

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Высшая технологическая школа
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ»

ИНЖЕНЕРНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Цифровое проектирование»

**РУКОВОДСТВО
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ
И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Учебное пособие

Севастополь
СевГУ
2026

УДК 531.01(075.8)
ББК 22.21я73
Р85

Р е ц е н з е н т ы :

К.Б. Матузаев - канд. техн. наук,
доцент кафедры «Ядерные энергетические установки»

Коллектив авторов:

Н.К. Корнеева, Л.Н. Пичугова, В.О. Пантель, Е.В. Глушкова

Р85 Руководство к выполнению контрольных и расчетно-графических работ по теоретической механике : учебное пособие / Севастопольский государственный университет, кафедра «Цифровое проектирование»; Н.К. Корнеева, Л.Н. Пичугова, В.О. Пантель, Е. В. Глушкова. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 51 с.: ил. – Текст: электронный.

Данное пособие призвано оказать студентам помощь в подготовке к выполнению зачётных контрольных заданий. В пособии приведены исходные данные заданий, даны рекомендации по выполнению и оформлению работ.

Предназначено для студентов направления подготовки 14.05.02 «Атомные станции, проектирование, эксплуатация и инжиниринг»; 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок»; профиль подготовки: 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 27.03.01 «Стандартизация и метрология»; 18.03.01 «Химическая технология»; 20.03.02 «Природообустройство и водопользование»; 08.03.01 «Строительство»; 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств; 26.03.02 Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры; 26.05.02 Проектирование, изготовление и ремонт энергетических установок; 26.05.07 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики и других специальностей, изучающих теоретическую, техническую и прикладную механику.

УДК 531.01(075.8)
ББК 22.21я73

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Цифровое проектирование», протокол № 2 от 17 сентября 2025 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	4
Предисловие.....	5
РАЗДЕЛ «СТАТИКА».....	7
ЗАДАЧИ С-1 ,С-2	7
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.....	7
Методические указания	8
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С-1	9
Исходные данные приведены в таблице 1.1.....	9
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С-2	11
Задача С-3.....	13
Определение опорных реакций балки, находящейся под действием произвольной плоской системы сил.....	13
Методические указания	14
Пример решения задачи С-3.....	14
ЗАДАЧА С-4.	17
ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ.....	17
Методические указания	17
РАЗДЕЛ «КИНЕМАТИКА»	23
Кинематический анализ плоского механизма.....	23
Методические указания	24
Примеры решения задач	26
РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА»	41
Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	41
Методические указания	42
Пример решения задачи.....	43

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Раздел «Статика»

$\overline{R}$ — равнодействующая, размерность — κH ;
 X_K — проекция силы на ось ox , размерность — κH ;
 Y_K — проекция силы на ось oy , размерность — κH ;
 Z_K — проекция силы на ось oz , размерность — κH ;
 $m_O(\overline{F_K})$ — момент силы относительно точки O , размерность — κHm ;
 $m_X(\overline{F_K})$ — момент силы относительно оси ox , размерность — κHm ;
 $m_Y(\overline{F_K})$ — момент силы относительно оси oy , размерность — κHm ;
 $m_Z(\overline{F_K})$ — момент силы относительно оси oz , размерность — κHm ;
 x_c, y_c, z_c — координаты центра тяжести тела, размерность — κHm ;
 q_i — интенсивность равномерно распределенной нагрузки — $\kappa H/m$;
 ℓ_i — длина участка балки — m ;
 m — момент пары сил — κHm ;
 $\overline{R}^*$ — главный вектор — κH ;
 $\overline{M}_O$ — главный момент системы сил относительно начала координат O — κHm ;
 H — характеристическое произведение — $\kappa H^2 m$

Раздел «Кинематика»

$\overline{V_A}, \overline{V_B}, \overline{V_C}, \overline{V_K}, \overline{V_D}$ — скорости отмеченных точек — m/c ;
 ω_2, ω_3 — угловые скорости ведомых звеньев механизма в его заданном положении — $рад/c$;
 $\overline{W_A}, \overline{W_B}, \overline{W_C}, \overline{W_K}, \overline{W_D}$ — ускорения отмеченных точек — m/c^2 ;
 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ — угловые ускорения ведомых звеньев механизма в его заданном положении — $рад/c^2$.

Раздел «Динамика»

m_1, m_2, m_3, m_4 — массы соответственно тела A, B, C , и D ;
 R_1, R_2, R_3, R_4 — радиусы тел;
 i — радиус инерции тела C или B относительно оси вращения, проходящей через центр масс (в элементах 1,2,5,6,9,10,14,15);
 α, β — углы наклона плоскостей к горизонту;
 f — коэффициент трения скольжения тела (в элементах 11, 12);
 f_K — коэффициент трения качения тел C (или тела A в системах, содержащих элементы 5,6,7);
 s — путь центра масс тела A .

ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышение качества подготовки будущих инженеров АЭС в значительной степени зависит от постановки преподавания фундаментальных дисциплин, к которым относятся теоретическая механика. Изучение теоретической механики имеет большое значение для познания и объяснения многих явлений окружающего нас мира.

Вместе с тем теоретическая механика является научным фундаментом многих областей современной техники, в том числе и атомной. Её законы и методы широко используются в таких важных общетехнических и специальных дисциплинах как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидродинамика, теория турбин, теория автоматического регулирования и управления атомными энергетическими установками и др., которые изучаются в институте и формируют будущего инженера как специалиста.

Изучение теоретической механики даёт тот минимум фундаментальных знаний, на базе которых выпускник института сможет самостоятельно овладеть новейшими достижениями науки и техники, которые позволят ему не только умело эксплуатировать сложную современную атомную технику, но непрерывно совершенствовать и развивать её дальше.

В зависимости от рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на три раздела:

1. статику (С);
2. кинематику (К);
3. динамику (Д).

Одним из важнейших видов самостоятельной работы студентов при изучении теоретической механики является выполнение зачётных контрольных заданий по узловым темам учебной программы. Они служат для закрепления и углубления знаний студентов основных положений теории, развития их навыков в решении разнообразных технических задач.

Прежде чем приступать к самостоятельному выполнению предлагаемых заданий, студент должен изучить основы теории соответствующего раздела.

В теоретической механике широко используется богатый математический аппарат при исследовании тех или иных механических явлений. Поэтому для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Но при изучении механики очень важно за математическим описанием механического явления видеть и понимать физическую сущность этого явления. В связи с этим особое внимание при изучении материала по тому или иному учебнику следует обращать на формулировки определений, законов, теорем и т. п., не зазубривать их, а добиваться понимания их смысла. Ни в коем случае нельзя пренебрегать доказательствами, без которых нельзя установить границы применения конечных выводов и формул. К тому же доказательства учат рассуждать, делать логические выводы, активизирует мыслительную деятельность будущего инженера на получение новых результатов в различных областях техники.

По каждому разделу курса студент должен составить конспект, что важно

не только для успешного выполнения контрольных заданий, но и сдачи экзамена.

Зачётные контрольные задания должны быть выполнены аккуратно, сопровождаться краткими объяснениями производимых операций, ссылками на соответствующие законы и формулы. Предлагаемые задачи сначала нужно решать в общем виде, а затем численные расчёты производить с использованием вычислительных средств, своевременно представлять их на кафедру для проверки.

РАЗДЕЛ «СТАТИКА»

ЗАДАЧИ С-1, С-2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Равновесие плоской системы параллельных сил";
- развить у студентов навыки в применении аналитических условий равновесия плоской системы параллельных сил в двух формах.

Задание

В каждой задаче рассматривается равновесие балки АВС, находящейся под действием заданных нагрузок.

В задаче С-1 балка (рисунок 1.1) имеет одну опору — жесткую заделку (ЖЗ) на одном из концов А или С.

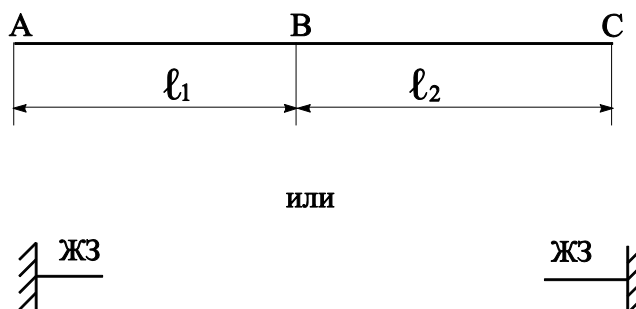


Рисунок 1.1 — Консольная балка с жёсткой заделкой на одном из её концов

В задаче С-2 балка (рисунок 1.2) имеет две опоры — шарнирно-неподвижную опору (ШНО) и шарнирно-подвижную опору (ШПО) в указанных точках из трех возможных точек А, В и С.

В обеих задачах заданными нагрузками являются:

4. сосредоточенная сила $\bar{F}$;
5. пара с моментом m ;
6. равномерно распределённая нагрузка (РРН) с интенсивностью q_i (i – номер участка балки).

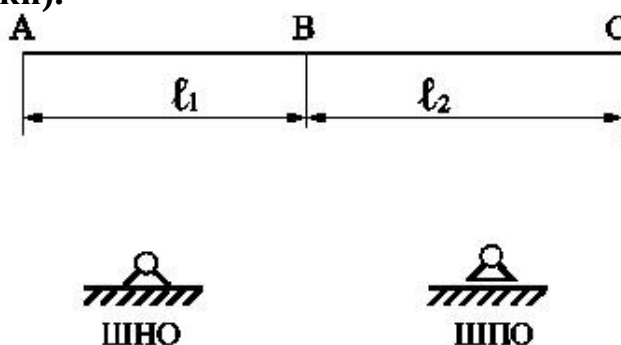


Рисунок 1.2 — Балка на двух опорах

Сила и момент пары приложены на границах участков, а распределённая нагрузка действует на весь участок с указанным номером.

По условию задачи требуется определить опорные реакции балки.

Методические указания

Расчетно-графическая или контрольная работы выполняются на отдельных листах формата А4.

1. Изобразить в произвольном масштабе схему балки с опорами, учитывая при этом что длины участков балки $AB = \ell_1$ и $BC = \ell_2$ задаются формулой

$$\ell_i = s_i.$$

где i – номер участка;

s_i – коэффициент выбирается по номеру варианта из таблицы, выданной преподавателем.

2. Изобразить заданные нагрузки.

Проекция сосредоточенной силы $\bar{F}$ на ось Ay и её модуль выражаются соответственно по формулам

$$F_y = k_1; \quad F = |k_1|,$$

где k_1 – коэффициент выбирается по номеру варианта из таблицы, выданной преподавателем.

Эта сила приложена в указанной точке и направлена по вертикали вверх, если $k_1 > 0$, и вниз, если $k_1 < 0$.

Значение момента пары сил выражается по формуле

$$m = k_2.$$

Этот момент прикладывается в указанном сечении балки, а его направление определяется знаком коэффициента, выбранного по номеру варианта из таблицы, выданной преподавателем.

Если $k_2 > 0$ момент пары положительный, силы пары стремятся повернуть против часовой стрелки, если $k_2 < 0$ момент пары отрицательный, силы пары стремятся повернуть по часовой стрелке.

Равномерно распределённая нагрузка, действующая на указанные участки, задаётся интенсивностью q_i и определяется формулой

$$q_i = n_i.$$

где i – номер участка.

Эта нагрузка считается направленной вверх, если коэффициент пропорциональности $n_i > 0$, и вниз, если $n_i < 0$.

3. К системе активных сил и реакций связей, действующих на балку, следует применять такую форму условий равновесия, чтобы в каждое уравнение входило только по одной неизвестной величине.

За центры моментов рекомендуется выбрать точки приложения связей.

Пример решения задачи С-1

Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

№ п/п	Длины		Связи	Нагрузки					
	ℓ_1	ℓ_2	ЖЗ	F_y		m		РРН	
	s_1	s_2	точка	Точка	k_1	точка	k_2	n_1	n_2
35	2	2	С	В	-1	А	3	-2	0

Определить Y_C, m_C .

Решение

1. Объект равновесия: балка ABC с жёсткой заделкой на конце C (рисунок 1.3).

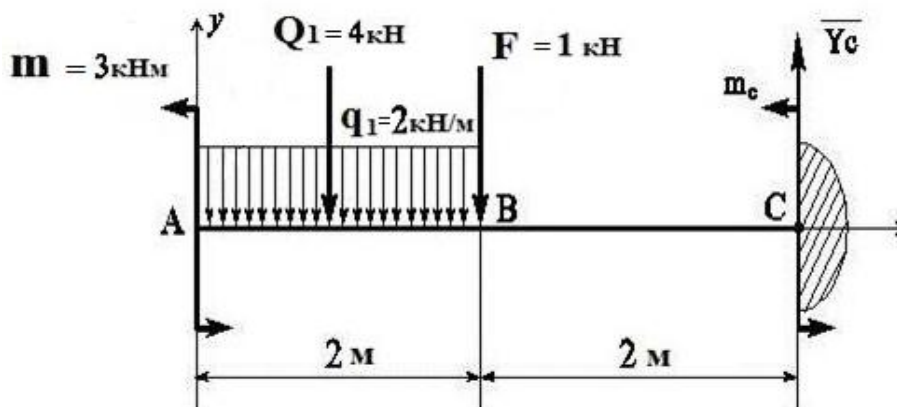


Рисунок 1.3 — Силевая схема балки

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 = 2 \text{ м}, \quad \ell_2 = s_2 = 2 \text{ м}.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков AB и BC.

Чтобы сократить записи при составлении условий равновесия рекомендуется последовательно изображать силы и моменты пар соответственно прямолинейными и круговыми стрелками и рядом с ними записывать их модули.

2. Силевая схема балки, освобождённой от связей

а) активные силы:

- сила $\bar{F}$ приложена в точке B, причём

$$F_y = k_1 = -1 \text{ кН},$$

и тем самым она направлена вниз;

По модулю эта сила равна $F = 1 \text{ кН}$

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении A и равным

$$m = k_2 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эта пара стремится повернуть балку против часовой стрелки;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 = -2 \text{ кН/м}$$

и направленной вниз.

Её заменяем равнодействующей силой $\overline{Q}_1$, проекция которой равна произведению интенсивности на длину нагружённого участка

$$Q_{1y} = q_1 \cdot \ell_1 = -4 \text{ кН}$$

Сила $\overline{Q}_1$ приложена в середине этого участка и направлена вниз.

По модулю эта сила равна $Q_1 = 4 \text{ кН}$

- равномерно распределённая нагрузка на 2-м участке отсутствует.

Данная система активных сил – система параллельных сил (пару сил можно повернуть так, чтобы её силы стали вертикальными).

б) Реакции связей жесткой заделки: вертикальная реакция $\overline{Y}_c (\overline{X}_c = 0)$, реактивный момент в заделке m_c .

3. Условия равновесия.

Воспользуемся первой формой условий равновесия плоской системы параллельных сил.

$$\begin{aligned} \sum Y_k &= 0; & -Q_1 - F + Y_c &= 0; \\ \sum m_c(\overline{F}_k) &= 0; & m + Q_1 \cdot 3 + F \cdot 2 + m_c &= 0. \end{aligned}$$

Значения в уравнения подставляем по модулю.

$$\begin{aligned} -4 - 1 + Y_c &= 0; \\ 3 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + m_c &= 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} Y_c - 5 &= 0; \\ m_c + 17 &= 0. \end{aligned}$$

Так как в полученную систему двух уравнений входят две неизвестные величины Y_c и m_c , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из первого уравнения находим

$$Y_c = 5 \text{ кН};$$

а из второго уравнения следует

$$m_c = -17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательный знак означает, что в действительности реактивная пара стремиться повернуть балку по часовой стрелке.

5. Проверка.

Составляем уравнения моментов относительно точки А

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad 3 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 17 = 0$$

Получили тождество $0=0$.

Следовательно, искомые величины определены правильно.

Ответы: $Y_c = 5 \text{ кН}, m_c = -17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Пример решения задачи С-2

Исходные данные приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

№ п/п	Длины		Связи		Нагрузки					
	ℓ_1	ℓ_2	ШНО	ШПО	F_y		m		РРН	
	s_1	s_2	Точка		точка	k_1	Точка	k_2	n_1	n_2
35	2	1	А	В	С	-1	В	2	-3	2

Определить Y_A, Y_B .

Решение

1. Объект равновесия: балка ABC с шарнирно-неподвижной опорой в точке А и шарнирно-подвижной опорой в точке В (рисунок 1.4).

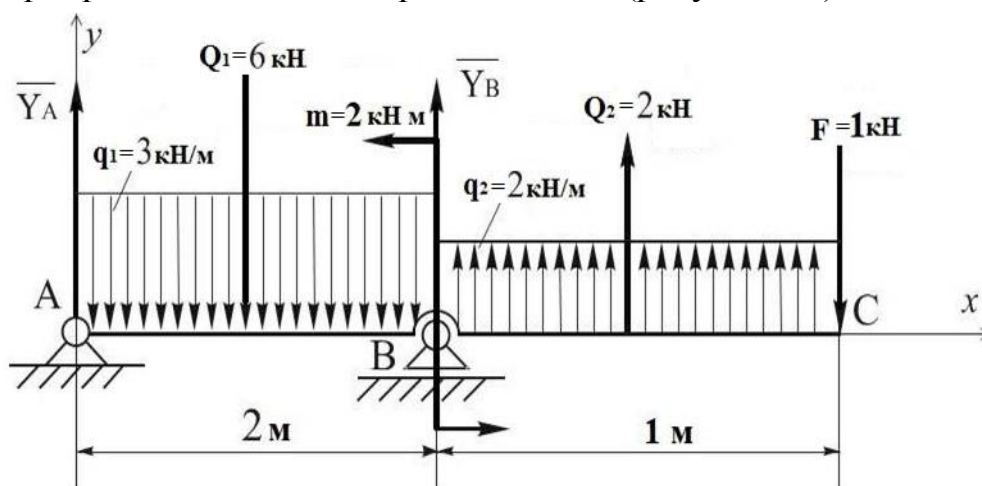


Рисунок 1.4 — Силевая схема балки

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 = 2 \text{ м}, \quad \ell_2 = s_2 = 2 \text{ м}.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков АВ и ВС.

Чтобы сократить записи при составлении условий равновесия рекомендуется последовательно изображать силы и моменты пар соответственно прямолинейными и круговыми стрелками и рядом с ними записывать их модули.

2. Силевая схема балки, освобождённой от связей:

а) активные силы:

- сила $\bar{F}$ приложена в точке С, причём

$$F_y = k_1 = -1 \text{ кН}$$

и тем самым она направлена вниз;

По модулю эта сила равна $F = 1 \text{ кН}$

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении B и равным

$$m = k_2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эта пара стремится повернуть балку против часовой стрелки;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 = -3 \text{ кН/м}$$

и направленной вниз. Её заменяем равнодействующей $\bar{Q}_1$, проекция которой равна произведению интенсивности на длину нагруженного участка

$$Q_{1y} = q_1 \cdot 2\ell_1 = -6 \text{ кН},$$

Сила $\bar{Q}_1$ приложена в середине этого участка.

По модулю эта сила равна $Q_1 = 6 \text{ кН}$.

На 2-м участке нагрузка направлена вверх, а её интенсивность равна

$$q_2 = n_2 = 2 \text{ кН/м}$$

и тем самым для её равнодействующей $\bar{Q}_2$ получаем

$$Q_{2y} = q_2 \cdot \ell_1 = 2 \text{ кН},$$

По модулю эта сила равна $Q_2 = 2 \text{ кН}$

Данная система активных сил — система параллельных сил (пару сил можно повернуть так, чтобы её силы стали вертикальными).

б) реакции связей: вертикальные реакции $\bar{Y}_A$ ($\bar{X}_A = 0$), $\bar{Y}_B$.

Предположительно считаем $Y_A > 0$, $Y_B > 0$.

3. Условия равновесия.

Воспользуемся второй формой условий равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_K) &= 0; & -Q_1 \cdot 1 + m + Y_B \cdot 2 + Q_2 \cdot 2,5 - F \cdot 3 &= 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_K) &= 0; & -Y_A \cdot 2 + Q_1 \cdot 1 + m + Q_2 \cdot 0,5 - F \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

Значения в уравнения подставляем по модулю.

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_K) &= 0; & -6 \cdot 1 + 2 + Y_B \cdot 2 + 2 \cdot 2,5 - 1 \cdot 3 &= 0; \\ \sum m_B(\bar{F}_K) &= 0; & -Y_A \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1 &= 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} Y_B \cdot 2 - 2 &= 0; \\ -Y_A \cdot 2 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

Так как в полученную систему двух уравнений входят две неизвестные величины Y_A и Y_B , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из первого уравнения находим

$$Y_B = 1 \text{ кН},$$

а из второго уравнения следует

$$Y_A = 4 \text{ кН}.$$

5. Проверка.

Составляем уравнения проекций сил на ось Ay :

$$\sum Y_k = 0; \quad 4 - 6 + 1 + 2 - 1 = 0;$$

Получили тождество $0=0$.

Следовательно, искомые величины определены правильно.

Ответ: $Y_A = 4$ кН, $Y_B = 1$ кН.

ЗАДАЧА С-3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Равновесие произвольной плоской системы сил";
- развить у студентов навыки в применении аналитических условий равновесия плоской системы сил в различных формах.

Задание

Балка $ABCD$ (рисунок 1.5) имеет одну жёсткую заделку на одном из её концов A , D или две опоры: шарнирно-неподвижную (ШНО) и шарнирно-подвижную (ШПО) в указанных точках из четырех возможных A , B , C и D .

Если по условию задачи точки для опор A и B , используем левые картинки (рисунок 1.5), если C и D используем правые картинки (см. рисунок 1.5).

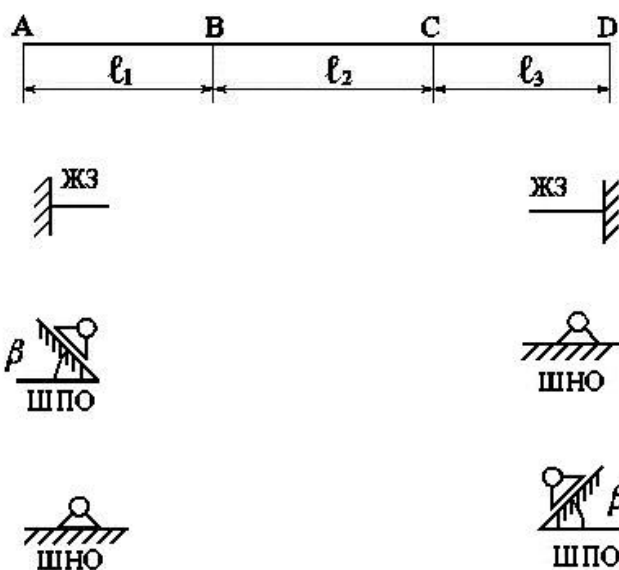


Рисунок 1.5 — Балка с возможными опорами

Заданными нагрузками являются:

- сосредоточенная сила $\bar{F}$ с углом наклон α ;

- пара с моментом m ;
- равномерно распределённая нагрузка (РРН) с интенсивностью q_i (i – номер участка балки).

Сила и момент пары приложены на границах участков, а распределённая нагрузка действует на весь участок с указанным номером.

Сила направлена от балки, угол наклона находится в границах от 0 до 360 градусов.

По условиям задачи требуется определить опорные реакции балки.

Методические указания

Все указания к решению задач С-1 и С-2 остаются справедливыми и для данной задачи С-3. Дополнительно следует учесть, что угол наклона α силы $\bar{F}$ отсчитывается от оси Ax против хода часовой стрелки.

Пример решения задачи С-3

Исходные данные приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

№ п/п	Длины			Связи			Нагрузка							
	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ЖЗ	ШНО	ШПО	F_y			m		РРН		
	s_1	s_2	s_3	точка		β	точка	k_1	α	точка	k_2	n_1	n_2	n_3
	1	2	1	—	A	D 45 ⁰	C	1	210 ⁰	D	-1	2	0	-1

Определить X_A, Y_A, R_D .

Решение

1. Объект равновесия: балка $ABCD$ с шарнирно-неподвижной опорой в точке A и шарнирно-подвижной опорой в точке D (рисунок 1.6).

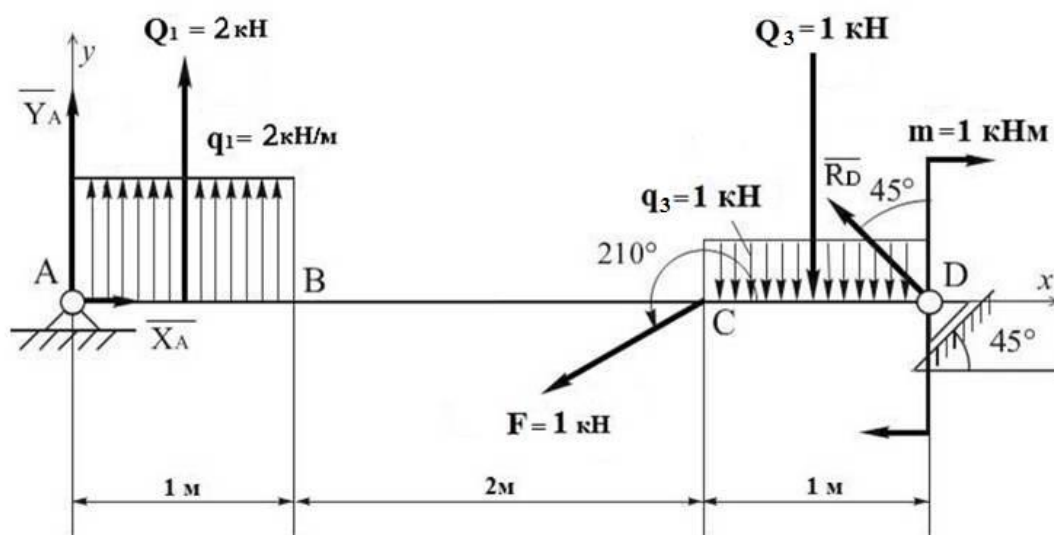


Рисунок 1.6 — Силевая схема балки

Длины участков соответственно равны

$$\ell_1 = s_1 = 1 \text{ м}, \quad \ell_2 = s_2 = 2 \text{ м}, \quad \ell_3 = s_3 = 2 \text{ м}.$$

Балку вычерчиваем в произвольном масштабе с указанием длин участков AB , BC и CD .

2. Силовая схема балки, освобождённой от связей:

а) активные силы:

- сила $\overline{F}$ приложена в точке C , причём

$$F_y = k_1 = 1 \text{ кН}$$

и составляет с осью Ax угол $\alpha = 210^\circ$.

Силу $\overline{F}$ направляем от балки под заданным углом.

- пара сил с моментом m , приложенным в сечении D и равным

$$m = k_2 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$|m| = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эта пара стремится повернуть балку по часовой стрелке;

- равномерно распределённая нагрузка на 1-м участке с интенсивностью, равной

$$q_1 = n_1 = 2 \text{ кН/м}$$

и направленной вверх. Её заменяем равнодействующей $\overline{Q}_1$, приложенной в середине нагруженного участка:

$$Q_1 = q_1 \cdot \ell_1 = 2 \text{ кН},$$

- равномерно распределённая нагрузка на 3-м участке с интенсивностью

$$q_3 = n_3 = -1 \text{ кН/м}$$

которая направлена вниз. Её заменяем равнодействующей, приложенной в середине нагруженного участка:

$$Q_3 = |q_3| \cdot \ell_3 = 1 \text{ кН};$$

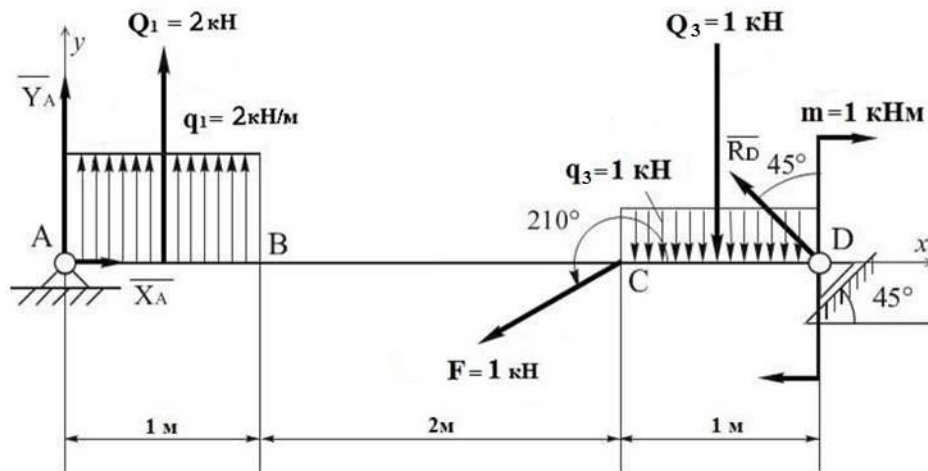
б) реакции связей:

- реакция шарнирно-неподвижной опоры A представляем в виде двух составляющих $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$;

- реакция $\overline{R}_D$ шарнирно-подвижной опоры D направлена по нормали к опорной плоскости и составляет с вертикалью угол $\beta = 45^\circ$.

3. Условия равновесия.

Воспользуемся основной формой условий равновесия произвольной плоской системы сил:



$$\begin{aligned}\sum X_k &= 0; & X_A - F \cdot \cos 30 - R_D \cdot \sin 45 &= 0; \\ \sum Y_k &= 0; & Y_A + Q_1 - F \cdot \sin 30 - Q_3 + R_D \cos 45 &= 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0; & Q_1 \cdot 0,5 - F \cdot 3 \cdot \sin 30 - Q_3 \cdot 3,5 + R_D \cdot 4 \cdot \cos 45 - m &= 0.\end{aligned}$$

Значения в уравнения подставляем по модулю.

$$\begin{aligned}X_A - 1 \cdot 0,866 - R_D \cdot 0,707 &= 0; \\ Y_A + 2 - 1 \cdot 0,5 - 1 + R_D \cdot 0,707 &= 0; \\ 2 \cdot 0,5 - 1 \cdot 3 \cdot 0,5 - 1 \cdot 3,5 + R_D \cdot 4 \cdot 0,707 - 1 &= 0\end{aligned}$$

Так как в полученную систему трёх уравнений входят три неизвестные величины X_A, Y_A и R_D , то данная задача статически определимая.

4. Решение системы уравнений равновесия.

Из уравнения моментов определяем

$$R_D = 1,77 \text{ кН}$$

Из уравнений проекций находим

$$X_A = 2,12 \text{ кН}, \quad Y_A = -0,75 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что фактически направление этой реакции противоположно принятому.

5. Проверка.

Составляем уравнение

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Y_A \cdot 1 - Q_1 \cdot 0,5 - F \cdot 2 \cdot \sin 30 - Q_3 \cdot 2,5 + R_D \cdot 3 \cdot \cos 45 - m = 0;$$

$$0,75 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 - 1 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1 \cdot 2,5 + 1,77 \cdot 3 \cdot 0,707 - 1 = 0;$$

После подстановки значений получили тождество $0=0$.

Следовательно, искомые величины определены правильно.

Ответ: $X_A = 2,12 \text{ кН}, \quad Y_A = -0,75 \text{ кН}, \quad R_D = 1,77 \text{ кН}.$

ЗАДАЧА С-4

ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Приведение неуравновешенной пространственной системы сил к простейшему виду";
- развить у студентов навыки в аналитическом определении простейшей эквивалентной системы сил.

Задание

К вершинам прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны a, b и c , приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ (рисунок 1.7).

Считая заданными модули и направления этих сил, а также длины ребер параллелепипеда, требуется установить простейший вид указанной системы сил.

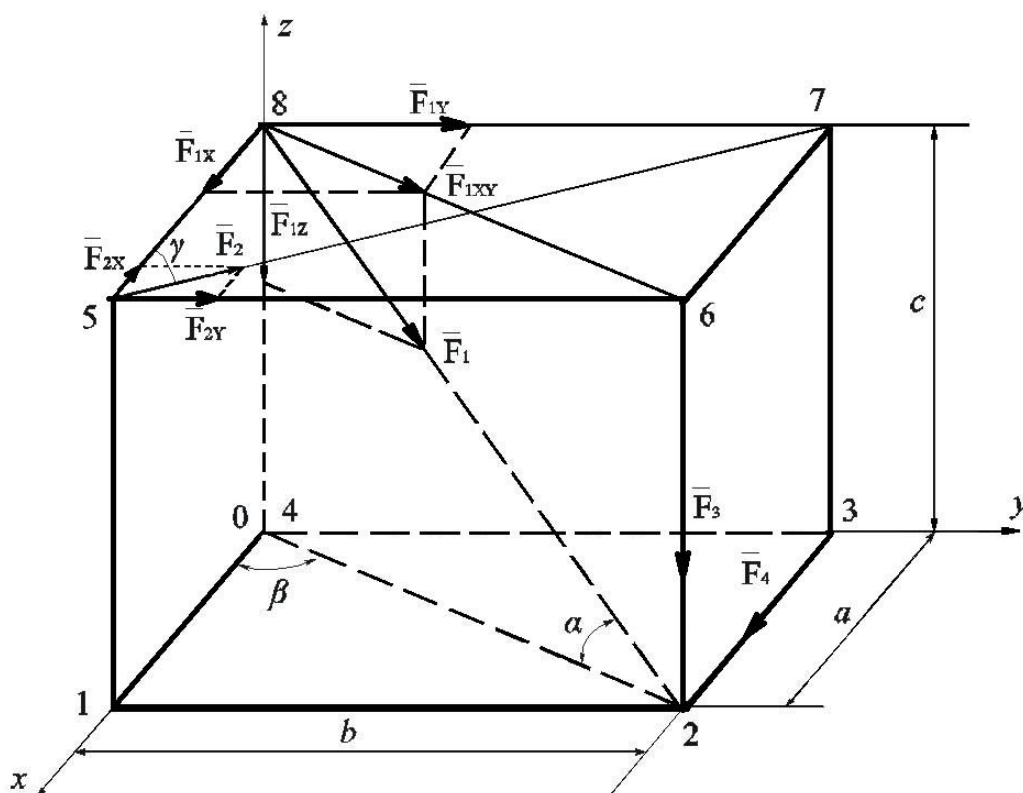


Рисунок 1.7 – Заданная система сил

Методические указания

Расчетно-графическая или контрольная работы выполняются на отдельных листах формата А4.

1. Вычертить расчетную схему в произвольном масштабе (параллелепипед), изобразить заданные силы.
2. Определить модуль и направление главного вектора $\vec{R}^*$ системы сил и показать его на чертеже.

3. Определить модуль и направление главного момента $\bar{M}_O$ системы сил относительно начала координат O и показать его на чертеже.

4. Вычислить характеристическое произведение H системы сил, а также угол φ между главным вектором и главным моментом.

5. Установить простейший вид данной системы сил. Если система сил приводится к динамическому винту, то выполнить следующий пункт.

6. Вычислить наименьшее значение M^* главного момента системы сил.

7. Определить характер динамического винта.

8. Определить положение точки, через которую проходит ось динамического винта.

Пример решения задачи С-4

Исходные данные помещены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

№ п/п	Длины			Силы системы (модуль, кН, направление)							
	a	b	c	F_1		F_2		F_3		F_4	
35	0.5	0.6	0.4	25	8-2	10	5-7	40	6-2	75	3-2

Решение.

1. Силовая схема объекта.

По данным таблицы 1.4 изображаем параллелепипед с приложенными к нему силами $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ и $\bar{F}_4$ (рисунок 1.7). Вершину 4 параллелепипеда примем за начало системы координат, оси которой направим по его рёбрам.

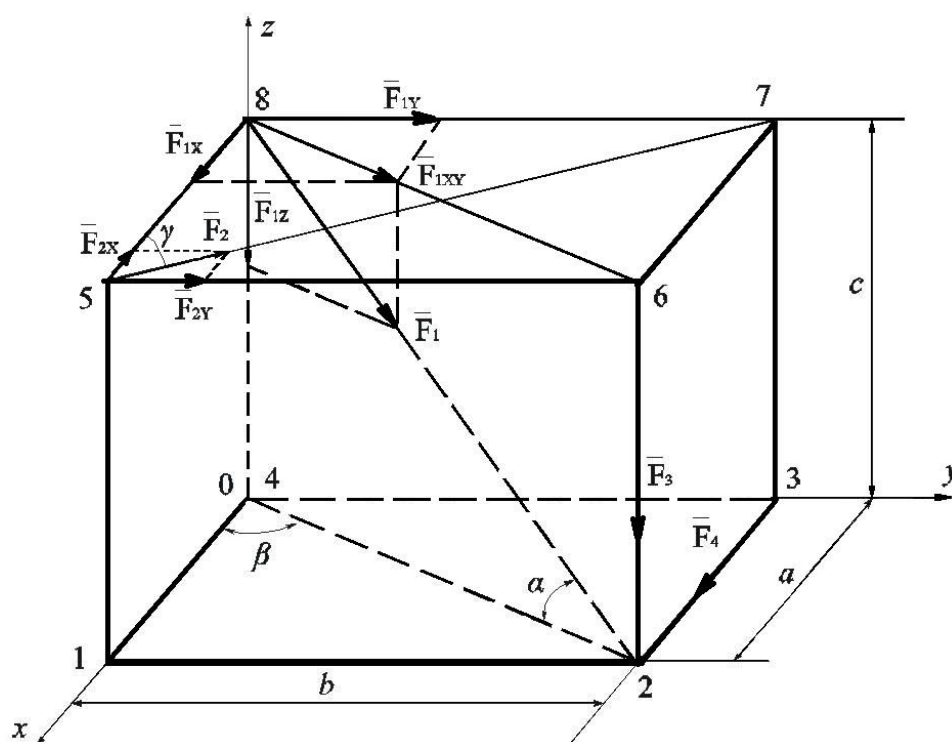


Рисунок 1.8

2. Определение главного вектора системы сил.

Проекции главного вектора $\bar{R}^*$ определяются формулами

$$\begin{aligned} R_x^* &= \sum_{k=1}^4 F_{kx}; \\ R_y^* &= \sum_{k=1}^4 F_{ky}; \\ R_z^* &= \sum_{k=1}^4 F_{kz}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вычисляем проекции каждой силы на выбранные координатные оси (рисунок 1.8).

При вычислении проекций силы $\bar{F}_1$ целесообразно выполнить двойное проецирование. Сначала эту силу спроецируем на плоскость, в которой находится верхняя грань параллелепипеда. В результате получаем вектор, модуль которого равен

$$F_{1xy} = F_1 \cos \alpha.$$

Затем его проецируем на ребра 8 – 5 и 8 – 7:

$$F_{1x} = F_{1xy} \cos \beta = F_1 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$F_{1y} = F_{1xy} \sin \beta = F_1 \cos \alpha \sin \beta.$$

Очевидно,

$$F_{1z} = F_1 \sin \alpha.$$

Для остальных сил находим

$$F_{2x} = -F_2 \cos \gamma; \quad F_{3x} = 0; \quad F_{4x} = F_4;$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \gamma; \quad F_{3y} = 0; \quad F_{4y} = 0;$$

$$F_{2z} = 0; \quad F_{3z} = -F_3; \quad F_{4z} = 0.$$

Подставляя проекции сил в формулы (1.1), получаем

$$R_x^* = F_1 \cos \alpha \cos \beta - F_2 \cos \gamma + F_4;$$

$$R_y^* = F_1 \cos \alpha \sin \beta + F_2 \sin \gamma;$$

$$R_z^* = -F_1 \sin \alpha - F_3.$$

Из рисунка (1.7) видно, что

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos \gamma = \cos \beta; \quad \sin \gamma = \sin \beta.$$

Для заданных числовых значений величин получаем

$$R_x^* = 82,84 \text{ Н}; \quad R_y^* = 24,78 \text{ Н}; \quad R_z^* = -51,40 \text{ Н}.$$

Модуль и направляющие косинусы главного вектора равны

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = 100,6 \text{ Н};$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x^*}{R^*} = 0,824; \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y^*}{R^*} = 0,246; \quad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z^*}{R^*} = -0,511.$$

3. Определение главного момента системы сил относительно точки О.

Сначала находим главные моменты системы сил относительно координатных осей по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=1}^4 m_x(\bar{F}_k); \\ M_y &= \sum_{k=1}^4 m_y(\bar{F}_k); \\ M_z &= \sum_{k=1}^4 m_z(\bar{F}_k). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для этого вычисляем моменты каждой силы относительно координатных осей.

При определении моментов сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ воспользуемся теоремой Вариньона, согласно которой момент данной силы относительно оси равен сумме моментов её составляющих относительно этой же оси. Подчеркиваем, если какая – либо составляющая силы (или сама сила) параллельна данной оси или её линия действия пересекает ось, то момент такой составляющей относительно этой оси равен нулю.

Таким образом, получаем для силы $\bar{F}_1$:

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_1) &= m_x(\bar{F}_{1y}) = -|F_{1y}| \cdot c = -F_1 \cos \alpha \sin \beta \cdot c; \\ m_y(\bar{F}_1) &= m_y(\bar{F}_{1x}) = |F_{1x}| \cdot c = F_1 \cos \alpha \cos \beta \cdot c; \\ m_z(\bar{F}_1) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_2) &= m_x(\bar{F}_{2y}) = -|F_{2y}| \cdot c = -F_2 \sin \gamma \cdot c; \\ m_y(\bar{F}_2) &= m_y(\bar{F}_{2x}) = -|F_{2x}| \cdot c = -F_2 \cos \gamma \cdot c; \\ m_z(\bar{F}_2) &= m_z(\bar{F}_{2y}) = |F_{2y}| \cdot a = F_2 \sin \gamma \cdot a; \end{aligned}$$

Для сил $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_4$ моменты равны

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}_3) &= -F_3 \cdot b; & m_x(\bar{F}_4) &= 0; \\ m_y(\bar{F}_3) &= F_3 \cdot a; & m_y(\bar{F}_4) &= 0; \\ m_z(\bar{F}_3) &= 0; & m_z(\bar{F}_4) &= -F_4 \cdot b. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (1.2) находим главные моменты системы сил относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} M_x &= -F_1 \cos \alpha \sin \beta \cdot c - F_2 \sin \gamma \cdot c - F_3 \cdot b \\ M_y &= F_1 \cos \alpha \sin \beta \cdot c - F_2 \cos \gamma \cdot c - F_3 \cdot a \\ M_z &= F_1 \sin \alpha \cdot a - F_4 \cdot b \end{aligned}$$

Для заданных числовых значений величин получаем

$$M_x = -33,91 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_y = 23,14 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_z = -41,11 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Модуль и направляющие косинусы главного момента системы сил относительно центра О равны

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 58,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\cos(\overline{M_O}, \bar{i}) = \frac{M_x}{M_O} = -0,583; \quad \cos(\overline{M_O}, \bar{j}) = \frac{M_y}{M_O} = 0,398; \quad \cos(\overline{M_O}, \bar{k}) = \frac{M_z}{M_O} = -0,708.$$

4. Определение характеристического произведения системы сил и угла между главным вектором и главным моментом

Как известно,

$$H = \overline{R}^* \cdot \overline{M_O} = R_x^* \cdot M_x + R_y^* \cdot M_y + R_z^* \cdot M_z = -120,59 \text{ Н}^2 \cdot \text{м};$$

$$\cos \varphi = \frac{H}{R^* \cdot M_O} = -0,021; \quad \varphi = 91,18^\circ.$$

5. Определение простейшего вида данной системы сил.

Так как главный вектор и главный момент не равны нулю и не перпендикулярны друг другу (рисунок 1.9), то данная система четырёх сил приводится к динамическому винту $D(\overline{R}, \overline{M}')$.

6. Определение наименьшего значения главного момента системы сил.

Воспользуемся формулой

$$M^* = |M_O \cos \varphi| = \frac{|H|}{R^*} = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

7. Определение характера динамического винта.

Так как $H < 0$, то винт является левым.

Сила этого винта равна главному вектору

$$R = R^* = 100,6 \text{ Н},$$

а момент его пары равен наименьшему моменту системы сил

$$M' = M^* = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

8. Определение положения точки, через которую проходит ось динамического винта.

Ось винта параллельна главному вектору $\overline{R}^*$ и проходит через точку О', которая находится на перпендикуляре к плоскости $(\overline{R}^*; \overline{M_O})$ на расстоянии

$$d = OO' = \frac{|M_O \sin \varphi|}{R^*} = 0,58 \text{ м}.$$

Полученные данные вносим в таблицу.

R_x^*	R_y^*	R_z^*	R^*	M_x	M_y	M_z	M_O	H	M'	d
H	H	H	H	$\text{Н} \cdot \text{м}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	$\text{Н}^2 \cdot \text{м}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	м
82,84	24,78	- 51,4	100,6	- 33,91	23,14	-41,11	58,1	-120,59	1,2	0,58

Изображаем простейший вид системы на отдельном листе в масштабе, приняв угол xOy равным 135° и искажение по оси Ox равным 1:2.

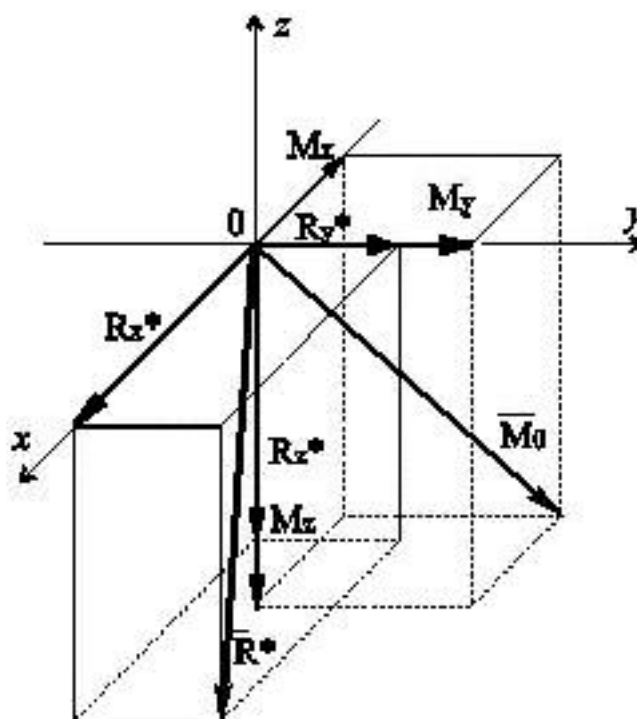


Рисунок 1.9 — Главный вектор и главный момент заданной системы сил

Вывод: данная система сил эквивалентна левому динамическому винту ($H < 0$), у которого сила $R = R^* = 100,6 \text{ Н}$, а момент пары $M' = 1,2 \text{ Н}$.

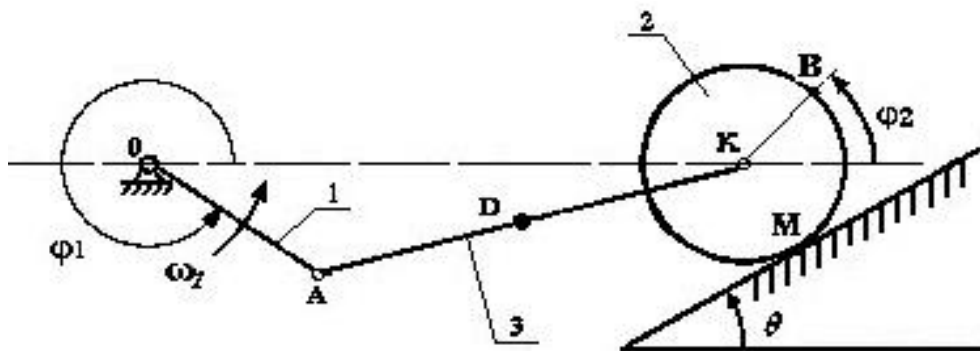


Рисунок 2.3 — Схема 3 заданного плоского механизма

Шестеренка 2 катится по неподвижной опоре без скольжения.

В схемах 1 и 2 ползун С может занимать одно из двух горизонтальных положений С(1) или С(3), одно из двух вертикальных положений С(2) или С(4). Точка D является серединой шатуна BC или AK.

Угловые координаты φ_1, φ_2 считаются положительными, если они отчитываются от соответствующих прямых против хода часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с конца оси z. Аналогичное правило применяется и для угловых скоростей и угловых ускорений.

Исходные данные (расчётная схема механизма и необходимые числовые величины) приведены в сводной таблице, подготовленной для каждого класса с помощью ЭВМ. Распечатки с вариантами задания на РГР выдаются преподавателями кафедры.

По условию задачи требуется:

- используя теорему о скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса, определить сначала геометрическим методом, а затем аналитическим методом скорости v_A, v_B, v_C, v_K, v_D отмеченных точек и угловые скорости ω_2, ω_3 ведомых звеньев механизма в его заданном положении;

- используя теорему об ускорении любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и двух ускорений этой точки при вращении фигуры вокруг полюса, определить сначала геометрическим методом, а затем аналитическим методом ускорения w_A, w_B, w_C, w_K, w_D отмеченных точек и угловые ускорения $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ ведомых звеньев механизма в его заданном положении.

Методические указания

Расчетно-графическая или контрольная работы выполняются на отдельных листах формата А4.

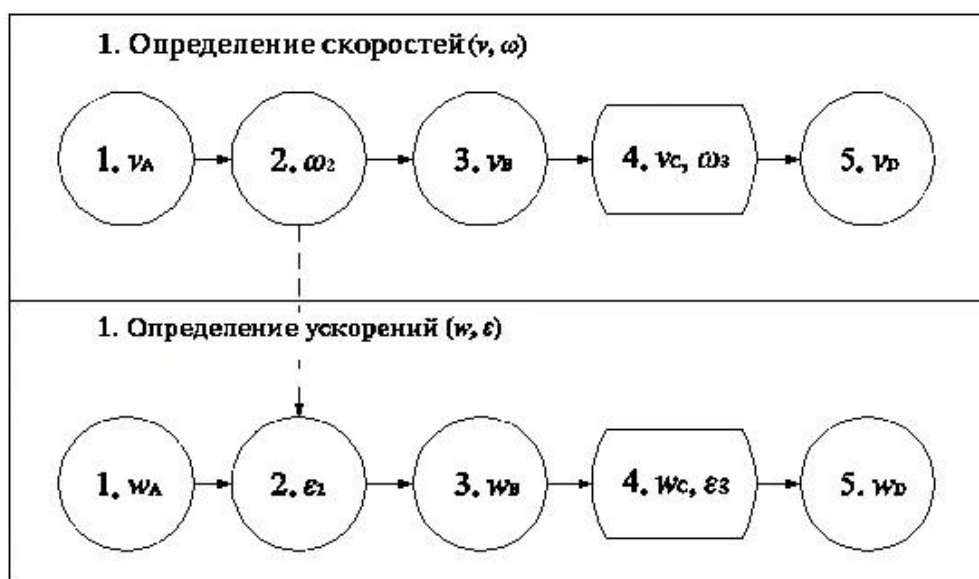
1. Схему механизма, скорости и ускорения всех отмеченных точек вычерчивать в выбранных масштабах, которые должны быть указаны на всех чертежах.

2. Найденные векторы скоростей отмеченных точек изображать прямолинейными стрелками красного цвета, а их векторы ускорений — стрелками зелёного или синего цвета.

3. Направления угловых скоростей и угловых ускорений всех звеньев изображать круговыми стрелками как на чертежах, так и над буквами в окончательных ответах.

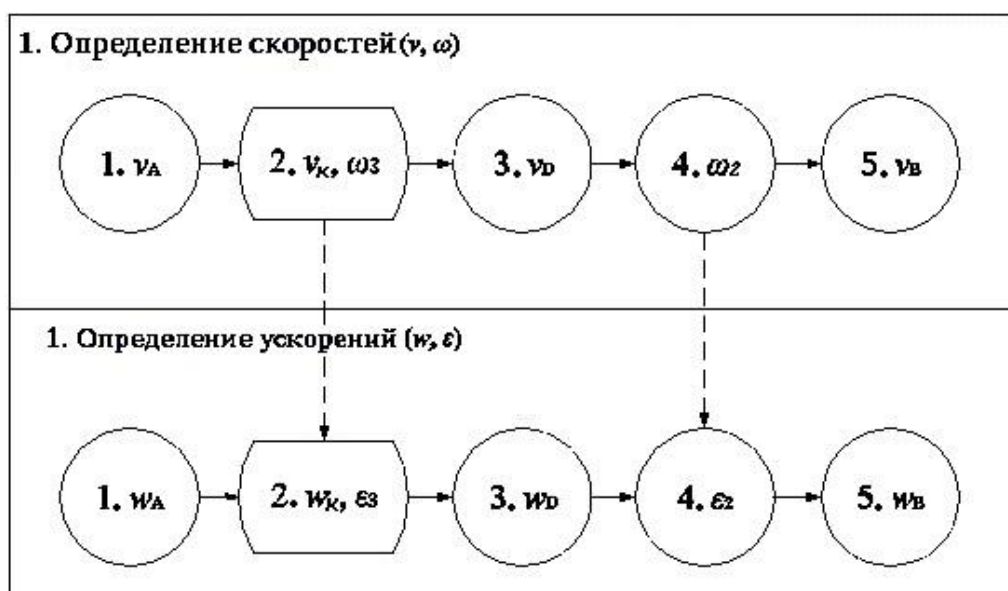
4. Расчёт искомых величин рекомендуется выполнять в последовательности, указанной в графах № 1,2.

Граф № 1 (для схем 1 и 2)



5. Результаты расчёта оформить в виде таблицы, как указано в примере решения задачи ниже.

Граф № 2 (для схемы 3)



Примеры решения задач

Задача К-1-2. Исходные данные приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

№ п/п	№ схемы	Точка С	φ_1 , град.	ОА, см.	АВ, см.	φ_2 град.	ВС, см.	ω_1 рад/с.
35	1	(1)	30	16	9	90	55	7

Определить в заданном положении механизма:

$$\begin{aligned} v_A, \quad v_B, \quad v_C, \quad v_D; \\ \omega_2, \quad \omega_3; \\ w_A, \quad w_B, \quad w_C, \quad w_D; \\ \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Решение.

1. Вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе и вводим систему координат Охуз (рисунок 2.4).

Размеры звеньев механизма переводим в метры.

Дальнейшие операции производим согласно графу № 1.

2. Определение скоростей отмеченных точек и угловых скоростей звеньев механизма.

Скорость точки (пальца) А кривошипа ОА.

Эта скорость является вращательной вокруг О и равна

$$v_A = |\omega_1| \cdot OA = 7 \cdot 0,16 = 1,12 \text{ м/с.}$$

Найденную скорость (и все последующие) изображаем в выбранном масштабе красной стрелкой на чертеже схемы механизма.

Угловая скорость подвижной шестерёнки 2.

Воспользуемся тем, что для звена 2 известны скорости двух точек: $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_M = 0$ (шестерёнка катится без скольжения).

Принимая точку А за полюс, скорость точки М представляем в виде

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = 0,$$

причём

$$\bar{v}_{MA} \perp AM; \quad v_{MA} = |\omega_2| \cdot AM. \quad (2.1)$$

Откуда следует

$$\bar{v}_{MA} = -\bar{v}_A \Rightarrow v_{MA} = v_A, \quad (2.2)$$

то есть вращательная скорость точки М вокруг А равна по модулю скорости точки А и противоположна ей по направлению (см. рисунок 2.4).

Из последних формул получаем

$$|\omega_2| : \frac{v_{MA}}{AM} = \frac{v_A}{AM} = \frac{1,12}{0,09} = 12,44 \text{ рад/с.}$$

По вращательной скорости $\bar{v}_{MA}$ устанавливаем, что шестерёнка 2 в данном положении поворачивается против часовой стрелки. Этот факт отмечаем круговой стрелкой на чертеже схемы механизма и над буквой в ответе.

Скорость точки В.

Эту скорость определяем как сумму двух скоростей:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

В этой формуле оба вектора в её правой части известны по модулю и направлению. Действительно, вектор $\vec{v}_A$ найден выше, а вращательная скорость $\vec{v}_{BA}$ по модулю равна

$$v_{BA} = v_{MA} = v_A$$

и направлена перпендикулярно АВ в сторону вращения шестерёнки 2.

Сначала скорость точки В находим геометрическим методом.

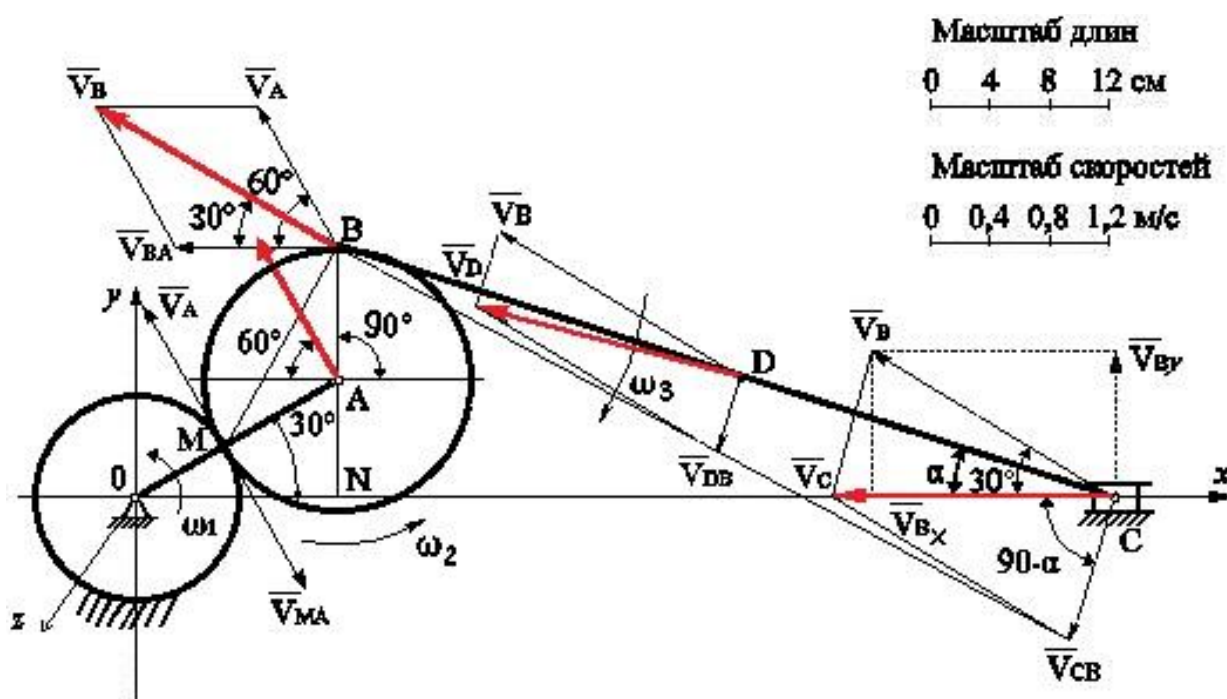


Рисунок 2.4 – Линейные и угловые скорости

Для этого строим параллелограмм на векторах $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{BA}$. Вектор $\vec{v}_B$ изображается диагональю этого параллелограмма. Измеряя длину этой диагонали и учитывая масштаб построения, получаем

$$v_B = 1,90 \text{ м/с}.$$

При определении v_B аналитическим методом можно воспользоваться теоремой косинусов или, что более эффективно, составить проекции вектора $\vec{v}_B$ на координатные оси:

$$v_{Bx} = -v_A \cdot \cos 60^\circ - v_{BA};$$

$$v_{By} = v_A \cdot \sin 60^\circ.$$

Подставляем численные значения.

$$v_{Bx} = -1,12 \cdot 0,5 - 1,12 = -1,68 \text{ м/с};$$

$$v_{By} = 1,12 \cdot 0,866 = 0,97 \text{ м/с}.$$

По этим проекциям находим

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 1,94 \text{ м/с}.$$

Скорость точки С и угловая скорость шатуна ВС.

Для шатуна ВС, совершающего сложное плоское движение, известны скорость точки В по модулю и направлению и скорость точки С только по направлению (точка С как центр ползуна движется вдоль направляющей).

Записываем уравнение

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \quad (2.3)$$

причём

$$\vec{v}_{CB} \perp BC; \quad v_{CB} = |\omega_3| \cdot BC. \quad (2.4)$$

Построим с помощью уравнения (2.3) в выбранном масштабе параллелограмм так, чтобы его диагональю была скорость $\vec{v}_C$, а сторонами — скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_{CB}$. Для этого проводим через точку С прямую, перпендикулярную ВС (по ней направляем вектор $\vec{v}_{CB}$), а затем через конец вектора $\vec{v}_B$ прямую, параллельную первой прямой до встречи с осью направляющей ползуна.

Чтобы закончить построение, следует через точку встречи провести прямую, параллельную вектору $\vec{v}_B$.

Из построенного параллелограмма видны истинные направления векторов $\vec{v}_C$ и $\vec{v}_{CB}$.

Измеряя линейкой длину стороны и диагонали параллелограмма, получаем

$$v_{CB} = 1,02 \text{ м/с}; \quad v_C = 1,99 \text{ м/с}.$$

Теперь найдем эти величины аналитическим методом. Учитывая, что

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Bx} + \vec{v}_{By},$$

формуле (2.1) придаём вид

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{Bx} + \vec{v}_{By} + \vec{v}_{CB}.$$

На рисунке (2.4) векторы $\vec{v}_{Bx}, \vec{v}_{By}$ изображаем пунктирными стрелками. Затем спроецируем последнее равенство на координатные оси:

$$\begin{aligned} -v_C &= -|\vec{v}_{Bx}| - v_{CB} \cdot \cos(90^\circ - \alpha); \\ 0 &= |\vec{v}_{By}| - v_{CB} \cdot \sin(90^\circ - \alpha). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Применим формулы приведения

$$\begin{aligned} -v_C &= -|\vec{v}_{Bx}| - v_{CB} \cdot \sin \alpha; \\ 0 &= |\vec{v}_{By}| - v_{CB} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Из треугольника BNC видно, что

$$\sin \alpha = \frac{BN}{BC} = \frac{AB + AN}{BC}.$$

Так как

$$AN = OA \cdot \sin 30^\circ,$$

то

$$\sin \alpha = \frac{AB + OA \cdot \sin 30^0}{BC}.$$

$$\sin \alpha = \frac{0,09 + 0,16 \cdot 0,5}{0,55} = 0,309.$$

Для заданных числовых значений величин получаем

$$\sin \alpha = 0,309, \quad \cos \alpha = 0,951, \quad \alpha = 18^0.$$

Разрешается угол α определять на чертеже с помощью транспортира.

Решая уравнения (2.5) находим

$$v_{CB} = \frac{0,97}{0,951} = 1,02 \text{ м/с}.$$

Из формулы (2.4) следует

$$|\hat{\omega}_3| \frac{v_{CB}}{CB} = \frac{1,02}{0,55} = 1,85 \text{ рад/с}.$$

Направление этой угловой скорости определяем с помощью вектора $\vec{v}_{CB}$.

Из первого уравнения системы (2.5) находим

$$v_C = 1,68 + 1,02 \cdot 0,309 = 2,00 \text{ м/с}$$

Скорость точки D.

По известным $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_{CB}$ можно найти скорость точки D из уравнения

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}, \quad (2.6)$$

причём

$$\vec{v}_{DB} \perp BD, \quad v_{DB} = 0,5 v_{CB},$$

так как эта точка является серединой шатуна.

Для точки D на рисунке 2.4 строим параллелограмм скоростей, из которого с помощью линейки определяем

$$v_D = 1,90 \text{ м/с}.$$

Для аналитического определения этой скорости спроецируем равенство (2.6) на координатные оси:

$$v_{Dx} = -|v_{Bx}| - v_{DB} \cdot \sin \alpha;$$

$$v_{Dy} = |v_{By}| - v_{DB} \cdot \cos \alpha.$$

Подставляем численные значения.

$$v_{Dx} = -1,68 - 0,51 \cdot 0,309 = -1,84 \text{ м/с};$$

$$v_{Dy} = 0,97 - 0,51 \cdot 0,951 = 0,49 \text{ м/с}.$$

Следовательно,

$$v_D = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 1,90 \text{ м/с}.$$

2. Определение ускорений отмеченных точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Снова вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе (рисунок 2.5).

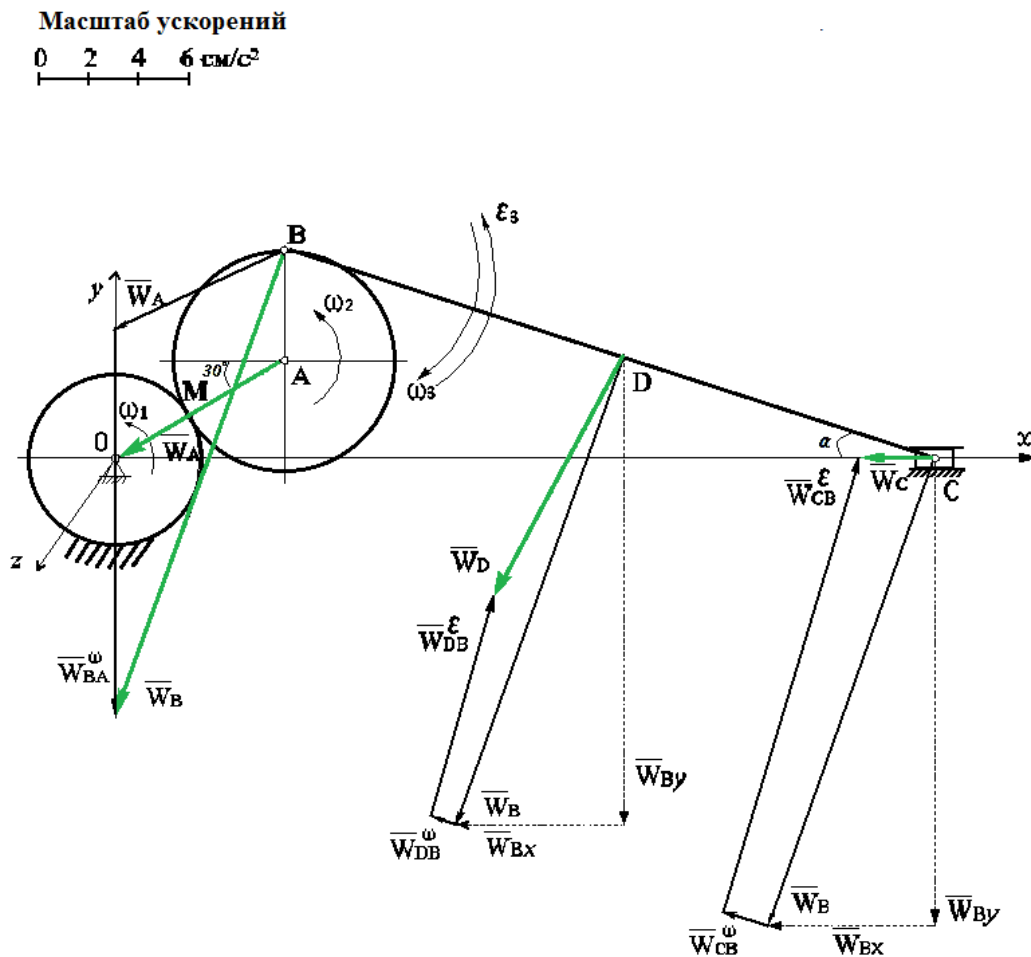


Рисунок 2.5 — Линейные и угловые ускорения

Ускорение точки А.

Воспользуемся формулой, определяющей ускорение точки вращающегося тела

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega} + \overline{w}_A^{\epsilon}.$$

Так как $\omega_1 = \text{const}$, то $\epsilon_1 = 0$ и ,следовательно, вращательное ускорение $w_A^{\epsilon} = \epsilon_1 \cdot OA = 0$. Поэтому

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega}.$$

Вычисляем модуль центростремительного ускорения

$$w_A^{\omega} = \omega_1^2 \cdot OA;$$

Таким образом,

$$w_A^{\omega} = 7^2 \cdot 0,16 = 7,84 \text{ м} / \text{с}^2;$$

$$w_A = 7,84 \text{ м} / \text{с}^2 \quad \overline{w}_A^{\omega} \downarrow \downarrow AO$$

Вектор $\overline{w}_A$ изображаем в выбранном масштабе на рисунке (2.5) зеленой (синей) стрелкой.

Угловое ускорение подвижной шестерёнки 2.

Из условия $v_M = 0$ были получены формулы (2.1) и (2.2),из которых следует равенство

$$|\omega_2| \cdot AM = v_A,$$

или, так как $v_A = |\omega_1| \cdot OA$,

$$|\omega_2| \cdot AM = |\omega_1| \cdot OA \quad (2.7)$$

Заметим, что формула (2.7) справедлива не только для данного положения механизма, но и для любого его положения. В самом деле, в любом положении шестерёнки 2 скорость точки М будет равна нулю, а расстояние АМ есть величина постоянная, всё время равная радиусу этой шестерёнки.

Так как $\omega_1 = \text{const}$, то из формулы (2.7) следует, что $\omega_2 = \text{const}$ и тем самым

$$\varepsilon_2 = 0.$$

Ускорение точки В.

Для определения этого ускорения выбираем за полюс точку А. Ускорение $\overline{w}_B$ складывается из трех ускорений

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\omega} + \overline{w}_{BA}^{\varepsilon}.$$

По найденным значениям $\omega_2 = 12,44 \text{ рад/с}$ и $\varepsilon_2 = 0$ вычисляем

$$w_{BA}^{\omega} = \omega_2^2 \cdot AB; \quad w_{BA}^{\omega} \downarrow\downarrow BA,$$

$$w_{BA}^{\omega} = 12,44^2 \cdot 0,09 = 13,93 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{BA}^{\varepsilon} = \varepsilon_2 \cdot AB = 0.$$

Таким образом,

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{\omega}.$$

Строим в выбранном масштабе треугольник ускорений, из которого с помощью линейки находим

$$w_B = 19,10 \text{ м/с}^2.$$

Для аналитического определения модуля вектора ускорения точки В воспользуемся методом проекций:

$$w_{Bx} = -w_A \cdot \cos 30^\circ;$$

$$w_{By} = -w_A \cdot \sin 30^\circ - w_{BA}^{\omega}.$$

Подставляем численные значения.

$$w_{Bx} = -7,84 \cdot 0,866 = -6,79 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{By} = -7,84 \cdot 0,5 - 13,93 = -17,86 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = 19,10 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки С и угловое ускорение шатуна ВС.

В качестве полюса выбираем точку В и представляем ускорение $\overline{w}_C$ в виде

$$\overline{w}_C = \overline{w}_{Bx} + \overline{w}_{By} + \overline{w}_{CB}^{\omega} + \overline{w}_{CB}^{\varepsilon} \quad (2.8)$$

На рисунке 2.5 для точки С строим согласно формуле (2.8) в выбранном масштабе многоугольник ускорений. Для этого изображаем известный вектор

$\vec{w}_{By}$, к концу которого прикладываем также известный вектор $\vec{w}_{Bx}$, а к его концу — вектор $\vec{w}_{CB}^{\omega}$; модуль этого вектора равен

$$w_{CB}^{\omega} = \omega_3^2 \cdot BC = 1,88 м / с^2; \quad \vec{w}_{CB}^{\omega} \uparrow\uparrow CB.$$

Затем через конец последнего вектора проводим прямую, перпендикулярную шатуну ВС и определяющую линию действия вектора $\vec{w}_{CB}^{\varepsilon}$. Наконец, через точку С проводим прямую, параллельную СО и определяющую линию действия вектора $\vec{w}_C$. Точка пересечения построенных линий определяет концы векторов $\vec{w}_{CB}^{\varepsilon}$ и $\vec{w}_C$.

С помощью линейки находим

$$w_C = 2,86 м / с^2; \quad w_{CB}^{\varepsilon} = 18,10 м / с^2.$$

Находим эти же величины аналитическим методом. Заметим, что если предварительно многоугольник ускорений для точки С не построен, то истинное направление векторов $\vec{w}_{CB}^{\varepsilon}$ и $\vec{w}_C$ нам неизвестно. Поэтому эти векторы направляют по их линиям действия в любую на выбор сторону. Если в ходе решения получим ту или иную величину с отрицательным знаком, то это означает, что истинное направление соответствующего вектора противоположно выбранному направлению.

Направим эти векторы, например, так как указано на рисунке 2.5. Затем проецируем равенство (2.8) на координатные оси:

$$\begin{aligned} -w_C &= -|w_{Bx}| - w_{CB}^{\omega} \cdot \cos \alpha + w_{CB}^{\varepsilon} \cdot \sin \alpha; \\ 0 &= -|w_{By}| + w_{CB}^{\omega} \cdot \sin \alpha + w_{CB}^{\varepsilon} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Решая последние уравнения, получаем

$$w_{CB}^{\varepsilon} = \frac{|w_{By}| - w_{CB}^{\omega} \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Подставляем численные значения.

$$w_{CB}^{\varepsilon} = \frac{17,86 - 1,88 \cdot 0,309}{0,951} = 18,19 м / с^2;$$

$$w_C = 6,79 + 1,88 \cdot 0,951 - 18,19 \cdot 0,309 = 2,84 м / с^2;$$

$$w_{CB}^{\varepsilon} = 18,19 м / с^2; \quad w_C = 2,84 м / с^2.$$

По найденному вращательному ускорению точки С находим угловое ускорение шатуна

$$|\hat{\varepsilon}_3| : \frac{w_{CB}^{\varepsilon}}{BC} = \frac{18,19}{0,55} = 33,80 рад / с^2.$$

Направление этого углового ускорения определяем по истинному направлению вектора $\vec{w}_{CB}^{\varepsilon}$. Круговые стрелки у величин ω_3 и ε_3 , изображённые на рисунке 2.5, показывают, что шатун в данном положении вращается замедленно.

Ускорение точки D.

Ускорение этой точки определяем по формуле

$$\overline{w_D} = \overline{w_{Bx}} + \overline{w_{By}} + \overline{w_{DB}^\omega} + \overline{w_{DB}^\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Так как точка D является серединой шатуна, то

$$w_{DB}^\omega = 0,5 w_{CB}^\omega = 0,94 м / с^2; \quad \overline{w_{DB}^\omega} \downarrow\downarrow DB;$$

$$w_{DB}^\varepsilon = 0,5 w_{CB}^\varepsilon = 9,10 м / с^2; \quad \overline{w_{DB}^\varepsilon} \perp DB.$$

Теперь все векторы в правой части формулы (2.9) известны по модулю и направлению. Строим многоугольник ускорений для точки D, из которого получаем

$$w_D = 9,94 м / с^2.$$

Подтвердим полученный результат аналитическим методом:

$$w_{Dx} = -|\overline{w_{Bx}}| - w_{DB}^\omega \cdot \cos \alpha + w_{DB}^\varepsilon \cdot \sin \alpha;$$

$$w_{Dy} = -|\overline{w_{By}}| + w_{DB}^\omega \cdot \sin \alpha + w_{DB}^\varepsilon \cdot \cos \alpha;$$

Решая уравнения, получаем

$$w_{Dx} = -6,79 - 0,94 \cdot 0,951 + 9,10 \cdot 0,309 = -4,82 м / с^2; \quad ;$$

$$w_{Dy} = -17,86 + 0,94 \cdot 0,309 + 9,10 \cdot 0,951 = -8,73 м / с^2. \quad ;$$

$$w_{Dx} = -4,82 м / с^2;$$

$$w_{Dy} = -8,73 м / с^2;$$

$$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = 9,97 м / с^2.$$

$$w_D = 9,97 м / с^2.$$

Найденные величины помещаем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Метод	v_A	$ \omega_2 $	v_B	v_C	$ \omega_3 $	v_D	w_A	ε_2	w_B	w_C	$ \varepsilon_3 $	w_D
Геом.	1,12	—	1,90	1,99	—	1,90	7,84	—	19,10	2,86	—	9,94
Анал.	1,12	12,44	1,94	2,00	1,85	1,90	7,84	0	19,10	2,84	33,80	9,97

Задача К-3. Исходные данные приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

№ п/п	№ схемы	θ град	φ_1 град.	ОА см.	АК см.	φ_2 град.	ВК см.	ω_1 рад/с.
35	3	30	210	18	75	210	18	6

Определить в заданном положении механизма:

$$v_A, \quad v_K, \quad v_D, \quad v_B,$$

$$\omega_2, \quad \omega_3,$$

$$w_A, \quad w_K, \quad w_D, \quad w_B.$$

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3.$$

Решение.

Вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе и вводим систему координат Кху (рисунок 2.6).

Дальнейшие операции производим согласно годографу №2.

1. Определение скоростей отмеченных точек и угловых скоростей звеньев механизма.

Скорость точки (пальца) А кривошипа ОА.

Эта скорость является вращательной вокруг О и равна

$$v_A = |\omega_1| \cdot OA = 6 \cdot 0,18 = 1,08 \text{ м/с.}$$

Найденную скорость (и все последующие) изображаем в выбранном масштабе красной стрелкой на чертеже схемы механизма.

Скорость точки К и угловая скорость шатуна АК.

Для шатуна, совершающего сложное плоское движение, известны скорость точки А по модулю и направлению и скорость точки К по направлению (точка К как центр колеса движется параллельно опорной плоскости).

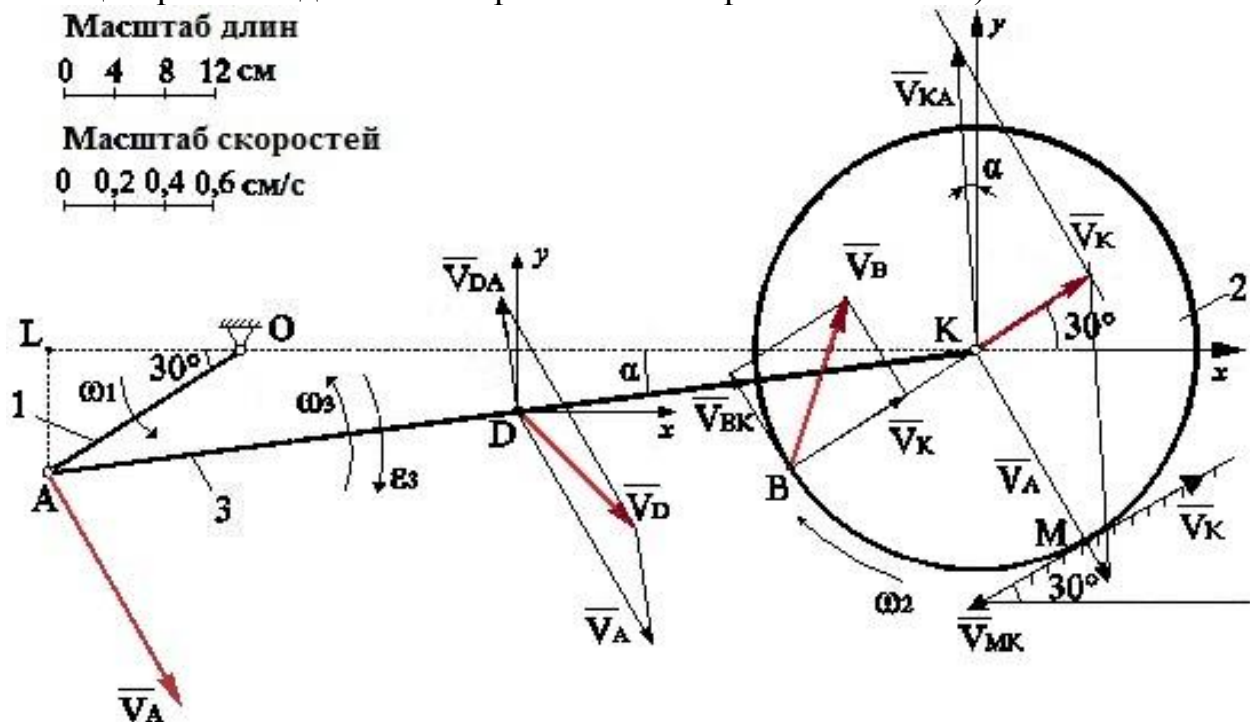


Рисунок 2.6 – Линейные и угловые скорости

Выбирая за полюс точку А, записываем уравнение

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA}, \quad (2.10)$$

причём

$$\vec{v}_{KA} \perp AK, \quad v_{KA} = |\omega_3| \cdot AK. \quad (2.11)$$

Сначала скорость точки К находим геометрическим методом. Для этого строим согласно уравнению (2.10) в выбранном масштабе на скоростях $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{KA}$ параллелограмм, диагональ которого изображает вектор $\vec{v}_K$.

Из построенного параллелограмма видны истинные направления скоростей $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_{KA}$. Измеряя линейкой длину стороны и диагонали в нём, получаем с учётом принятого масштаба

$$v_{KA} = 1,18 \text{ м/с}, \quad v_K = 0,46 \text{ м/с.}$$

Для определения этих же величин аналитическим методом спроецируем векторное равенство (2.10) на координатные оси системы Kxy:

$$\begin{aligned} v_K \cos 30^\circ &= v_A \cos 60^\circ - v_{KA} \sin \alpha; \\ v_K \sin 30^\circ &= -v_A \sin 60^\circ + v_{KA} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из рисунка замечаем, что

$$\sin \alpha = \frac{AL}{AK} = \frac{OA \sin 30^\circ}{AK} = \frac{0,18 \cdot 0,5}{0,75} = 0,12$$

и тем самым $\alpha = 7^\circ$. Разрешается угол определять на чертеже с помощью транспортира.

Решим систему уравнений (2.12) совместно, методом уравнивая коэффициентов, умножив второе уравнение на $\sqrt{3}$ и вычтем из первого уравнения второе.

$$\begin{aligned} v_K \cos 30^\circ &= v_A \cos 60^\circ - v_{KA} \sin \alpha; \\ v_K \sin 30^\circ \sqrt{3} &= -v_A \sin 60^\circ \sqrt{3} + v_{KA} \cos \alpha \sqrt{3}. \end{aligned}$$

получаем

$$0 = v_A (\cos 60^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ) - v_{KA} (\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha).$$

откуда

$$v_{KA} = \frac{v_A (\cos 60^\circ + \sqrt{3} \sin 60^\circ)}{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha};$$

Из первого уравнения находим v_K

$$v_K = \frac{v_A \cos 60^\circ - v_{KA} \sin \alpha}{\cos 30^\circ}.$$

Подставляем численные значения.

$$\begin{aligned} v_{KA} &= \frac{1,08(0,5 + 1,73 \cdot 0,866)}{0,12 + 1,73 \cdot 0,993} = 1,17 \text{ м/с}; \\ v_K &= \frac{1,08 \cdot 0,5 - 1,17 \cdot 0,12}{0,866} = 0,46 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Из формулы (2.11) следует

$$|\hat{\omega}_3| \frac{v_{KA}}{AK} = \frac{1,17}{0,75} = 1,57 \text{ рад/с}.$$

По направлению вращательной скорости $\bar{v}_{KA}$ определяем, что в данном положении механизма шатун АК поворачивается против часовой стрелки.

Скорость точки D.

По известным скоростям $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{DA}$ находим скорость точки D из уравнения $\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA}$,

причём $\bar{v}_{DA} \perp AD$, $v_{DA} = 0,5 v_{CA} = 0,585 \text{ м/с}$, так как эта точка является серединой шатуна АК.

В параллелограмме, построенном согласно последнему уравнению, измеряем линейкой длину диагонали, которая с учётом масштаба определяет модуль скорости точки D

$$v_D = 0,60 \text{ м/с}.$$

Для аналитического определения этой же величины спроецируем векторное равенство на координатные оси системы Dxy:

$$v_{Dx} = v_A \cos 60^\circ - v_{DA} \sin \alpha;$$

$$v_{Dy} = -v_A \sin 60^\circ + v_{DA} \cos \alpha.$$

Подставляем численные значения.

$$v_{Dx} = 1,08 \cdot 0,5 - 0,585 \cdot 0,12 = 0,46 \text{ м/с};$$

$$v_{Dy} = -1,08 \cdot 0,866 + 0,585 \cdot 0,993 = -0,35 \text{ м/с}.$$

Откуда

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = 0,59 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость катка.

Воспользуемся тем, что для него известны скорости двух точек: $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_M = 0$ (каток катится без скольжения). Принимаем точку К за полюс и представляем скорость точки М в виде

$$\vec{v}_M = \vec{v}_K + \vec{v}_{MK} = 0,$$

причём

$$\vec{v}_{MK} \perp KM, \quad v_{MK} = |\omega_2| \cdot KM. \quad (2.13)$$

Откуда следует

$$\vec{v}_{MK} = -\vec{v}_K \Rightarrow v_{MK} = v_K, \quad (2.14)$$

то есть вращательная скорость точки М вокруг точки К равна по модулю скорости точки К и противоположна по направлению (см. рисунок 2.6).

Откуда получаем

$$|\omega_2| : \frac{v_{MK}}{KM} = \frac{v_K}{KM} = \frac{0,46}{0,18} = 2,56 \text{ рад/с}.$$

Вращательная скорость $\vec{v}_{MK}$ показывает, что каток в данном положении поворачивается по часовой стрелке.

Скорость точки В.

Эту скорость определяем как сумму двух скоростей

$$\vec{v}_B = \vec{v}_K + \vec{v}_{BK},$$

причём

$$\vec{v}_{BK} \perp KB, \quad v_{BK} = v_{MK} = 0,46 \text{ м/с}.$$

Как видно из рисунка 2.6, в данном случае $\vec{v}_{BK} \perp \vec{v}_K$, $v_{BK} = v_K$ и, следовательно, скорость $\vec{v}_B$ изображается диагональю квадрата, длина которой с учётом масштаба определяет модуль этой скорости:

$$v_B = 0,65 \text{ м/с}.$$

Эту скорость можно найти по теореме Пифагора

$$v_B = \sqrt{v_K^2 + v_{BK}^2} = 0,65 \text{ м/с}.$$

2. Определение ускорений отмеченных точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Снова вычерчиваем схему механизма в выбранном масштабе (рисунок 2.7).

Ускорение точки А.

Воспользуемся формулой, определяющей ускорение точки вращающегося тела

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega} + \overline{w}_A^{\varepsilon}.$$

Так как $\omega_1 = const.$, то $\varepsilon_1 = 0$ и, следовательно, вращательное ускорение точки А $w_A^{\varepsilon} = |\varepsilon_1| \cdot OA = 0$. Поэтому

$$\overline{w}_A = \overline{w}_A^{\omega}.$$

Вычислим модуль центростремительного ускорения

$$w_A^{\omega} = \omega_1^2 \cdot OA = 6^2 \cdot 0,18 = 6,48 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_A^{\omega} \uparrow \uparrow OA.$$

Таким образом,

$$w_A = 6,48 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{w}_A$ изображаем в выбранном масштабе на рисунке 2.7 зелёной (синей) стрелкой.

Ускорение точки К и угловое ускорение шатуна АК.

Для шатуна АК известны ускорение точки А по модулю и направлению и ускорение точки К только по направлению (вектор $\overline{w}_K$ направлен параллельно опорной плоскости).

В качестве полюса выбираем точку К и записываем ускорение $\overline{w}_K$ в виде

$$\overline{w}_K = \overline{w}_A + \overline{w}_{KA}^{\omega} + \overline{w}_{KA}^{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

причем $\overline{w}_{KA}^{\omega} \downarrow \downarrow KA$, $w_{KA}^{\omega} = \omega_3^2 \cdot AK$.

На рисунке 2.7 для точки К строим согласно уравнению в принятом масштабе многоугольник ускорений. Для этого изображаем известный вектор $\overline{w}_A$, а к его концу — также известный вектор $\overline{w}_{KA}^{\omega}$. Затем через конец последнего вектора проводим прямую, перпендикулярную шатуну АК и определяющую линию действия вектора $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$. Наконец, через точку К проводим прямую, параллельную опорной плоскости и определяющую линию действия вектора $\overline{w}_K$. Точка пересечения построенных линий определяет концы векторов $\overline{w}_K$ и $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$.

С помощью линейки находим

$$w_K = 4,46 \text{ м/с}^2, \quad w_{KA}^{\varepsilon} = 0,80 \text{ м/с}^2.$$

Найдём эти же величины аналитическим методом. Заметим, что если предварительно многоугольник ускорений для точки К не построен, то истинные направления векторов $\overline{w}_K$ и $\overline{w}_{KA}^{\varepsilon}$ нам неизвестны. Поэтому эти вектора направляют по их линиям действия в любую на выбор сторону. Если в ходе решения получим ту или иную величину отрицательной, то это означает, что истинное направление соответствующего вектора противоположно выбранному.

Принимаем что векторы $\vec{w}_K$ и $\vec{w}_{KA}^\varepsilon$ направлены так, как указано на рисунке 2.7.

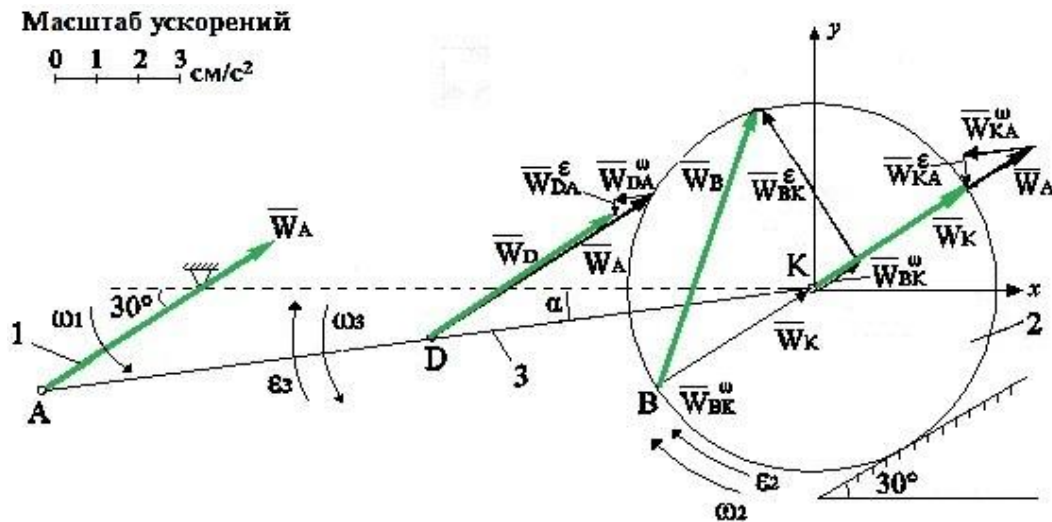


Рисунок 2.7 – Линейные и угловые ускорения

Проецируя равенство (2.15) на координатные оси системы Кху, получаем

$$w_K \cos 30^\circ = w_A \cos 30^\circ - w_{KA}^\omega \cos \alpha + w_{KA}^\varepsilon \sin \alpha;$$

$$w_K \sin 30^\circ = w_A \sin 30^\circ - w_{KA}^\omega \sin \alpha - w_{KA}^\varepsilon \cos \alpha.$$

Решим систему уравнений совместно, методом уравнивая коэффициентов, умножив второе уравнение на $\sqrt{3}$ и вычтем из первого уравнения второе.

$$w_K \cos 30^\circ = w_A \cos 30^\circ - w_{KA}^\omega \cos \alpha - w_{KA}^\varepsilon \sin \alpha;$$

$$w_K \sin 30^\circ \sqrt{3} = w_A \sin 30^\circ \sqrt{3} - w_{KA}^\omega \sin \alpha \sqrt{3} - w_{KA}^\varepsilon \cos \alpha \sqrt{3}.$$

получаем

$$0 = w_A (\cos 30^\circ - \sqrt{3} \sin 30^\circ) + w_{KA}^\omega (\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha) + w_{KA}^\varepsilon (\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha).$$

откуда

$$w_{KA}^\varepsilon = \frac{-w_A (\cos 30^\circ - \sqrt{3} \sin 30^\circ) - w_{KA}^\omega (\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)}.$$

$$w_K = \frac{w_A \cos 30^\circ - w_{KA}^\omega \cos \alpha + w_{KA}^\varepsilon \sin \alpha}{\cos 30^\circ};$$

Подставляем значения и получаем

$$w_{KA}^\varepsilon = \frac{-6,48(0,866 - 1,73 \cdot 0,5) - 1,85 \cdot (1,73 \cdot 0,12 - 0,993)}{(0,12 + 1,73 \cdot 0,993)} = 0,79 \text{ м/с}^2.$$

$$w_K = \frac{6,48 \cdot 0,866 - 1,85 \cdot 0,993 + 0,79 \cdot 0,12}{0,866} = 4,47 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{KA}^\varepsilon = 0,79 \text{ м/с}^2, \quad w_K = 4,47 \text{ м/с}^2.$$

Затем вычисляем

$$|\widehat{\varepsilon}_3| = \frac{|w_{KA}^\varepsilon|}{AK} = 1,05 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Направление углового ускорения ε_3 определяем по направлению вектора $\overline{w_{KA}^\varepsilon}$ и изображаем на рисунке круговой стрелкой. Круговые стрелки для ω_3 и ε_3 показывают, что шатун АК в данном положении механизма вращается замедленно.

Ускорение точки D.

Воспользуемся формулой

$$\overline{w_D} = \overline{w_A} + \overline{w_{DA}^\omega} + \overline{w_{DA}^\varepsilon}, \quad (2.16)$$

в правой части которой все векторы известны по модулю и направлению:

$$w_A = 6,48 \text{ м} / \text{с}^2, \quad \overline{w_A} \uparrow \uparrow AO;$$

$$w_{DA}^\omega = 0,5 w_{KA}^\omega = 0,925 \text{ м} / \text{с}^2, \quad \overline{w_{DA}^\omega} \downarrow \downarrow DA;$$

$$w_{DA}^\varepsilon = 0,5 w_{KA}^\varepsilon = 0,395 \text{ м} / \text{с}, \quad \overline{w_{DA}^\varepsilon} \perp AD.$$

Из построенного для точки D согласно уравнению многоугольника ускорений находим

$$w_D = 5,42 \text{ м} / \text{с}^2.$$

Для аналитического определения этой величины спроецируем равенство (2.14) на координатные оси системы Dxy

$$w_{Dx} = w_A \cos 30^\circ - w_{DA}^\omega \cos \alpha + w_{DA}^\varepsilon \sin \alpha;$$

$$w_{Dy} = w_A \sin 30^\circ - w_{DA}^\omega \sin \alpha - w_{DA}^\varepsilon \cos \alpha.$$

Подставляем значения и получаем

$$w_{Dx} = 6,48 \cdot 0,866 - 0,925 \cdot 0,993 + 0,395 \cdot 0,12 = 4,7 \text{ м} / \text{с}^2;$$

$$w_{Dy} = 6,48 \cdot 0,5 - 0,925 \cdot 0,12 - 0,395 \cdot 0,993 = 2,7 \text{ м} / \text{с}^2.$$

Откуда следует

$$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = 5,42 \text{ м} / \text{с}^2.$$

Угловое ускорение катка.

Из условия $\overline{w_M} = 0$ были получены формулы (2.13) и (2.14), из которых следует

$$|\omega_2| \cdot BK = v_K.$$

Заметим, что эта формула справедлива не только для данного положения механизма, но и для любого его положения, то есть в любой момент времени t . Дифференцируя выражение (2.16) по t , получаем

$$|\varepsilon_2| \cdot BK = w_K. \quad (2.17)$$

Откуда находим

$$|\widehat{\varepsilon}_2| : \frac{w_K}{BK} = \frac{4,47}{0,18} = 24,83 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Так как точка К в данном положении механизма движется ускоренно, вектор скорости и ускорения направлены в одну сторону, то из соотношения

(2.17) вытекает, что каток вращается также ускоренно. Следовательно, угловое ускорение ε_2 совпадает по направлению с угловой скоростью ω_2 .

Ускорение точки В катка.

Для катка теперь известны ускорение точки К и угловые характеристики ω_2 и ε_2 . Выбирая за полюс точку К, записываем уравнение

$$\overline{w}_B = \overline{w}_K + \overline{w}_{BK}^{\omega} + \overline{w}_{BK}^{\varepsilon}, \quad (2.18)$$

причём

$$w_K = 4,47 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_K \uparrow \uparrow BK;$$

$$w_{BK}^{\omega} = \omega_2^2 \cdot BK = 2,56^2 \cdot 0,18 = 1,18 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_{BK}^{\omega} \uparrow \uparrow B;$$

$$w_{BK}^{\varepsilon} = |\varepsilon_2| \cdot BK = 24,89 \cdot 0,18 = 4,48 \text{ м/с}^2, \quad \overline{w}_{BK}^{\varepsilon} \perp BK.$$

Из построенного для точки В согласно уравнению (2.18) многоугольника ускорений находим

$$w_B = 7,20 \text{ м/с}^2.$$

Для определения этой величины аналитически методом спроецируем равенство (2.18) на координатные оси

$$w_{Bx} = w_K + w_{BK}^{\omega} = 4,47 + 1,18 = 5,65 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{By} = w_{BK}^{\varepsilon} = 4,48 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = 7,21 \text{ м/с}^2.$$

Найденные величины помещаем в таблицу 2.4.

Таблица 2.4.

Метод	v_A	v_K	$ \omega_3 $	v_D	$ \omega_2 $	v_B	w_A	w_K	$ \varepsilon_3 $	w_D	$ \varepsilon_2 $	w_B
Геом.	1,08	0,46	—	0,60	—	0,65	6,48	4,46	—	5,42	—	7,20
Анал.	1,08	0,46	1,57	0,59	2,56	0,65	6,48	4,47	1,05	5,42	24,83	7,21

РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА»

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Цель:

- закрепить теоретические знания студентов по теме "Теорема об изменении кинетической энергии механической энергии";
- развить у студентов навыки в применении данной теоремы к решению конкретных задач на движение механической системы с одной степенью свободы.

Задание

Механическая система, в состав которой входят 3 из 16 указанных на рисунке 3.1 элементов, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Трением в подшипниках и массами нитей пренебречь. Качение тел происходит без скольжения.

Исходные данные для решения задачи (номера средних и крайних элементов системы, необходимые числовые величины) студент найдёт в таблице, подготовленной с помощью ЭВМ и выдаваемой преподавателями кафедры механики.

В таблице приняты следующие обозначения:

m_1, m_2, m_3, m_4 – массы соответственно тела А, В, С, и D;

R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы тел, изображённых на рисунке 3.1;

i – радиус инерции тела С или В относительно оси вращения, проходящей через центр масс (в элементах 1,2,5,6,9,10,14,15);

α, β – углы наклона плоскостей к горизонту;

f – коэффициент трения скольжения тела (в элементах 11, 12);

f_K – коэффициент трения качения тел С (или тела А в системах, содержащих элементы 5,6,7);

s – путь центра масс тела А.

В элементах 3,4,7,8,13,16 тела считать однородными цилиндрами.

Используя данную теорему, требуется:

- установить область самоторможения данной системы — промежуток для соотношения масс тел А и С (или А и D), определяемого величиной $\mu = \frac{m_3}{m_1}$

(или $\rho = \frac{m_4}{m_1}$);

- выяснить направление движения центра масс тела А при заданном соотношении масс μ (или ρ);
- определить скорость v центра масс тела А при заданном соотношении масс μ (или ρ) в тот момент, когда он проходит заданный путь s ;
- построить график зависимости скорости v от относительной массы μ

(или ρ) при опускании и поднятии тела при заданном пути s .

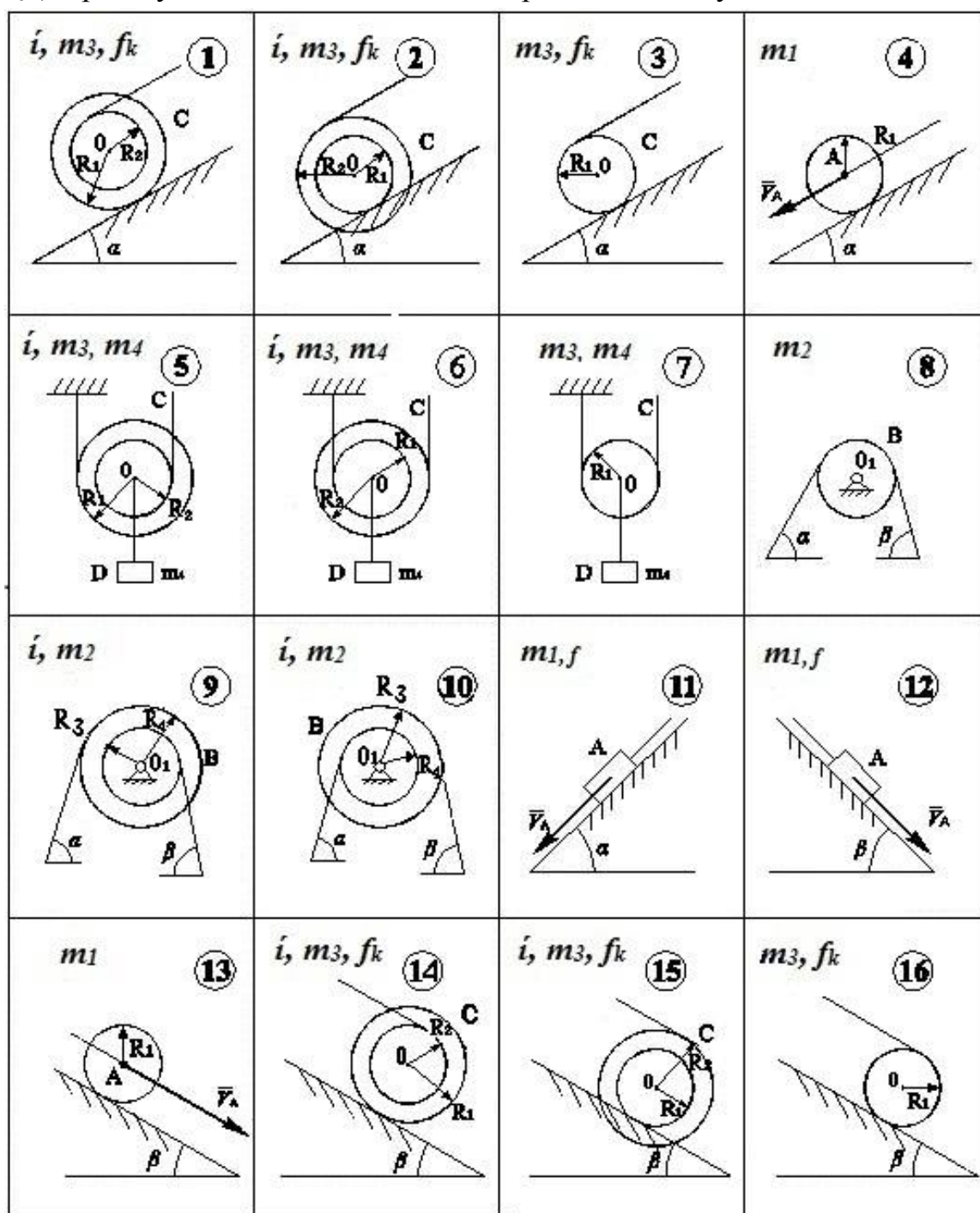


Рисунок 3.1 — Набор элементов механической системы

Методические указания

1. При составлении и изображении схемы механической системы необходимо учесть, что во всех вариантах задания элементы 8,9,10 являются средними, а остальные элементы — крайними в этой системе.

2. Геометрические радиусы, радиусы инерции тел и коэффициент трения качения задаются в виде их отношений к радиусу R_1 :

$$\frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{R_3}{R_1}, \quad \frac{f_k}{R_1}.$$

3. Массы тел задаются в виде их отношений к массе m_1 :

$$\nu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \mu = \frac{m_3}{m_1}, \quad \rho = \frac{m_4}{m_1}.$$

4. В качестве контрольного теста вычислить отношения T_A, T_B, T_C, T к $\frac{1}{2}mv^2$, а также отношения $A(\overline{F}^{TP}), A(M^{TP}), A^e$ к m_1 .

Пример решения задачи

Задача Д. Исходные данные приведены в таблице 3. 1.

Таблица 3.1

№ п/п	№ элемента			Соотношение масс			Соотношение радиусов				α град	β град	Коэфф. трения		s, m
	Лев	Сред	Прав	ν $\frac{m_2}{m_1}$	μ $\frac{m_3}{m_1}$	ρ $\frac{m_4}{m_1}$	$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{R_3}{R_1}$	$\frac{R_3}{R_4}$	$\frac{i}{R_1}$			f	$\frac{f_k}{R_1}$	
35	11	8	15	0,5	2	—	2	—	—	0,5	60	45	0,1	0,02	1,2

Требуется ответить на вопросы задания.

Решение.

1. Синтез механической системы. Расчётное уравнение.

По условию задачи изображаем схему механической системы в конечном положении при опускании тела А (рисунок 3.2).

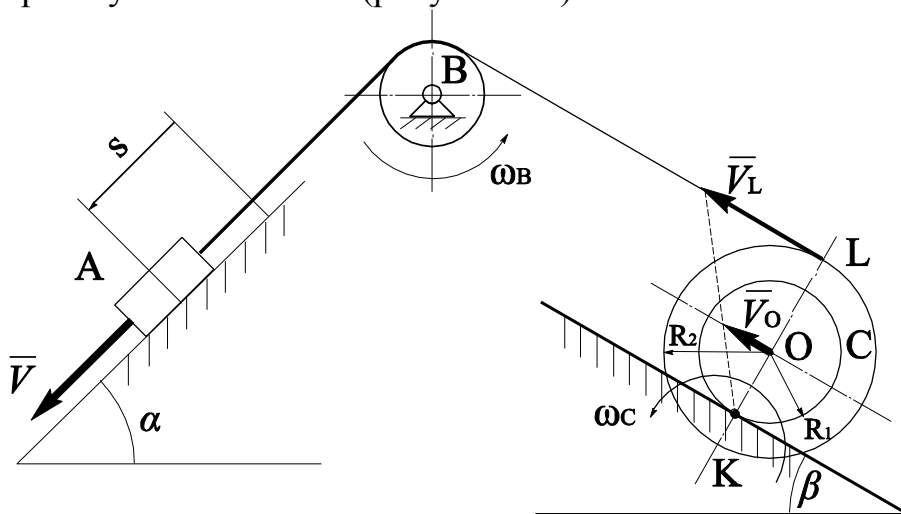


Рисунок 3.2 – Кинематическая схема механической системы.

Изображаем скорость $\vec{v}$ и для определения её модуля воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в

интегральной форме, выражаемой уравнением

$$T_2 - T_1 = A^e + A^i.$$

Так как данная система имеет одну степень свободы, то её кинетическую энергию можно выразить через скорость v . Поскольку эта система состоит из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями, то работа всех внутренних сил будет равна нулю. Работу же всех внешних сил можно выразить через перемещение s . Таким образом, в рассматриваемом случае

$$T_1 = T_0 = 0, \quad T_2 = T(v), \quad A^i = 0, \quad A^e = A^e(s).$$

Расчётное уравнение принимает вид

$$T(v) = A^e(s) \quad (3.1)$$

2. Определение кинетической энергии системы.

Кинетическая энергия системы не зависит от направления движения центра масс тела А и равна сумме энергий её элементов

$$T = T_A + T_B + T_C.$$

Тело А совершает поступательное движение. Поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} m_1 v^2.$$

Кинетическая энергия однородного вращающегося вокруг неподвижной оси блока В равна

$$T_B = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2,$$

где

$$J_B = \frac{1}{2} m_2 R_B^2 = \frac{1}{2} \nu m_1 R_B^2;$$

$$\omega_B = \frac{v}{R_B}.$$

Таким образом,

$$T_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \nu m_1 R_B^2 \cdot \frac{v^2}{R_B^2} = \frac{1}{4} \nu m_1 v^2.$$

Кинетическая энергия катка С, совершающего плоское движение, определяем по теореме Кенига

$$T_C = \frac{1}{2} m_3 v_O^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2,$$

где $J_C = m_3 i^2 = \mu m_1 i^2$ — момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс;

i — радиус инерции катка относительно этой же оси.

Так как К — мгновенный центр скоростей (МЦС) катка, то

$$\frac{v_O}{v_L} = \frac{KO}{KL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \omega_C = \frac{v_L}{R_1 + R_2}.$$

Поскольку $v_L = v_O$, то из последних соотношений получаем

$$v_O = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} v, \quad \omega_C = \frac{\frac{1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} v.$$

Следовательно,

$$T_C = \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2 + \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{\frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2 = \frac{1}{2} \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} v^2.$$

Кинетическая энергия системы в её конечном положении равна

$$T = \frac{1}{2} [m_1 + \frac{1}{2} v m_1 + \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2}] v^2.$$

Величина

$$m_{PP} = m_1 + \frac{1}{2} v m_1 + \mu m_1 \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2} \quad (3.2)$$

называется **приведённой массой** механической системы.

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m_{PP} v^2. \quad (3.3)$$

3. Определение работы внешних сил и области самоторможения.

Работа сил зависит от направления движения тела А.

3.1. Работа сил при опускании тела А.

Изобразим систему в промежуточном положении при опускании тела А и укажем все действующие на неё силы и моменты (рисунок 3.3):

$\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ – силы тяжести соответственно тел А, В, С;

$\overline{N}_1, \overline{N}_2$ – нормальные реакции наклонных плоскостей;

$\overline{N}_3$ – реакция оси блока;

$\overline{F}_1^{TP}, \overline{F}_3^{TP}$ – силы трения скольжения;

M_3^{TP} – момент пары трения качения.

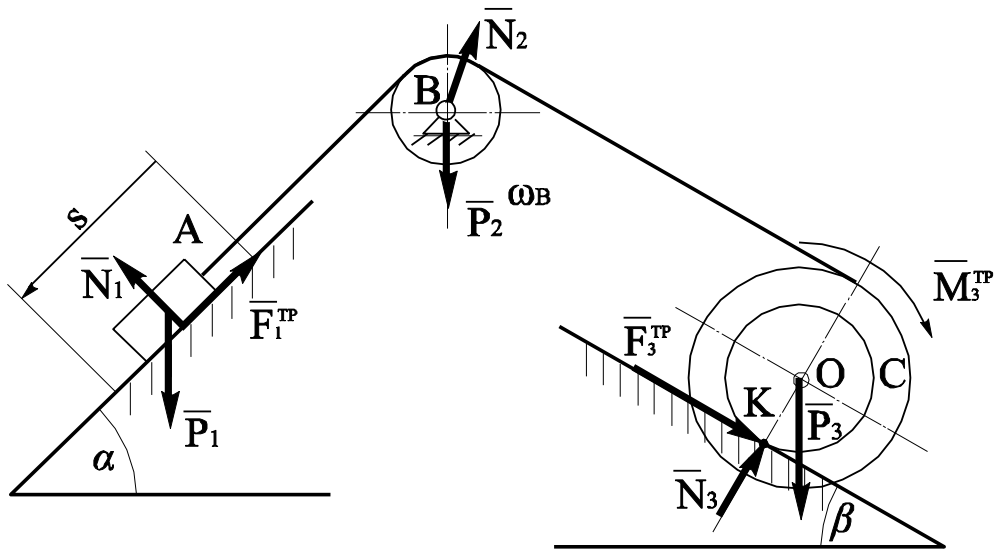


Рисунок 3.3 – Силовая схема механической системы при опускании тела А

Искомая работа определяется суммой

$$A^e = A(\bar{P}_1) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{F}_1^{TP}) + A(\bar{P}_2) + A(\bar{N}_2) + A(\bar{P}_3) + A(\bar{N}_3) + A(\bar{F}_3^{TP}) + A(M_3^{TP}).$$

Находим слагаемые этой суммы

$$A(\bar{P}_1) = m_1 g \sin \alpha \cdot s.$$

Так как сила $\bar{N}_1$ перпендикулярна перемещению точки её приложения, то

$$A(\bar{N}_1) = 0.$$

Далее

$$A(\bar{F}_1^{TP}) = -f N_1 \cdot s = -f m_1 g \cos \alpha \cdot s.$$

Для сил $\bar{P}_2$ и $\bar{N}_2$, приложенных в неподвижной точке, имеем

$$A(\bar{P}_2) = 0, \quad A(\bar{N}_2) = 0.$$

Находим

$$A(\bar{P}_3) = -m_3 g \sin \beta \cdot s_O = -\mu m_1 g \sin \beta \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s,$$

так как

$$s_O = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s.$$

Поскольку точкой приложения сил $\bar{N}_3$ и $\bar{F}_3^{TP}$ является мгновенный центр скоростей, то

$$A(\bar{N}_3) = 0, \quad A(\bar{F}_3^{TP}) = 0.$$

Наконец, определяем

$$A(M_3^{TP}) = -f_K N_3 \cdot \varphi_3 = -f_K \mu m_1 g \cos \beta \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s,$$

так как

$$\varphi_3 = \frac{\frac{1}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} s.$$

Следовательно, работа всех внешних сил при опускании тела A равна

$$A^e = [m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}] s. \quad (3.4)$$

Величину

$$P_{np}^{(1)} = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}, \quad (3.5)$$

входящую в выражение работы, принято называть **приведённой силой**.

Таким образом,

$$A^e = P_{np}^{(1)} s. \quad (3.6)$$

Записываем условие опускания тела A

$$A^e > 0.$$

Или, согласно выражению, (3.4)

$$m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} > 0,$$

откуда следует условие для соотношения масс тел A и C

$$\mu < \frac{(\sin \alpha - f \cos \alpha)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.7)$$

3.2. Работа сил при поднятии тела A .

На рисунке 3.4 изображены все внешние силы, действующие на систему, которая находится в промежуточном положении при поднятии тела A (при выполнении данной работы допускается эти силы не изображать на отдельном рисунке, а указывать их на рисунке 3.3 стрелками красного цвета).

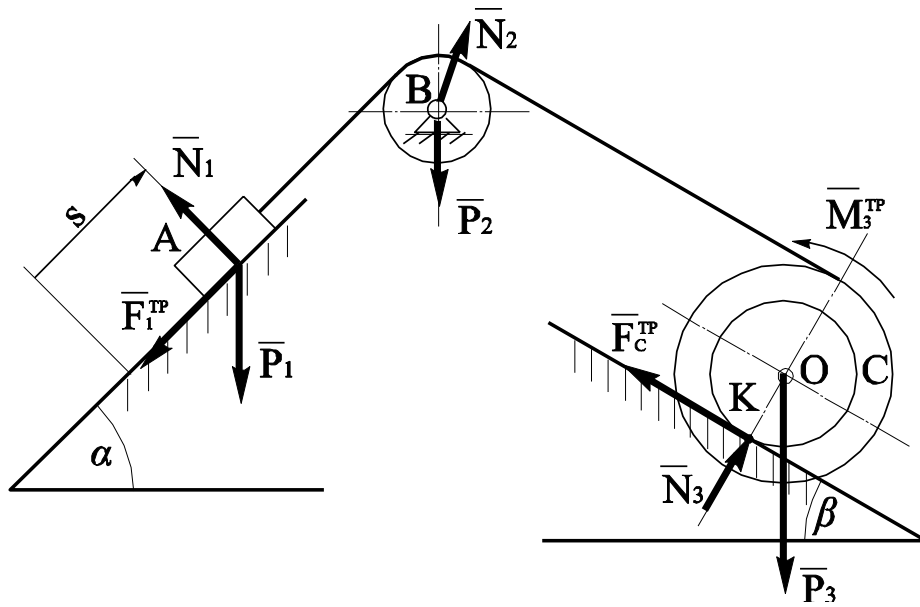


Рисунок 3.4 – Силовая схема механической системы при поднятии тела А

Опуская выкладки, приводим выражение искомой работы сил в окончательном виде

$$A^e = [-m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}] s. \quad (3.8)$$

Или

$$A^e = P_{PP}^{(2)} s, \quad (3.9)$$

где **приведённая сила** определяется формулой

$$P_{PP}^{(2)} = -m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) - \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.10)$$

Условие поднятия тела А

$$A^e > 0,$$

Или, согласно выражению (3.8) ,

$$-m_1 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu m_1 g \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} > 0,$$

откуда получаем

$$\mu > \frac{(\sin \alpha + f \cos \alpha)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.11)$$

3.3. Область самоторможения системы.

Обозначим правые части неравенств (3.7) и (3.11) соответственно

$$\mu_* = \frac{(\sin \alpha - f \cos \beta)(1 + \frac{R_2}{R_1})}{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}; \quad (3.12)$$

$$\mu^{**} = \frac{(\sin \alpha + f \cos \alpha)(1 + \frac{f_K}{R_1})}{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}. \quad (3.13)$$

На основании (3.7) и (3.11) заключаем, что ни при каких значениях μ из промежутка

$$\mu_* \leq \mu \leq \mu^{**} \quad (3.14)$$

данная механическая система не может прийти в движение из состояния покоя: система находится в *состоянии самоторможения*. Условия определяют *область самоторможения системы* по отношению к величине μ .

4. Определение скорости центра масс тела А.

Подставляя в расчётное уравнение (3.1) выражения (3.2) и (3.6) (или (3.9)), получаем

$$\frac{1}{2} m_{PP} v^2 = P_{PP} s.$$

Договоримся скорость опускания тела А считать положительной, а поднятия — отрицательной. Тогда из последнего уравнения получаем

$$v = \pm \sqrt{\frac{2P_{PP}s}{m_{PP}}}. \quad (3.15)$$

Следует иметь в виду, что в формуле (3.15) величина m_{PP} в любом случае определяется выражением (3.2), а P_{PP} — выражением (3.5), если тело А опускается, и выражением (3.10), если оно поднимается.

Формулы (3.2), (3.5), (3.10) преобразуем к другому виду. Для этого вводим относительную приведённую массу и относительную приведённую силу

$$\tilde{m}_{PP} = \frac{m_{PP}}{m_1} = 1 + \frac{1}{2} v + \mu \frac{1 + \frac{i^2}{R_1^2}}{(1 + \frac{R_2}{R_1})^2}; \quad (3.16)$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(1)} = \frac{P_{PP}^{(1)}}{m_1} = \sin \alpha - f \cos \alpha - \mu \frac{\sin \beta + \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}}; \quad (3.17)$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(2)} = \frac{P_{PP}^{(2)}}{m_1} = -(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \mu \frac{\sin \beta - \frac{f_K}{R_1} \cos \beta}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.18)$$

Тогда скорость при опускании тела А определяется формулой

$$v = + \sqrt{\frac{2\tilde{P}_{PP}^{(1)} g s}{\tilde{m}_{PP}}}, \quad (3.19)$$

а при поднятии

$$v = - \sqrt{\frac{2\tilde{P}_{PP}^{(2)} g s}{\tilde{m}_{PP}}}. \quad (3.20)$$

Теперь вычисляем скорость v при заданных $\nu = 0,5$, $\mu = 2$ и $s = 1,2$ м.

Предварительно устанавливаем границы области самоторможения системы по формулам (3.12) и (3.13)

$$\mu_* = 3,39; \quad \mu^{**} = 3,97.$$

Сравнивая заданную величину $\mu = 2$ с найденными μ_* и μ^{**} , видим, что $\mu < \mu_*$. Следовательно, центр масс тела А опускается. В этом случае по формулам (3.16), (3.17) и (3.19) находим

$$\tilde{m}_{PP} = 1,528, \quad \tilde{P}_{PP}^{(1)} = 0,335, \quad v = 2,27 \text{ м/с}.$$

4. Построение графика зависимости $v = v(\mu)$ при заданных $\nu = 0,5$ и $s = 1,2$ м.

Формулы (3.16), (3.17) и (3.18) в этом случае приобретают вид

$$\tilde{m}_{PP} = 1,250 + 0,139\mu;$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(1)} = 0,816 - 0,240\mu;$$

$$\tilde{P}_{PP}^{(2)} = -0,916 + 0,231\mu.$$

Принимая во внимание последние выражения, записываем формулы (3.19) и (3.20) следующим образом

$$v = + \sqrt{\frac{23,544(0,816 - 0,240\mu)}{1,250 + 0,139\mu}}, \text{ если } \mu < \mu_*;$$

$$v = - \sqrt{\frac{23,544(-0,916 + 0,231\mu)}{1,250 + 0,139\mu}}, \text{ если } \mu > \mu^{**}.$$

Требуемый график в соответствии с последними выражениями изображён на рисунке 3.5.

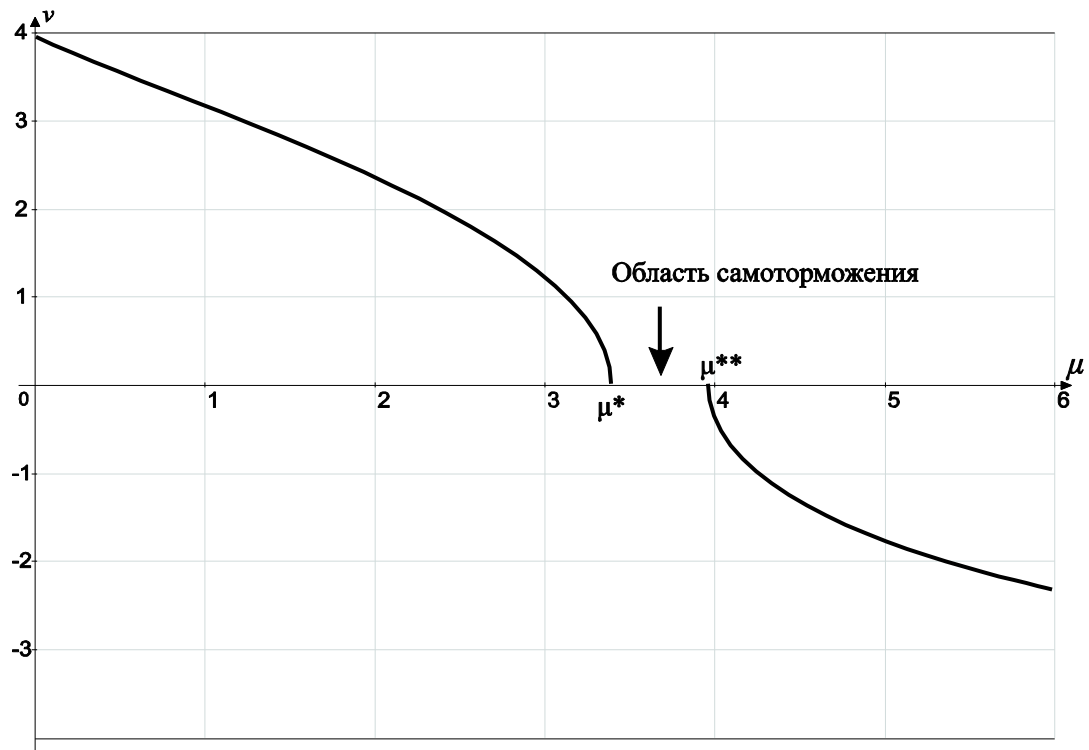


Рисунок 3.5. – График зависимости $v = v(\mu)$.

Ответ: $\mu_* = 3,39$; $\mu^{**} = 3,97$; центр масс тела А опускается со скоростью $v = 2,27 \text{ м/с}$.

5. Контроль вычислений.

Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{T_A}{\frac{1}{2}m_1v^2} &= 1,000; & \frac{T_B}{\frac{1}{2}m_1v^2} &= 0,250; & \frac{T_C}{\frac{1}{2}m_1v^2} &= 0,278; & \frac{T}{\frac{1}{2}m_1v^2} &= 1,528; \\ \frac{1}{m_1}A(\bar{F}_1^{(TP)}) &= -0,589; & \frac{1}{m_1}A(M_3^{TP}) &= -0,111; & \frac{1}{m_1}A^e &= 3,946. \end{aligned}$$

Учебное издание

**Корнеева Надежда Константиновна
Пичугова Луиза Николаевна,
Пантель Валентин Олегович
Глушкова Елена Владимировна**

**РУКОВОДСТВО
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ
И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 206/2025. Объем 5,25 п. л. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,145.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»