

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, О.В. Матузаева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Учебное пособие

по общей физике для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2026

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.31Я73
Р537

Рецензент:

С.А. Чернявская – канд. физ.-мат. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р537 Распределение Больцмана: учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А.Г. Рипп, О.В. Матузаева ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 21 с.: ил. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с тем, как частицы равновесного идеального газа распределяются в пространстве при наличии однородного гравитационного поля. Студентам предлагается провести два экспериментальных исследования и убедиться в том, что частицы распределяются в пространстве в соответствии с законом распределения Больцмана, а также измерить постоянную Больцмана. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.31Я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 28 октября 2025 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

Работа 71. Распределение Больцмана

Цель работы

Экспериментальная проверка функции распределения Больцмана на примере распределения броуновских частиц по высоте сосуда, в котором они находятся. Измерение постоянной Больцмана.

1. Краткая теория

1.1. Краткие сведения о распределении Больцмана

Молекулы идеального газа совершают хаотическое тепловое движение, и поэтому их количество N в любом фиксированном объёме V – это случайная величина, значение которой непредсказуемо. Однако эту величину можно усреднить, и тогда среднее значение $\langle N \rangle$ – не случайно и вполне предсказуемо, так что $\langle N \rangle$ может входить в равенства и уравнения, описывающие различные физические закономерности. В частности, удобно пользоваться средним числом молекул *в единице объёма*. Называется эта физическая величина *концентрацией* и обозначается обычно буквой n . Если газ – равновесный, то его концентрация не зависит от времени. Но она является локальной физической величиной, то есть определена для каждой точки пространства:

$$n = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle N \rangle}{V},$$

так что $n = n(x, y, z)$.

Если на молекулы газа никакие внешние силы не действуют, то есть в той области пространства Ω , где находится газ, нет никаких силовых полей, которые могли бы оказать влияние на его молекулы, то движение молекул определяются только одним фактором – *хаотичностью*, который приводит к тому, что молекулы распределяются в области Ω равномерно. Это означает, что концентрация молекул n не является функцией координат, она во всех точках области Ω одна и та же: $n = \text{const}$.

В силовом поле движение молекул определяется двумя факторами: хаотичность стремится распределить молекулы равномерно, а внешняя сила $\mathbf{F}$ заставляет молекул двигаться (и ускоряться) в направлении $\mathbf{F}$. Конкуренция этих факторов приводит к тому, что в равновесном состоянии газа концентрация его молекул меняется вдоль силовых линий поля, нарастая в направлении силы $\mathbf{F}$. Людвиг Больцман в конце 19 века предложил формулу для концентрации молекул идеального равновесного газа, который находится в потенциальном силовом поле:

$$n(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}. \quad (1)$$

Здесь $U(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы в данном силовом поле, k – константа (она теперь называется постоянной Больцмана), T – абсолютная температура газа, n_0 – концентрация молекул в точке (в точках), от которых отсчитывается потенциальная энергия, то есть в этой точке (точках), где она принята равной нулю¹.

Формула (1) называется распределением Больцмана. В частном случае однородного поля она упрощается. Однородным называется такое силовое поле, в котором сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу, не зависит от того, где находится частица. Иными словами, в однородном поле сила $\mathbf{F}$ во всех точках поля имеет одно и то же значение, и одно и то же направление. В этом случае одну из осей координат направляют вдоль направления силы $\mathbf{F}$, и тогда потенциальная энергия частицы зависит не от трёх координат, а только от одной. Например, если вдоль силы $\mathbf{F}$ направлена ось Ox , то $U = U(x)$. В результате распределение Больцмана имеет вид

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}},$$

так что концентрация молекул тоже зависит только от одной координаты x . В частности, однородным можно считать гравитационное поле вблизи Земли. Если ось Ox направить вертикально вверх и положить ноль потенциальной энергии в точках на некоторой горизонтальной поверхности (например, на поверхности Земли или на поверхности лабораторного стола), то $U(x) = mgx$. Значение x – это высота над поверхностью h , поэтому вместо x можно писать h . Таким образом, распределение Больцмана для идеального равновесного газа вблизи поверхности Земли имеет вид

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (2)$$

Из этой формулы следует, что по мере роста высоты концентрация молекул в газе экспоненциально убывает, причём концентрация лёгких молекул убывает *медленнее*, чем концентрация тяжёлых.

1.2. Экспериментальная проверка распределения Больцмана

Для того чтобы провести экспериментальную проверку распределения Больцмана, надо иметь способ измерения концентрации молекул. Это означает, что молекулы надо считать, а для этого их надо *видеть*. Современная техника позволяет видеть молекулы, однако, во-первых, это – весьма специфическая и очень дорогая техника, так что приобрести её для учебной лаборатории нереально². Во-вторых, вопрос об экспериментальной проверке распределения

¹ Как вы должны помнить из механики, потенциальная энергия частицы (материальной точки) – это функция координат, определённая с точностью до произвольного слагаемого.

² Тем более, что эта тонкая техника будет использоваться в учебной лаборатории очень интенсивно и не самыми компетентными экспериментаторами.

Больцмана возник, разумеется, сразу после его получения, то есть в конце 19 века, когда молекулы ещё никто не видел – мало того, подавляющее большинство учёных вообще сомневались в их существовании. И вот тогда, а точнее, в начале 20 века, французский учёный Жан Батист Перрен провёл серию экспериментов, подтвердивших существование молекул и распределение Больцмана. Кроме того, его эксперименты позволили измерить постоянную Больцмана.

Исследования Перрена основывались на двух идеях.

Первая идея: движение невидимых молекул порождает обнаруженное ещё в 17 веке Броуновское движение, которое вполне *видимо*. Поэтому характеристики Броуновского движения можно достаточно точно измерять и тем самым не только количественно описать это явление, но косвенно исследовать поведение и свойства молекул.

Вторая идея: сами броуновские частицы можно считать большими молекулами, и тогда возникает возможность проверить распределение Больцмана – ведь броуновские частицы – хоть и маленькие, но их можно наблюдать под микроскопом и пересчитывать, тем самым измеряя их концентрацию. И тогда можно проверить, как концентрация частиц n убывает с ростом высоты h . Распределение Больцмана говорит, что убывание концентрации – экспоненциальное, а что говорит эксперимент?

Правда, при проведении эксперимента возникла одна техническая проблема. Броуновские частицы – это очень тяжёлые «молекулы», поэтому их концентрация очень быстро падает с ростом высоты, так что непросто с достаточной точностью получить экспериментальную зависимость их концентрации n от высоты h . В итоге – дилемма: для того чтобы броуновские частицы можно было видеть и считать, они должны быть достаточно *большими*, а для того чтобы получить достаточно точную и подробную зависимость $n(h)$, их масса m должна быть как можно *меньше*. Перрен нашёл следующий выход из этой дилеммы: броуновские частицы надо поместить в жидкость, плотность которой чуть-чуть меньше плотности частиц. В результате на частицы будет действовать сила Архимеда F_a , которая уменьшает их вес, не уменьшая размеры. В самом деле, суммарная сила F , действующая, на частицу массой m в жидкости плотностью ρ_0 равна:

$$F = mg - F_a = mg - \rho_0 V g = (m - \rho_0 V) g,$$

где V – объём частицы. Таким образом, броуновская частица в жидкости эквивалентна молекуле массой $m^* = m - \rho_0 V$, которая находится под действием *только одной* силы тяжести в однородном гравитационном поле. Естественно, чем меньше разница между плотностями частицы и жидкости, тем меньше масса m^* эквивалентной молекулы. Будем в дальнейшем называть массу m^* *эффективной массой* частицы.

Теперь рассмотрим процедуру эксперимента более детально. Для проведения эксперимента нужны: сосуд с жидкостью (кювета) и микроскоп. Микроскоп надо разместить так, чтобы его можно было перемещать по вертикали, при этом трубка с окуляром должна быть расположена горизонтально. Чтобы при наблюдении броуновских частиц в микроскоп их можно было считать, они не должны заслонять друг друга, это значит, что кювета должна быть тонкой. А ещё кювета должна быть, разумеется, прозрачной и достаточно высокой. Схема эксперимента показана на следующем рисунке 1.

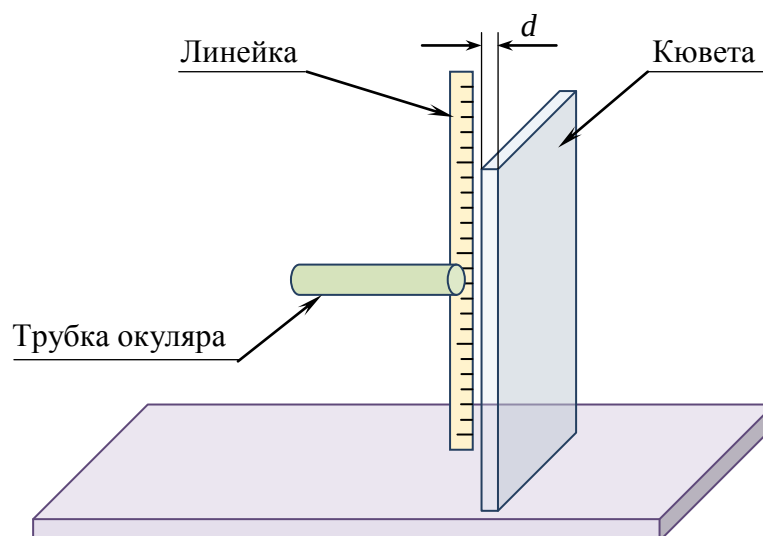


Рис. 1. Схема эксперимента

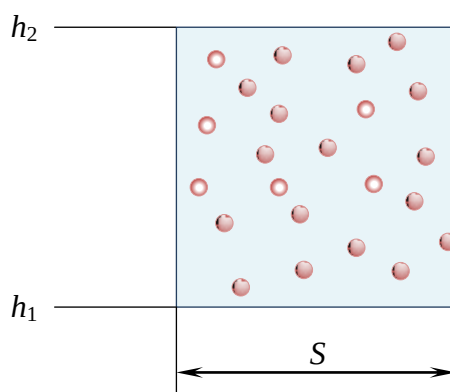


Рис. 2. Поле зрения окуляра
(область наблюдения)

Поле зрения окуляра удобно сделать прямоугольным – см. рисунок 2.

Глядя в микроскоп, экспериментатор может сосчитать количество броуновских частиц N , попавших в область наблюдения. Перемещение области наблюдения по вертикали позволяет получить зависимость числа частиц N в области наблюдения от высоты этой области h . Эту зависимость можно получить и теоретически – применив функцию распределения Больцмана. Тогда сравне-

ние теоретической зависимости $N(h)$ с экспериментальной может служить основанием для проверки распределения Больцмана.

Определим сейчас, какой должна быть зависимость $N(h)$ с точки зрения теории, основанной на распределении Больцмана. Область наблюдения – это параллелепипед, толщина которого равна толщине кюветы d (её внутренней части), ширина равна S , а высота равна $(h_2 - h_1)$. Число частиц в области наблюдения – величина случайная, но её среднее значение $\langle N \rangle$ можно найти:

$$\langle N \rangle = \int_{(V)} n(h) dV = Sd \int_{h_1}^{h_2} n(h) dh.$$

В дальнейшем для краткости будем опускать скобки $\langle \rangle$, обозначающие усреднение, и понимать под N не случайное число частиц, а *среднее*. Подставим в интеграл выражение для концентрации – распределение Больцмана (2):

$$N = Sd \int_{h_1}^{h_2} n_0 e^{-\frac{m^*gh}{kT}} dh = Sdn_0 \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{m^*gh}{kT}} dh.$$

Интеграл легко вычисляется, в результате получается:

$$N = Sdn_0 \frac{kT}{m^*g} \left(e^{-\frac{m^*gh_1}{kT}} - e^{-\frac{m^*gh_2}{kT}} \right). \quad (3)$$

Эту формулу удобнее записать так:

$$N = Sdn_0 \frac{kT}{m^*g} e^{-\frac{m^*gh_1}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{m^*g\Delta h}{kT}} \right), \quad (3A)$$

где $\Delta h = (h_2 - h_1)$ – вертикальный размер области наблюдения.

Из формулы (3A) следует вывод: главное, от чего зависит среднее число частиц в области наблюдения, это –

- *вертикальное положение* области наблюдения, которое количественно определяется нижней границей h_1 ,
- и *температура* среды, в которой находятся броуновские частицы.

Итак, есть смысл провести два эксперимента: исследовать зависимость $N(h_1)$ и зависимость $N(T)$.

Рассмотрим теперь, как убедиться в том, что результаты этих двух экспериментов согласуются с теоретической формулой (3) и тем самым подтверждают распределение Больцмана (2).

Эксперимент 1.

Исследование зависимости среднего числа частиц N в области наблюдения от вертикального положения h_1 области наблюдения.

В формуле (3A) величина h_1 входит только в экспоненту $e^{-\frac{m^*gh_1}{kT}}$, поэтому эту формулу можно записать короче:

$$N = N_0 e^{-\alpha h_1}, \quad (4)$$

где N_0 и α – это две константы эксперимента, равные

$$N_0 = \frac{Sdn_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta h}), \quad \alpha = \frac{m^*g}{kT}. \quad (5)$$

Физический смысл константы N_0 следует из (4): это – среднее число частиц в области наблюдения при *нижнем положении* области наблюдения ($h_1 = 0$).

Экспериментальная проверка формулы (4) упрощается тем, что эту формулу легко линеаризовать. Для этого её достаточно прологарифмировать. В результате получается, что можно ввести переменную

$$y = \ln \frac{N}{N_0}, \quad (6)$$

которая связана с положением области наблюдения h_1 *пропорциональной* зависимостью:

$$y = \alpha h_1. \quad (7)$$

Итак, задача эксперимента 1 состоит в следующем: надо получить экспериментальным путём зависимость $N(h_1)$, затем получить из неё зависимость $y(h_1)$ и убедиться, что она – *прямо пропорциональная*. Если результат эксперимента окажется положительным, то можно получить дополнительную важную информацию: измерив коэффициент пропорциональности α , можно тем самым измерить постоянную Больцмана, которая, в соответствии с формулой (5), равна

$$k = \frac{m^*g}{\alpha T}. \quad (8)$$

Эксперимент 2.

Исследование зависимости среднего числа частиц в области наблюдения N от температуры среды T .

Температура среды T входит в формулу (3) не просто: явно – в показатели экспонент и во множитель $\frac{kT}{m^*g}$ и неявно – в концентрацию n_0^3 . Поэтому возникает желание как-то упростить формулу (3).

Для этого сначала надо получить явную зависимость $n_0(T)$. Как уже отмечено, эта зависимость появляется потому, что общее число частиц в кювете от температуры не зависит. Обозначим N_c число частиц в части кюветы – в столбе сечением ($S \times d$) и выясним, как это число связано с концентрацией частиц. Связь очевидна:

$$N_c = Sd \int_0^H n(h)dh,$$

где H – высота кюветы. Интеграл уже вычислен – получилась формула (3). Из этой формулы следует:

$$N_c = Sdn_0 \frac{kT}{m^*g} \left(1 - e^{-\frac{m^*gH}{kT}} \right). \quad (9)$$

³ Концентрация частиц внизу кюветы n_0 уменьшается с ростом температуры, так как нарастает концентрация в верхних слоях, а общее число частиц в кювете при этом, естественно, остаётся неизменным.

Будем считать, что кювета достаточно велика, так что

$$\frac{m^* g H}{kT} \gg 1. \quad (10)$$

Тогда экспонента $e^{-\frac{m^* g H}{kT}}$ – это очень маленькое число по сравнению с 1 в скобке, так что ею можно пренебречь. В результате:

$$N_c = S d n_0 \frac{kT}{m^* g},$$

и формулу (3) можно записать так:

$$N = N_c \left(e^{-\frac{m^* g h_1}{kT}} - e^{-\frac{m^* g h_2}{kT}} \right).$$

Для дальнейшего упрощения эту формулу удобно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} N(h_1) = N_c e^{-\frac{m^* g h_1}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{m^* g \Delta h}{kT}} \right) \text{ или} \\ N(h_2) = N_c e^{-\frac{m^* g h_2}{kT}} \left(e^{\frac{m^* g \Delta h}{kT}} - 1 \right). \end{cases} \quad (11)$$

Будем теперь считать, что вертикальный размер области наблюдения достаточно мал, так что выполняется условие

$$\frac{m^* g \Delta h}{kT} \ll 1. \quad (12)$$

Тогда экспоненты $e^{-\frac{m^* g \Delta h}{kT}}$ и $e^{\frac{m^* g \Delta h}{kT}}$ в формулах (11) можно разложить в ряд, ограничившись только двумя членами:

$$e^{-\frac{m^* g \Delta h}{kT}} \approx 1 - \frac{m^* g \Delta h}{kT}, \quad e^{\frac{m^* g \Delta h}{kT}} \approx 1 + \frac{m^* g \Delta h}{kT}.$$

В результате формулы (11) упрощаются так:

$$\begin{cases} N(h_1) = N_c \frac{m^* g \Delta h}{kT} e^{-\frac{m^* g h_1}{kT}} \text{ или} \\ N(h_2) = N_c \frac{m^* g \Delta h}{kT} e^{-\frac{m^* g h_2}{kT}}. \end{cases}$$

Формально эти два выражения не равны друг другу, однако оба они – приближённые и разница между невелика. Разумно заменить их одним более точным выражением:

$$\boxed{N = N_c \frac{m^* g \Delta h}{kT} e^{-\frac{m^* g h}{kT}}}, \quad (13)$$

в котором $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ – высота *центра* области наблюдения.

Вот этот упрощенный вариант формулы (3) мы и будем считать теоретической зависимостью $N(T)$. Для сравнения этой зависимости с экспериментальной её удобно линеаризовать. Сначала умножим обе части формулы (13) на T :

$$NT = N_c \frac{m^* g \Delta h}{k} e^{-\frac{m^* g h}{kT}},$$

затем прологарифмируем обе части этого равенства:

$$\ln(NT) = \ln\left(N_c \frac{m^* g \Delta h}{k}\right) - \frac{m^* g h}{kT}$$

и введём новые переменные:

$$y = \ln(NT), \quad x = \frac{1}{T}. \quad (14)$$

Теперь обозначим

$$A = \ln\left(N_c \frac{m^* g \Delta h}{k}\right), \quad B = -\frac{m^* g h}{k}. \quad (15)$$

Величины A и B от ни от числа частиц N , ни от температуры T не зависят, поэтому они представляют собой *константы эксперимента*. В результате получается следующая линейная зависимость:

$$y = A + Bx, \quad (16)$$

Таким образом, задачу эксперимента 2 можно сформулировать так: получить экспериментальным путём зависимость $N(T)$, затем получить из неё зависимость $y(x)$ и убедиться, что она – *линейная*. Если результат эксперимента окажется положительным, то надо измерить угловой коэффициент B , а затем – постоянную Больцмана: из формулы (15) следует, что

$$k = -\frac{m^* g h}{B}. \quad (17)$$

Замечание 1. Обратите внимание: линейная зависимость, проверка которой является целью эксперимента 2, получена при использовании двух *приближений*: (10) и (12).

$$\frac{m^* g H}{kT} \gg 1 \quad \frac{m^* g \Delta h}{kT} \ll 1.$$

Поэтому при проведении эксперимента следует убедиться, насколько хорошо выполняются эти приближения. Если они не выполняются, то экспериментальная зависимость $y(x)$ может оказаться не линейной, а только *близкой* к линейной. И даже, если линейная зависимость $y(x)$ подтвердится, к результату измерения постоянной Больцмана, основанному на использовании формулы (17), следует относиться осторожно: он может оказаться заметно отличающимся от табличного значения. Поэтому возникает вопрос: есть ли другой вариант проверки формулы (3) – без указанных приближений, позволяющих упростить формулу (3) до формулы (13). Такой вариант есть, это *метод прямого сравнения*.

Обработка результатов эксперимента 2 методом прямого сравнения.

Суть метода в том, что надо провести вычисления по формуле (13), а затем сравнить их с результатами эксперимента, то есть с экспериментальной зависи-

мостью $N(T)$. Но прежде, чем проводить вычисления по формуле (3), надо выяснить, всё ли известно в этой формуле. Запишем её ещё раз:

$$N = Sdn_0 \frac{kT}{m^*g} e^{-\frac{m^*gh_1}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{m^*g\Delta h}{kT}}\right), \quad (3A)$$

Сначала для упрощения этой формулы введём обозначения:

$$\theta = \frac{m^*g\Delta h}{k}, \quad z = e^{-\frac{\theta}{T}}, \quad k_0 = \frac{H}{\Delta h}, \quad k_1 = \frac{h}{\Delta h}. \quad (18)$$

Тогда формулу (18) можно записать так:

$$N = Sdn_0 \frac{T}{\theta} \Delta h e^{-k_1 \frac{\theta}{T}} \left(1 - e^{-\frac{\theta}{T}}\right) = Sdn_0 \frac{T}{\theta} \Delta h z^{k_1} (1 - z), \quad (19)$$

Параметры θ , k_0 и k_1 известны. Выясним их смысл.

Параметр θ имеет размерность температуры, поэтому будем называть его характеристической температурой. При $T \ll \theta$ экспонента $z = e^{-\frac{\theta}{T}}$ близка к нулю, и тогда практически при любой высоте области наблюдения h_1 , кроме нуля, число частиц в области наблюдения ничтожно – частицы лежат на дне кюветы и в броуновском движении не участвуют, так что характеристическую температуру можно понимать, как ту минимальную температуру, при которой броуновское движение можно заметить в микроскопе с данным размером области наблюдения Δh .

Параметр k_0 показывает, во сколько раз области наблюдения Δh меньше размера кюветы H . В предлагаемой вам лабораторной установке кювета при отсутствии увеличения целиком заполняет область наблюдения, при увеличении 1:2 в область наблюдения попадает половина кюветы и так далее. Таким образом, k_0 – это увеличение микроскопа.

Параметр k_1 определяет высоту области наблюдения. В лабораторной установке перемещение области наблюдения, как по вертикали, так и по горизонтали, является дискретным, причём шаг перемещения равен размеру области Δh . Поэтому значение k_1 – это количество перемещений области наблюдения с нижнего (нулевого) положения.

В формуле (19) остались три величины: Размеры S и d (ширина области наблюдения и толщина кюветы) – это известные параметры, а концентрация частиц на дне кюветы n_0 – это не параметр, а функция от температуры: чем больше температура, тем больше частиц поднимается в верхние слои кюветы, тем меньше их концентрация у дна. Как отмечалось выше, концентрацию n_0 можно выразить через число частиц N_c в столбе жидкости сечением $(S \times d)$ – см. формулу (9):

$$N_c = Sdn_0 \frac{kT}{m^*g} \left(1 - e^{-\frac{m^*gH}{kT}}\right).$$

С учётом обозначений (18) получаем:

$$N_c = Sdn_0 \frac{T}{\theta} \Delta h \left(1 - e^{-k_0 \frac{\theta}{T}}\right) = Sdn_0 \frac{T}{\theta} \Delta h (1 - z^{k_0}). \quad (20)$$

Поделим (19) на (20).

$$\frac{N}{N_c} = \frac{z^{h_1(1-z)}}{1-z^{k_0}},$$

откуда:

$$N(T) = N_c \frac{z^{k_1(1-z)}}{1-z^{k_0}}. \quad (21)$$

Это и есть та формула, по которой можно производить расчёты теоретической зависимости числа частиц N в области наблюдения микроскопа от температуры среды в кювете T . В эту формулу водит единственный параметр, значение которого неизвестно: это число частиц в столбе N_c . Значение этого параметра можно найти *эмпирически* – из требования, чтобы теоретическая и экспериментальные зависимости $N(T)$ не противоречили друг другу⁴. Если такое число N_c удастся подобрать, значит, эксперимент подтвердит формулу (21), а значит, и распределение Больцмана, с помощью которого формула (21) получена.

Замечание 2. При повышении температуры число частиц в области наблюдения изменяется под влиянием двух факторов. Первый фактор: в область наблюдения прибывают частицы из нижних слоёв, что способствует увеличению частиц в области. Второй фактор: часть частиц уходит из области наблюдения вверх, что уменьшает число частиц в области. Поэтому зависимость $N(T)$ может оказаться слабой, и её будет трудно заметить на фоне статистических флуктуаций числа частиц. Но если область наблюдения находится в самом низу кюветы (у её дна), то первый фактор не действует, так что с повышением температуры число наблюдаемых частиц строго растёт. Поэтому, возможно, эксперимент 2 лучше проводить так, чтобы область наблюдения располагалась именно внизу. Но это – только предположение, ответ даст эксперимент.

2. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка – виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При вызове программы открывается окно *Распределение Больцмана*. В центральной части окна приведены цель работы и краткое описание работы. Внизу окна – три управляющие кнопки:

- **Ход работы.** При нажатии этой кнопки открывается окно, в котором показан порядок выполнения работы.
- **Эксперимент.** При нажатии на эту кнопку отрывается окно с экспериментальной установкой.

⁴ Полного совпадения, разумеется, добиться невозможно из-за статистических флуктуаций числа частиц в области наблюдения.

- **Завершение работы.** Эта кнопка вызывает выход из программы.

Окно **Эксперимент** показано на рисунке 3. Оно содержит три панели инструментов и два окна визуализации.

В окнах визуализации показано то, что видит экспериментатор в окуляре микроскопа, то есть *область наблюдения*. Слева – в реальном масштабе, справа – в увеличенном. Масштаб увеличения экспериментатор может изменять в интервале от 1:5 до 1:50.

Положение увеличенной области наблюдения можно менять. Для этого в левом окне визуализации предусмотрены две линейки с бегунками – вертикальная и горизонтальная.

В увеличенной области наблюдения показаны:

- размер области в горизонтальном и вертикальном направлениях (соответственно, ΔS и Δh),
- положение области, определяемое начальными координатами x_1 и h_1 ,
- количество частиц в области N .

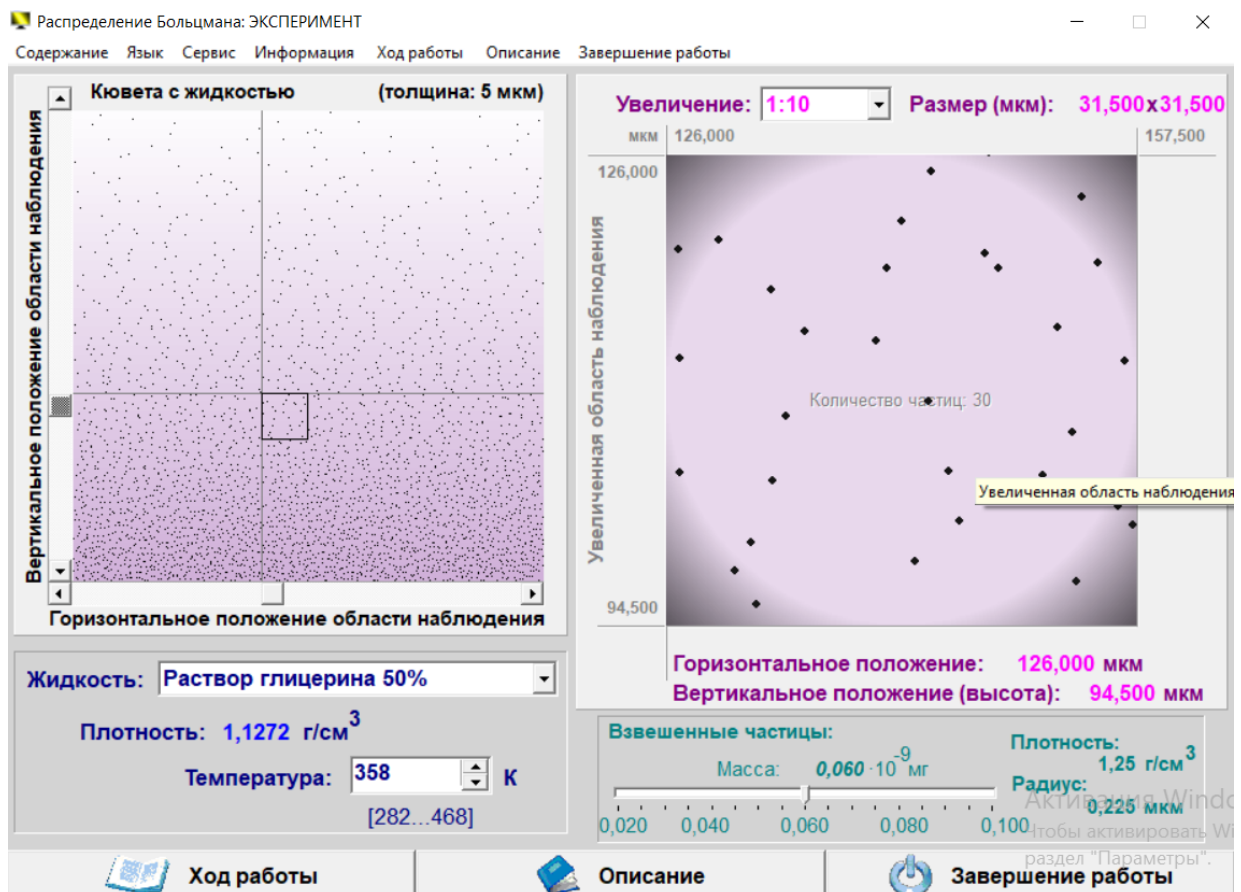


Рис. 3. Окно «Эксперимент»

Панели инструментов.

- **Жидкость.** Панель содержит окошко для выбора одной из восьми жидкостей. После выбора появляется информация о плотности жидкости.

- **Температура.** Панель содержит окошко для выбора температуры среды в интервале, зависящим от среды: например, если среда – это 50-процентный раствор глицерина, то температуру можно менять от 282 К до 468 К.
- **Взвешенные частицы.** Панель содержит линейку с бегунком, позволяющую выбирать массу частицы в интервале от $2 \cdot 10^{-11}$ мг до 10^{-10} мг. После выбора массы справа от линейки появляется информация о плотности материала частиц и о радиусе частиц.

3. Порядок выполнения работы

Выберите по согласованию с преподавателем эксперимент, который вы будете проводить.

Эксперимент 1. Исследование зависимости среднего числа частиц N в области наблюдения от вертикального положения h_1 области наблюдения.

3.1. Выберите условия эксперимента: массу частицы m , жидкость и её температуру T , увеличение. Результаты запишите в таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Масса частицы	m	мг	
Плотность материала частиц	ρ	г/см ³	
Радиус частиц	R	мкм	
Жидкость			
Плотность жидкости	ρ_0	г/см ³	
Масса жидкости, вытесняемой частицей	$m_{\text{ж}}$	мг	
Эффективная масса частицы	m^*	мг	
Температура	T	К	
Увеличение	k_0		
Размер области наблюдения	Δh	мкм	
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(h_1)$	мкм	
	$\Delta(N)$	шт.	
	$\Delta(m)$	мг	
	$\Delta(T)$	К	
	$\Delta(R)$	мкм	
	$\Delta(\rho_0)$	г/см ³	
	$\Delta(m_{\text{ж}})$	мг	
	$\Delta(m^*)$	мг	
	$\Delta(g)$	м/с ²	

3.2. Заполните остальные ячейки таблицы 1.

3.3. Установите с помощью бегунков в левом окне визуализации минимальные координаты области наблюдения: $h_1 = 0$ и $x_1 = 0$. Запишите в таблицу 2

значение h_1 и значение числа частиц в области – в раздел таблицы «Число частиц N », колонка 1.

- 3.4. Переместите область наблюдения немного вправо, для чего подвиньте горизонтальный бегунок на одну или более позиций, и запишите число частиц в области в таблицу 2 (в следующую колонку 2).
- 3.5. Повторите пункт 3.4 ещё три раза. В результате у вас будут заполнены все ячейки одной строки раздела «Число частиц N », кроме ячейки «Среднее».
- 3.6. Поднимите с помощью вертикального бегунка область наблюдения на одну или несколько позиций вверх, горизонтальный бегунок верните в крайнее левое положение ($x_1 = 0$) и запишите в таблицу 2 значения h_1 и N – в следующую строку. Затем снова проделайте пункты 3.4 и 3.5.
- 3.7. Продолжайте выполнять пункт 3.6 до тех пор, пока не получите результаты экспериментов для десяти (или более) разных значений высоты области наблюдения h_1 .

Таблица 2

Зависимость среднего числа частиц N в области наблюдения от высоты h_1

Номер опыта	h_1	Число частиц N						$y = \ln(N_0/N)$	$\Delta(y)$
	мкм	1	2	3	4	5	Среднее		
1									
2									
...									
...									

- 3.8. Заполните в таблице 2 столбец «Среднее»: усреднять надо все значения N , записанные в одной строке, то есть относящиеся к одному опыту.
- 3.9. Заполните в таблице 2 последние два столбца.
- 3.10. На основании данных таблицы 2 постройте график экспериментальной зависимости переменной y от высоты области наблюдения h_1 . Вставьте планки погрешностей и линию тренда.
- 3.11. Прокомментируйте построенный график.
- 3.12. Если ваши эксперименты подтвердили, что зависимость $y(h_1)$ – прямо пропорциональная, определите коэффициент пропорциональности α и постоянную Больцмана. Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН и заполните таблицу 3.

Таблица 3

Измерение постоянной Больцмана k

Величина	α	$k = m^*g/\alpha T$
Размерность	мкм ⁻¹	Дж/К
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

3.13. Запишите результат измерения постоянной Больцмана в стандартном виде и прокомментируйте этот результат.

3.14. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

Эксперимент 2. Исследование зависимости среднего числа частиц в области наблюдения N от температуры среды T .

3.1. Выберите условия эксперимента: массу частицы m , жидкость, увеличение и высоту области наблюдения h_1 . Результаты запишите в таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Масса частицы	m	мг	
Плотность материала частиц	ρ	г/см ³	
Радиус частиц	R	мкм	
Жидкость			
Плотность жидкости	ρ_0	г/см ³	
Масса жидкости, вытесняемой частицей	$m_{ж}$	мг	
Эффективная масса частицы	m^*	мг	
Высота кюветы	H	мкм	
Высота области наблюдения	h_1	мкм	
	Δh	мкм	
	h	мкм	
Увеличение	k_0		
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(T)$	К	
	$\Delta(N)$	шт.	
	$\Delta(m)$	мг	
	$\Delta(R)$	мкм	
	$\Delta(\rho_0)$	г/см ³	
	$\Delta(m_{ж})$	мг	
	$\Delta(m^*)$	мг	
	$\Delta(g)$	м/с ²	

3.2. Заполните остальные ячейки таблицы 1.

- 3.3. Установите минимальную температуру среды 290 К.
- 3.4. Установите с помощью горизонтальной линейки в левом окне визуализации минимальное значение горизонтальной координаты области наблюдения: $x_1 = 0$ (поставьте бегунок линейки в крайнее левое положение). Запишите в таблицу 2 значение числа частиц в области – в раздел таблицы «Число частиц N », колонка 1.

Таблица 2

Зависимость среднего числа частиц N в области наблюдения от температуры среды T

Номер опыта	T	Число частиц N				$x = 1/T$	$\Delta(x)$	$y = \ln(NT)$	$\Delta(y)$
	К	1	2	3	Среднее	К ⁻¹	К ⁻¹	К	
1									
2									
...									
...									

- 3.5. Переместите область наблюдения примерно в центр и запишите число частиц в области в таблицу 2 (в следующую колонку 2). Затем переместите область наблюдения в крайнее правое положение и запишите число частиц в области в колонку 3 таблицы 2.
- 3.6. Увеличьте на 10 – 20 градусов температуру среды, после чего снова проделайте пункты 3.4 и 3.5. Естественно, результаты измерения числа частиц N следует записывать в следующую строку таблицы 2.
- 3.7. Прodelайте пункт 3.6 ещё несколько раз – вплоть до максимальной температуры 460 К.
- 3.8. Заполните в таблице 2 столбец «Среднее»: усреднять надо три значения N , записанные в одной строке, то есть относящиеся к одной температуре.
- 3.9. Заполните в таблице 2 остальные столбцы.
- 3.10. На основании данных таблицы 2 постройте график экспериментальной зависимости между переменными x и y . Вставьте планки погрешностей и линию тренда.
- 3.11. Прокомментируйте построенный график.
- 3.12. Если ваши эксперименты подтвердили, что зависимость $y(x)$ – линейная, определите коэффициент пропорциональности B и постоянную Больцмана. Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН и заполните таблицу 3.

Таблица 3

Измерение постоянной Больцмана k

Величина	B	$k = -m^*gh/B$
Размерность	мкм ⁻¹	Дж/К
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

3.13. Запишите результат измерения постоянной Больцмана в стандартном виде и прокомментируйте этот результат.

Обработка эксперимента 2 методом прямого сравнения.

Эту часть работы можно не делать, если вас удовлетворяют полученные результаты. Если же они вас не удовлетворяют или вы хотите получить дополнительное экспериментальное подтверждение распределения Больцмана, то надо провести расчёты по формуле (21) и подобрать значение параметра N_c так, чтобы результаты экспериментов и расчётов не противоречили друг другу.

3.14. Перед проведением расчётов заполните таблицу 4.

Таблица 4

Данные для расчётов зависимости $N(T)$

Постоянная Больцмана	k	Дж/К
Характеристическая температура	θ	К
Параметр высоты	k_1	
Число частиц в столбе	N_c	шт.

Значение параметра N_c вы заранее не знаете, вам его надо будет подобрать. Посмотрите на данные в таблице 2 и определите по своему усмотрению, какое значение N_c можно взять в качестве нулевого приближения. Это число и запишите в таблицу 5. Позже вы его замените.

3.15. Перенесите результаты прямых измерений N и T из таблицы 2 в следующую таблицу 5.

Таблица 5

Зависимость среднего числа частиц N в области наблюдения от температуры среды T

Эксперимент						Теория		
Номер опыта	T	Число частиц N				T	$z = e^{-\theta/T}$	N
	К	1	2	3	Среднее	К ⁻¹		шт.
1								
2								
...								
...								

- 3.16. Заполните столбец «Т» в разделе «Теория» таблицы 5. Совсем не обязательно, чтобы это были те же числа, что и в эксперименте. Более того, желательно, что диапазон температур, для которых производятся расчёты, был немного шире диапазона температур в эксперименте.
- 3.17. Проведите расчёты по формуле (21), результаты впишите в столбец «N».
- 3.18. Постройте два графика зависимости $N(T)$: экспериментальный и теоретический – на *одном* поле. Для теоретического графика используйте тип диаграммы: «Точечная с гладкими кривыми», для экспериментального графика – тип «Точечная». На экспериментальном графике не забудьте указать планки погрешностей.
- 3.19. Если теоретическая кривая не проходит через экспериментальные точки, измените значение N_c в таблице 4. Повторяйте эту операцию до тех пор, пока не добьётесь наилучшего соответствия между теорией и экспериментом.
- 3.20. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

4. Оценка погрешностей измерений

4.1. Погрешности прямых измерений.

Из прямых измерений самую большую погрешность имеет число частиц N . Эта погрешность – случайная, её можно уменьшить путём многократных измерений, поэтому вам и предлагается каждый опыт проводить несколько раз (при разных горизонтальных положениях области наблюдений), а затем результаты усреднить. Количество многократных измерений, которое вам предлагается, равно 5 в первом эксперименте и равно 3 во втором эксперименте, но вы, разумеется, можете провести и больше измерений. Погрешность $\Delta(N)$ вы можете оценить по разбросу значений N в каждом из опытов, то есть по разбросу значений N , записанных в каждой строке. Разумно эту погрешность принять равной от 1 до 3.

4.2. Погрешность измерения массы жидкости, вытесняемой частицей.

Значение $m_{\text{ж}}$ определяется по формуле

$$m_{\text{ж}} = \rho_0 V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0,$$

из которой следует, что

$$\varepsilon(m_{\text{ж}}) = 3\varepsilon(R) + \varepsilon(\rho_0), \quad \Delta(m_{\text{ж}}) = m_{\text{ж}} \varepsilon(m_{\text{ж}}).$$

4.3. Погрешность измерения эффективной массы частицы.

Так как эффективная масса частицы – это, по определению, разница

$$m^* = m - m_{\text{ж}},$$

то

$$\Delta(m^*) = \Delta(m) + \Delta(m_{\text{ж}}).$$

4.4. Погрешность измерения вспомогательной переменной $y = \ln \frac{N}{N_0}$.

В соответствии с общим правилом,

$$\Delta(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial N} \right| \Delta(N) + \left| \frac{\partial y}{\partial N_0} \right| \Delta(N_0) = \varepsilon(N) + \varepsilon(N_0) = \frac{\Delta(N)}{N} + \frac{\Delta(N)}{N_0}.$$

4.5. Погрешность измерения вспомогательной переменной $y = \ln(NT)$.

В соответствии с общим правилом,

$$\Delta(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial N} \right| \Delta(N) + \left| \frac{\partial y}{\partial T} \right| \Delta(T) = \varepsilon(N) + \varepsilon(T).$$

4.6. Погрешность измерения вспомогательной переменной $x = \frac{1}{T}$.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(T), \quad \Delta(x) = x\varepsilon(x).$$

4.7. Погрешность измерения постоянной Больцмана в Эксперименте 1.

Для измерения используется формула (8)

$$k = \frac{m^* g}{\alpha T}.$$

Из этой формулы следует, что

$$\varepsilon(k) = \varepsilon(m^*) + \varepsilon(g) + \varepsilon(\alpha) + \varepsilon(T), \quad \Delta(k) = k\varepsilon(k).$$

4.8. Погрешность измерения постоянной Больцмана в Эксперименте 2.

Для измерения используется формула (17)

$$k = -\frac{m^* g h}{B}.$$

Из этой формулы следует, что

$$\varepsilon(k) = \varepsilon(m^*) + \varepsilon(g) + \varepsilon(h) + \varepsilon(B), \quad \Delta(k) = k\varepsilon(k).$$

5. Контрольные вопросы

- 5.1. Какие два фактора влияют на распределение в пространстве молекул равновесного идеального газа?
- 5.2. Что означает термин «распределение Больцмана»?
- 5.3. Какой вид имеет распределение Больцмана для молекул равновесного идеального газа в гравитационном поле Земли?

- 5.4. Что такое «Броуновское движение»?
- 5.5. Какой конкретно экспериментальный факт является критерием справедливости распределения Больцмана в данной лабораторной работе?
- 5.6. Какие два эксперимента предлагается провести в данной лабораторной работе для проверки распределения Больцмана?
- 5.7. Какой из двух предлагаемых экспериментов является более точным и почему?
- 5.8. В чём состоит способ измерения постоянной Больцмана, предлагаемый в данной лабораторной работе?
- 5.9. Какие физические величины позволяет измерять предлагаемая вам лабораторная установка?

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 6.1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 2. – М.: Наука, 1977–1985 г.
- 6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
- 6.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 6.4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
- 6.5. Рипп А.Г. Обработка измерений: методическое пособие. – Севастополь: СНУЯЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Матузаева Ольга Вячеславовна**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 222/2025. Объем 1,5 п.л. Усл. печ. л. 1,39. Уч. изд. л. 1,47.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»