока равны $\theta_U = 0,6$ В и $\theta_I = 4$ мА соответственно.

Определите абсолютную и относительную СКП измерения мощности.

Решение. Вначале найдем значение измеряемой мощности:

$$P = UI = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ Вт.}$$

Далее определим значение абсолютной СКП измерения мощности, воспользовавшись формулой (3.7).

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \left[\sigma^2(x_i) + \frac{\theta_i^2}{3} \right]} = \sqrt{U^2 \left[\sigma_I^2 + \frac{\theta_I^2}{3} \right] + I^2 \left[\sigma_U^2 + \frac{\theta_U^2}{3} \right]} = \\ &= \sqrt{200^2 \left[0,005^2 + \frac{0,004^2}{3} \right] + 0,5^2 \left[0,5^2 + \frac{0,6^2}{3} \right]} = 2,37 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Затем найдем относительное значение этой погрешности

$$\sigma_{\text{ОР}} = \frac{2,37}{100} \cdot 100\% \approx 2,4\%.$$

Задача № 4. При косвенном измерении мощности P_x , потребляемой нагрузкой R_x на постоянном токе, используется схема, изображенная на рисунке 3.2. Показания приборов, полученные при измерении следующие: $U_V = 30,0$ В,

$I_A = 100$ мА. Внутренние сопротивления вольтметра $R_V = 10$ кОм, а амперметра — $R_A = 1,0$ Ом.

Определить абсолютную и относительную погрешности метода.

Решение. Вначале определим приближенное значение потребляемой мощности

$$P'_x = U_V I_A = 30,0 \cdot 0,1 = 3,0 \text{ Вт.}$$

Этот результат будет содержать методическую погрешность, вызванную потреблением мощности

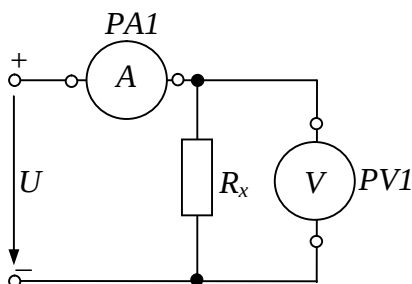


Рисунок 3.2

вольтметром, абсолютное значение которой будет равно

$$\Delta_M = P'_x - P_x = P'_x - (I_A - I_V)U_V = P'_x - P'_x - I_V U_V = P_V = U_V^2 / R_V,$$

Подставив значения, получим значение абсолютной погрешности

Следовательно, $\Delta_M = 30,0^2 / 10000 \cong 0,09$ Вт.

Относительное значение методической погрешности будет равно

$$\delta_M = \Delta_M / P'_x = 0,09 / 3,0 \cong 0,03 = 3,0\%.$$

Задача № 5. Косвенным методом определяется мощность в нагрузке по измеренным значениям тока $I = 200$ мА и напряжения $U = 40$ В. В ходе эксперимента стали известны средние квадратические погрешности измерения тока $\sigma_I = 1,0$ мА и напряжения $\sigma_U = 0,5$ В, которые жестко коррелированы. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения мощности и записать результат измерения.

Решение. Измеренная мощность определится, как

$$P = UI = 40 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 8,0 \text{ Вт.}$$

Воспользовавшись формулой (3.6) и учитывая, что при жесткой корреляции коэффициент $r_{UI} = 1$, определим СКП измерения мощности

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)^2 \sigma_U^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial U} \cdot \frac{\partial P}{\partial I} \sigma_U \sigma_I r_{UI}} = \sqrt{I^2 \sigma_U^2 + U^2 \sigma_I^2 + 2UI \sigma_U \sigma_I r_{UI}} \\ &= \sqrt{0,2^2 \cdot 0,5^2 + 40^2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 40 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,001 \cdot 1} = 0,14 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Далее найдем относительное значение этой погрешности:

$$\sigma_{OP} = \frac{\sigma_P}{P} \cdot 100\% = \sqrt{\sigma_{OU}^2 + \sigma_{OI}^2 + 2\sigma_{OU}\sigma_{OI}r_{UI}} = \frac{0,14}{8,0} \cdot 100\% \approx 1,7\%,$$

где σ_{OU}, σ_{OI} — относительные значения СКП измерения тока и напряжения.

Окончательно запишем результат измерения: $P = 8,0$ Вт; $\sigma_P \approx 0,14$ Вт.

3.3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Косвенным способом в цепи переменного тока была измерена активная мощность. Показания вольтметра составили $U = 150$ В, амперметра — $I = 0,5$ А, а фазометра — $\cos \varphi = 0,9$. Средние квадратические погрешности аргументов равны: $\sigma_I = 10$ мА, $\sigma_U = 2$ В, $\sigma_{\cos \varphi} = 0,03$, а не исключенные систематические погрешности: $\theta_I = 20$ мА, $\theta_U = 4$ В, $\theta_{\cos \varphi} = 0,05$.

Определить: активную мощность, потребляемую нагрузкой, а также абсолютную и относительную среднюю квадратическую погрешность измерения активной мощности.

Ответ: $P = 67,5$ Вт; $\sigma_P = 4,0$ Вт; $\sigma_{OP} = 5,9\%$.

Задача № 2. В цепи постоянного тока измеренные значения тока составило $I = 50$ мА, а сопротивления — $R = 100$ Ом. Относительные СКП измерения аргументов равны: $\sigma_{OI} = 1\%$; $\sigma_{OR} = 2\%$. Относительные неисключенные систематические погрешности имеют значение: $\theta_{OI} = 0,5\%$ и $\theta_{OR} = 1\%$. Определить зна-

чение активной мощности и абсолютную среднюю квадратическую погрешность ее измерения.

Ответ: $P = 250$ мВт; $\sigma_p = 7,3$ мВт.

Задача № 3. Значение сопротивления определяется по измеренным значениям падения напряжения на нем $U=40$ В и протекающего тока $I=20$ мА. Известны средние квадратические погрешности $\sigma_I = 0,1$ мА и $\sigma_U = 0,5$ В, которые коррелированы с коэффициентом корреляции $r_{IU} = -1$. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения сопротивления.

Ответ: $\sigma_R = 35$ Ом.

Задача № 4. При измерении мощности, потребляемой нагрузкой, измеренное значение тока составило $I=50$ мА, а сопротивления — $R=100$ Ом. Вычислить предельную относительную погрешность измерения и записать результат измерения мощности, если предельное значение погрешности измерения тока $\delta_I = \pm 1\%$, а сопротивления $\delta_R = \pm 2\%$.

Ответ: $P = (0,25 \pm 0,01)$ Вт.

Задача № 5. Измерением найдено значение угла $\varphi = (45 \pm 3)^\circ$. Необходимо найти $\cos \varphi$.

Примечание. При решении задачи следует учитывать правило определения погрешности в произвольной функции одной переменной: если x используется для вычисления функции $y = f(x)$, то

$$\delta_y = \frac{\partial f}{\partial x} \delta_x.$$

Кроме того, погрешность должна быть выражена в радианах.

Ответ: $\cos \varphi = 0,707 \pm 0,012$.

3.4. Контрольные вопросы

1. Какое измерение называют косвенным?
2. В чем заключается методика обработки данных результатов косвенных измерений?
3. Какие существуют способы определения погрешности искомой величины при проведении косвенных измерений?
4. Чем отличается косвенное измерение от прямого?
5. В каких случаях погрешность косвенного измерения может быть ниже погрешности прямого измерения?
6. Как определяется абсолютная погрешность при косвенных измерениях?
7. Чем отличается методическая погрешность от инструментальной?
8. Как определить относительную погрешность при косвенных измерениях?
9. Какие существуют способы по минимизации погрешности при косвенных измерениях?
10. Как определяется результирующая погрешность косвенного измерения?

Практическое занятие № 4

ИЗМЕРЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

4.1. Цель занятия

4.1.1. Ознакомление с методикой расчета погрешности измерений напряжений и токов в электрических цепях.

4.1.2. Усвоение и закрепление теоретических вопросов, связанных с расчетом погрешности измерений напряжений и токов в электрических цепях.

4.2. Основные теоретические положения

Измерение напряжений производят с помощью вольтметра, подключенного **параллельно** тому участку цепи, на котором производят измерение.

Для расширения пределов измерения вольтметра на постоянном токе применяются **добавочные сопротивления**, а на переменном — добавочные сопротивления и **измерительные трансформаторы напряжения**.

На рисунке 4.1 изображена схема подключения добавочного сопротивления.

При измерении напряжения U_x и верхнему пределу шкалы прибора $U_{пр}$ расчет добавочного сопротивления $R_{доб}$ осуществляется по выражению [3]:

$$R_{доб} = R_{пр} \cdot (m - 1), \quad (4.1)$$

где $R_{пр}$ — сопротивление прибора (вольтметра); $m = \frac{U_x}{U_{пр}}$ — коэффициент расширения

предела измерения вольтметра.

На рисунке 4.2 изображена схема подключения измерительного трансформатора напряжения с одной вторичной обмоткой. На этой схеме на первичную обмотку подается высокое напряжение U_1 , а на напряжение вторичной обмотки U_2 подключен вольтметр. Начала первичной и вторичной обмоток обозначены буквами A и a , концы — X и x , соответственно. Отношение первичного номинального напряжения к вторичному номинальному напряжению называется номинальным коэффициентом трансформации трансформатора напряжения [3]:

$$K_n = U_1 / U_2. \quad (4.2)$$

Для расширения пределов измерений амперметров на постоянном токе используются **шунты**. На рисунке 4.3 изображена схема подключения шунта.

Сопротивление шунта определяется по выражению [3]:

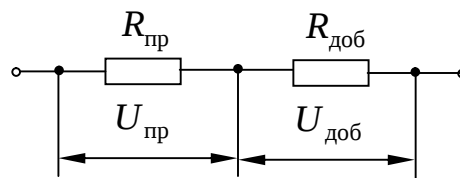


Рисунок 4.1 — Схема подключения добавочного сопротивления

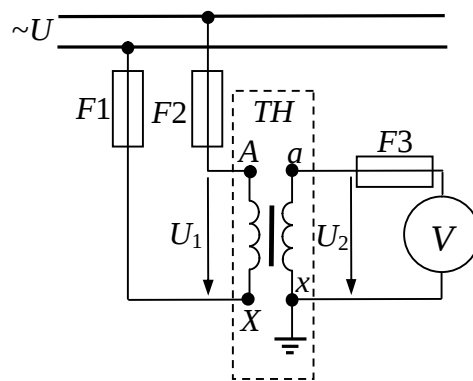


Рисунок 4.2 — Схема измерительного трансформатора напряжения

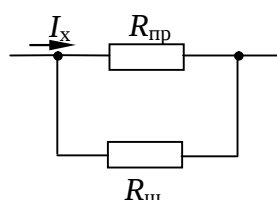


Рисунок 4.3 — Схема подключения шунта

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_{\text{пр}}}{n - 1}, \quad (4.3)$$

где $n = I_x I_{\text{пр}}$ — коэффициент шунтирования; $R_{\text{пр}}$ — сопротивление прибора (амперметра).

Для расширения пределов измерений амперметров на переменном токе используются измерительные трансформаторы тока. Схема включения измерительного трансформатора тока изображена на рисунке 4.4.

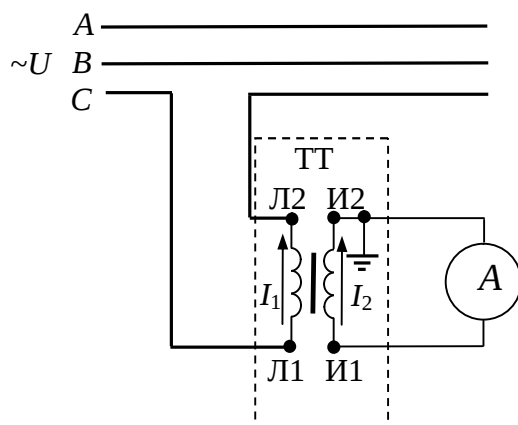


Рисунок 4.4 — Схема включения измерительного трансформатора тока в сеть

Измерительный трансформатор тока преобразует большой переменный ток в относительно малый, который может быть измерен непосредственно электроизмерительным прибором.

Измерительный трансформатор тока работает в режиме, близком к режиму короткого замыкания.

Основной его характеристикой является номинальный коэффициент трансформации K_T [3]:

$$K_T = I_1 / I_2, \quad (4.4)$$

где I_1 и I_2 — токи первичной и вторичной обмоток соответственно.

4.3. Задачи

4.3.1. Аудиторные задачи

Задача № 1. Предел измерения микроамперметра равен 100 мкА. Необходимо расширить это предел до 10 А. Определить сопротивление шунта, если внутреннее сопротивление прибора $R_A = 10$ Ом, также класс точности прибора, если наибольшее значение абсолютной погрешности амперметра 50 мА.

Задача № 2. Для расширения предела измерения амперметра с внутренним сопротивлением $R_A = 1$ Ом в 50 раз необходимо включить шунт. Определить сопротивление шунта и максимальное значение тока на расширенном пределе, если падение напряжения на шунте $U_{\text{ш}} = 75$ мВ.

Задача № 3. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_A = 0,01$ Ом и пределом измерения 10 А имеет шунт сопротивлением 0,004 Ом. Определить предел измерения амперметра с шунтом, а также ток в цепи, если его показание равно 7 А.

Задача № 4. Магнитоэлектрический прибор с сопротивлением 5 Ом и током полного отклонения 10,0 мА может быть использован в качестве амперметра на 20 А. Определить сопротивление шунта.

Задача № 5. Амперметр с наружным шунтом $R_{\text{ш}} = 0,001$ Ом рассчитан на предел измерения 50 А, а его внутреннее сопротивление равно $R_A = 10,0$ Ом. Определить ток полного отклонения измерительной катушки прибора.

Задача № 6. Милливольтметр с пределом измерения 75 мВ и внутренним сопротивлением $R_V = 50,0$ Ом имеет 150 делений шкалы. Определить сопротивление шунта, чтобы прибором можно было измерить предельное значение тока 10 А. Определить цену деления прибора.

Задача № 7. Имеется многопредельный амперметр. При шунтирующем множителе $n=100$ амперметр имеет предел 5,0 А и падение напряжения на его зажимах при токе полного отклонения $U_{\text{ном}} = 75$ мВ. Определить сопротивления шунтов и пределы измерения прибора при следующих коэффициентах шунтирования: 100, 200, 500, 1000.

Задача № 8. Микроамперметр с пределом измерения 1000 мкА и внутренним сопротивлением 0,5 Ом необходимо использовать в качестве вольтметра на предел 50 В. Определить добавочное сопротивление.

Задача № 9. У вольтметра электродинамической системы с пределом шкалы равным 300 В и внутренним сопротивлением $R_V = 50,0$ кОм необходимо расширить предел до 1000 В. Определить добавочное сопротивление вольтметра и максимальную потребляемую мощность на основном и расширенном пределах.

Задача № 10. Предел измерения вольтметра электромагнитной системы составляет 10,0 В при его внутреннем сопротивлении $R_V = 10,0$ Ом. Определить добавочное сопротивление, которое необходимо включить для расширения предела измерения до 300 В.

4.3.2. Примеры решения задач

Задача № 1. Для измерения тока в наличии имеется микроамперметр с пределом измерения 300 мкА, внутренним сопротивлением 1,2 Ом и максимальным числом делений 100. Требуется определить сопротивление шунта для расширения пределов измерения тока до 30 А, а также относительную погрешность измерения на отметке 70 делений, если класс точности прибора 1,0.

Решение. Вначале необходимо определить коэффициент шунтирования

$$n = n = \frac{I_x}{I_{\text{пр}}} = \frac{30}{300 \cdot 10^{-6}} = 10,0 \cdot 10^4.$$

Далее по выражению (4.3) следует определить сопротивление шунта. Тогда

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_{\text{пр}}}{n-1} = \frac{180}{10 \cdot 10^4 - 1} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}.$$

Затем определяем показание амперметра, соответствующее 70 делениям, для чего цену деления 0,3 А/дел умножим на число делений 70, тогда прибор покажет $I = 21$ А. Относительная погрешность в этой точке составит

$$\delta = \frac{\Delta I_{\text{макс}}}{I} = \frac{0,3 \cdot 100}{21} \% = 1,4\%,$$

где $\Delta I_{\text{макс}} = 0,3$ А.

Задача № 2. В сеть переменного тока через измерительный трансформатор тока 100/2,5 А и измерительный трансформатор напряжения 600/150 В

включены амперметр, вольтметр и ваттметр, которые показали соответственно 60, 84 и 40 делений. Пределы измерения приборов: амперметр — 2,5 А; вольтметр — 150 В; а ваттметр — 2,5 А по току и 150 В — по напряжению. Все приборы класса точности $\gamma = 0,5$ имеют максимальное число делений 100. Определить полную потребляемую мощность, ее полное сопротивление и коэффициент мощности, наибольшую абсолютную и относительные погрешности измерения полного сопротивления, учитывая класс точности прибора.

Решение. Вначале определим цену деления каждого прибора как отношение предела измерения к максимальному числу делений. Для амперметра цена деления 0,025 А/дел, для вольтметра — 1,5 В/дел, для ваттметра — 7,5 Вт/дел.

Тогда показания приборов составят:

$$I = 0,025 \cdot 60 = 1,5 \text{ А}; U = 1,5 \cdot 84 = 126 \text{ В}; P = 7,5 \cdot 24 = 180 \text{ Вт}.$$

Далее по выражениям (4.2) и (4.4) найдем коэффициенты трансформации по току и напряжению измерительных трансформаторов по току и напряжению соответственно:

$$K_T = I_1/I_2 = 100/2,5 = 40; K_H = U_1/U_2 = 600/150 = 4.$$

Затем найдем значения тока, напряжения и активной мощности сети

$$I_c = K_T \cdot I = 40 \cdot 1,5 = 60 \text{ А}; U_c = K_H \cdot U = 4 \cdot 126 = 504 \text{ В};$$

$$P_c = K_T \cdot K_H \cdot P = 4 \cdot 40 \cdot 300 = 28,8 \text{ кВт}.$$

Следующим шагом определим полную мощность, потребляемую сетью,

$$S_c = U_c \cdot I_c = 504 \cdot 60 = 30,24 \text{ кВ·А}$$

и коэффициент мощности $\cos \varphi = \frac{P_c}{S_c} = \frac{28,8}{30,24} = 0,95$.

Далее найдем полное сопротивление сети $z_c = \frac{U_c}{I_c} = \frac{504}{60} = 8,4 \text{ Ом}.$

Затем определим наибольшее значение полного сопротивления. Для этого найдем вначале наибольшее значение напряжения сети

$$U_{\text{смакс}} = K_H (U + \Delta_U) = 4(126 + 0,75) = 507 \text{ В},$$

где $\Delta_U = \frac{\gamma U_{\text{ном}}}{100\%} = \frac{0,5 \cdot 150}{100\%} = 0,75 \text{ В}$, а затем наименьшее значение тока сети

$$I_{\text{смин}} = K_T (I - \Delta_I) = 40(1,5 - 0,0125) = 59,5 \text{ А},$$

где $\Delta_I = \frac{\gamma I_{\text{ном}}}{100\%} = \frac{0,5 \cdot 2,5}{100\%} = 0,0125 \text{ А}.$

Наибольшее значение полного сопротивления определится как

$$z_{\text{смакс}} = \frac{U_{\text{смакс}}}{I_{\text{смин}}} = \frac{507}{59,5} = 8,52 \text{ Ом}.$$

Окончательно абсолютная погрешность примет значение

$$\Delta z_c = z_{\text{смакс}} - z_c = 8,52 - 8,4 = 0,12 \text{ Ом}, \text{ а относительная погрешность изме-}$$

рения — $\delta_c = \frac{\Delta z_c}{z_c} 100\% = \frac{0,12}{8,4} 100\% = 1,4\%.$

Задача № 3. На рисунке 4.5 изображена схема трехпредельного шунта.

Определить параметры многопредельного шунта к амперметру для трех пределов измерения. Внутреннее сопротивление амперметра $R_A=1\text{ Ом}$, падение напряжения ΔU на шунте в каждом пределе измерения не должно превышать 100 мВ .

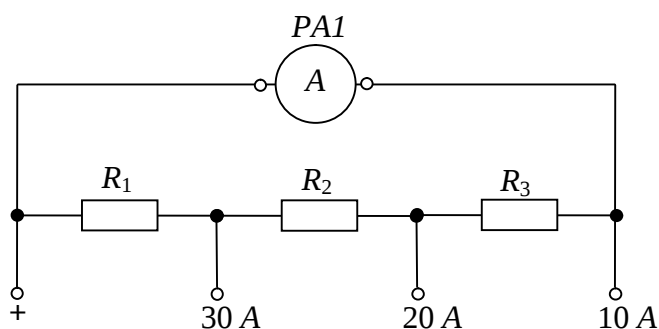


Рисунок 4.5

Решение. Ток измерительной рамки амперметра, учитывая, что напряжение на шунте равно напряжению рамки, определяется по соотношению:

$$I_A = \frac{\Delta U}{R_A} = \frac{0,1}{1} = 0,1 \text{ мА}.$$

Далее определим коэффициент шунтирования для диапазона 10 А

$$n = \frac{10}{0,1} = 100 \quad n = I_x/I_{\text{пр}} = 10/0,1 = 100.$$

Затем найдем сопротивление шунта для диапазона 10 А

$$R_{\text{ш}} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{100 - 1} = 0,0101 \text{ Ом}.$$

Далее определим коэффициент шунтирования для диапазона 20 А

$$n = \frac{20}{0,1} = 200$$

и из уравнения $R_{\text{ш}} - R_3 = R_1 + R_2 = \frac{1 + R_3}{200 - 1}$ — сопротивление шунта

$$R_3 \approx R_{\text{ш}} - \frac{1}{199} = 0,0101 - 0,005 = 0,0051 \text{ Ом}.$$

Затем найдем коэффициент шунтирования для диапазона 30 А

$$n = \frac{30}{0,1} = 300,$$

а из уравнения $R_{\text{ш}} - R_3 - R_2 = R_1 = \frac{1 + R_2 + R_3}{300 - 1}$ определим сопротивление шунта

$$R_2 \approx R_{\text{ш}} - R_3 - \frac{1}{299} = 0,0101 - 0,0051 - 0,0033 = 0,0017 \text{ Ом}.$$

Окончательно вычислим сопротивление R_1 составит

$$R_1 \approx R_{\text{ш}} - R_3 - R_2 = 0,0101 - 0,0051 - 0,0017 = 0,0033 \text{ Ом}.$$

Задача № 4. При изменении измеряемого тока на $1,0\text{ А}$ стрелка амперметра отклонилась на половину треть линейной шкалы, имеющей $100\text{ }150$ делений. Определить верхний и нижний пределы измерения, цену деления амперметра.

Решение. Верхний предел измерения амперметра соответствует максимальному отклонению указателя прибора, а так как шкала линейна, то

$$I_{\text{н}} = 3I_{\text{изм}} = 3\text{ А}.$$

Цена деления прибора определяется из соотношения изменения измеряемого тока и перемещения указателя $C_x = \frac{\Delta I}{\Delta \alpha} = 20 \text{ мА/дел}$. Величина, обратная постоянной шкалы прибора, соответствует его чувствительности, т. е.

$$S_x = \frac{\Delta \alpha}{\Delta I} = 0,05 \text{ дел/мА}.$$

Нижний предел равен минимальной величине измеряемого тока. В измерительной технике принято считать в качестве минимальной такую измеряемую величину, которая вызывает перемещение указателя на половину деления шкалы. Эта же величина соответствует и минимальному определяемому данным прибором изменению измеряемого тока, то есть

$$I_{\text{мин}} = \frac{C_x}{2} = 10 \text{ мА}.$$

Задача № 5. Показания вольтметра $U_1 = 100 \text{ В}$ и $U_2 = 30 \text{ В}$ в цепи, изображенной на рисунке 4.6. Верхний предел измерения вольтметра равен 150 В , а класс точности прибора — $1,0$. Определить абсолютную ΔU и относительную погрешности γ измерения напряжения U .

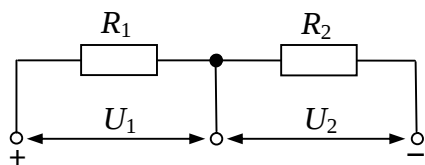


Рисунок 4.6

Решение. Вначале определим косвенным методом напряжение, приложенное к цепи:

$$U = U_1 + U_2 = 130 \text{ В}.$$

Далее найдем абсолютную погрешность вольтметра определим по известным значениям класс точности прибора и верхнего предела шкалы $\Delta U_v = 1,5 \text{ В}$.

Следующим шагом вычислим абсолютную погрешность измерения напряжения $\Delta U = \pm \sqrt{(\Delta U_1)^2 + (\Delta U_2)^2} = \pm \sqrt{2(1,5)^2} = \pm 2,12 \text{ В}$. Затем определим максимально возможное значение абсолютной погрешности

$$\Delta U_{\text{макс}} = \pm (\Delta U_1 + \Delta U_2) = \pm 4,24 \text{ В}.$$

Далее найдем относительную погрешность измерения напряжения $\delta = \pm \frac{\Delta U}{U} 100\% = \pm 1,6\%$. Окончательно вычислим максимально возможное значение относительной погрешности $\delta_{\text{макс}} = \pm \frac{\Delta U_{\text{макс}}}{U} 100\% = \pm 3,2\%$.

4.3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Номинальный ток амперметра $I_A = 1 \text{ А}$, а сопротивление шунта равно $R_{\text{ш}} = 0,5 \text{ Ом}$. Определить сопротивление амперметра R_A , если номинальное значение тока в нем было при общем токе цепи 5 А .

Ответ: 2 Ом .

Задача № 2. Номинальный ток амперметра равен 1 А , а его внутреннее сопротивление $0,08 \text{ Ом}$. Какой ток проходит в электрической цепи, если амперметр, зашунтированный сопротивлением $0,03 \text{ Ом}$, показывает ток $0,9 \text{ А}$?

Ответ: $3,3 \text{ А}$.

Задача № 3. К трансформатору тока 400/5 присоединен амперметр. Определить его показания при токе в первичной измерительной цепи: а) 400 А; б) 80 А.

Ответ: а) 5,0 А; б) 1,0 А.

Задача № 4. Вольтметр с внутренним сопротивлением $R_v = 50$ кОм рассчитан для измерения напряжения до 15 В. Определить значение добавочного резистора, чтобы с его помощью измерять напряжение 220 В.

Ответ: 683 кОм.

Задача № 5. К трансформатору напряжения 10000/100 присоединен вольтметр. Определить его показания при напряжении в первичной цепи, равном: а) 1 кВ; б) 6 кВ.

Ответ: а) 10 В, б) 60 В.

4.4. Контрольные вопросы

1. Какие измерительные механизмы используются в цепях постоянного тока, а какие – в цепях переменного тока?
2. Как устроены приборы выпрямительной и термоэлектрических систем?
3. В чем преимущества аналоговых электронных вольтметров по сравнению с электромеханическими?
4. Как расширить предел измерения вольтметра на переменном токе?
5. Как устроены аналоговые электронные вольтметры?
6. Как расширить предел измерения вольтметра на переменном токе?
7. Чем отличается методическая погрешность от инструментальной?
8. В чем преимущества цифровых вольтметров перед аналоговыми?
9. Как расширить предел измерения вольтметра на постоянном токе?
10. Как расширить предел измерения амперметров на постоянном токе?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Матвеев, Ю. В. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник / Ю. В. Матвеев. — Севастополь : Издательство Севастопольского государственного университета, 2019. — 295 с. : ил. ; 20 см. — Список сокращений: с. 10-11. — Библиография: с. 274-279. — 256.33 р. — Текст : непосредственный.
2. Сергеев А. Г. Метрология. Стандартизация. Сертификация [Текст]: учебник для вузов / А. Г. Сергеев, В. В. Терегеря. — М.: Логос, 2011. — 820 с.
3. Мишин В.М. Метрология. Стандартизация. Сертификация: учебник учебник для вузов / под ред. В.М. Мишин. æ М.: Юнити-Дана, 2012. æ 946 с.
4. Крылова Г.Д. Основы стандартизации, сертификации, метрологии: учебник для вузов / Г.Д. Крылова. — М.: Юнити-Дана, 2012. — 671с.
5. Угольников, А. В. Метрология. Электрические измерения : практикум / А. В. Угольников. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2019. — 140 с. — ISBN 978-5-4497-0019-3. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/82232.html> (дата обращения: 25.06.2024). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. — DOI: <https://doi.org/10.23682/82232>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Табличные данные для оценки случайных погрешностей
и статистической обработки результатов измерений

Таблица А.1 — Интеграл вероятности $P(t) = \Phi(t)$

t	$P(t)$	t	$P(t)$	t	$P(t)$	t	$P(t)$
0.00	0.00000	1.00	0.68269	2.00	0.95450	3.0	0.99730
0.05	0.03988	1.05	0.70628	2.05	0.95964	3.10	0.99806
0.10	0.07966	1.10	0.72867	2.10	0.96427	3.20	0.99863
0.15	0.11924	1.15	0.74986	2.15	0.96844	3.30	0.99903
0.20	0.15852	1.20	0.76986	2.20	0.97219	3.40	0.99933
0.25	0.19741	1.25	0.78870	2.25	0.97555	3.50	0.99953
0.30	0.23582	1.30	0.80640	2.30	0.97855	3.60	0.99968
0.35	0.27366	1.35	0.82298	2.35	0.98123	3.70	0.99978
0.40	0.31084	1.40	0.83849	2.40	0.98360	3.80	0.99986
0.45	0.34729	1.45	0.85294	2.45	0.98571	3.90	0.99990
0.50	0.38292	1.50	0.86635	2.50	0.98758	4.00	0.99994
0.55	0.41768	1.55	0.87886	2.55	0.98922	4.10	0.99996
0.60	0.45149	1.60	0.89040	2.60	0.99069	4.20	0.99997
0.65	0.48431	1.65	0.90106	2.65	0.99195	4.30	0.99999
0.70	0.51607	1.70	0.91087	2.70	0.99307	4.40	0.99999
0.75	0.54675	1.75	0.91988	2.75	0.99404	4.50	0.99999
0.80	0.57629	1.80	0.92814	2.80	0.99489		
0.85	0.60468	1.85	0.93569	2.85	0.99563		
0.90	0.63188	1.90	0.94257	2.90	0.99627		
0.95	0.65789	1.95	0.94882	2.95	0.99682		

Таблица А.2 — Интегральная функция нормального распределения

$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t
0,0005	-3,2905	0,35	-0,3853	0,75	+0,6745
0,005	-2,5750	0,40	-0,2533	0,80	+0,8416
0,01	-2,3267	0,45	-0,1257	0,85	+1,0364
0,05	-1,6449	0,50	-0,0000	0,90	+1,2816
0,10	-1,2816	0,50	+0,0000	0,95	+1,6449
0,15	-1,0364	0,55	+0,1257	0,99	+2,3267
0,20	-0,8416	0,60	+0,2533	0,995	+2,5750
0,25	-0,6745	0,65	+0,3853	0,9995	+3,2905
0,30	-0,5244	0,70	+0,5244		

Таблица А.3 — Интеграл вероятности по закону Стьюдента

Число опытов n	Значения t_{Σ} при P_{Σ}							
	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
2	1,000	1,376	1,963	3,078	6,134	12,706	31,821	63,657
3	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
4	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
5	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
6	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,570	3,365	4,032
7	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
8	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
9	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
10	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
12	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
14	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
16	0,691	0,866	1,074	1,340	1,753	2,131	2,602	2,947
20	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
23	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
25	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,429	2,797
30	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756

Таблица А.4 — Предельные значения коэффициента t_T для определения наличия промахов

Объем выборки n	Предельные значения t_T при уровне значимости q			
	0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,44	1,46	1,48
5	1,60	1,64	1,67	1,72
6	1,73	1,77	1,82	1,89
7	1,83	1,88	1,94	2,02
8	1,91	1,96	2,03	2,13
9	1,98	2,04	2,11	2,21
10	2,03	2,10	2,18	2,29
11	2,09	2,14	2,23	2,36
12	2,13	2,20	2,29	2,41
13	2,17	2,24	2,33	2,47
14	2,21	2,28	2,37	2,50
15	2,25	2,32	2,41	2,55
16	2,28	2,35	2,44	2,58
17	2,31	2,38	2,48	2,62
18	2,34	2,41	2,50	2,66
19	2,36	2,44	2,53	2,68
20	2,38	2,46	2,56	2,71

Таблица А.5 — Квантили распределения d для проверки согласия экспериментального распределения нормальному с помощью критерия 1

Объем выборки n	$d_2\left(\frac{q_1}{2}\right)$		$d_1\left(1 - \frac{q_1}{2}\right)$	
	0,01	0,05	0,95	0,99
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблица А.6 — Значения m_T и α , соответствующие различным n и q для проверки согласия экспериментального распределения нормальному с помощью критерия 2

Объем выборки n	m_T	α при уровне значимости q_2 равном		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11...14	1	0,99	0,98	0,97
15...20	1	0,99	0,99	0,98
21...22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24...27	2	0,98	0,98	0,97
28...32	2	0,99	0,98	0,97
33...35	2	0,99	0,98	0,98
36...49	2	0,99	0,99	0,98

**Матвеев Юрий Валентинович
Цалоев Владимир Муратович**

**МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
СУДОВЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Методические указания
к практическим занятиям*

В двух частях

Часть 1

В авторской редакции

Изд. № 208/2025. Объем 2,75 п. л. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,695.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»