

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, О.В. Матузаева

ЗАКОН СТОКСА

Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2026

УДК 539.3(075.8)
ББК 22.251я73
Р537

Рецензент:

С.А. Чернявская – канд. физ.-мат. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р537 Закон Стокса: учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, О. В. Матузаева ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 20 с.: ил. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с особенностями падения тел в вязких средах: в частности, с законом Стокса и с тем фактом, что стационарная скорость падения шарика пропорциональна квадрату радиуса шарика. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 539.3(075.8)
ББК 22.251я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 28 октября 2025 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

Работа 32Б. Закон Стокса

Цель работы

Целью данной лабораторной работы является:

- изучение явления вязкости в жидкостях,
- исследование зависимости стационарной скорости шарика от его радиуса,
- измерение динамической вязкости и плотности жидкости.

1. Введение

Как известно, жидкости бывают вязкие и текучие. Иными словами, жидкости обладают некоторым свойством – *вязкостью*, и это свойство у разных жидкостей проявляется в разной степени. Например, если какой-либо предмет бросить в жидкость, то он будет либо плавать, либо тонуть. Плавает предмет в любой жидкости одинаково, а вот тонет по-разному: в вязкой жидкости – медленнее, в текучей – быстрее. Почему? – Самое очевидное объяснение состоит в том, что всякая жидкость оказывает на движущийся в ней предмет *сопротивление*, причём это сопротивление тем больше, чем более вязкой является жидкость. Газы тоже оказывают на движущиеся в них предметы сопротивление. Это сопротивление меньше, чем в жидкостях, но причина сопротивления – одна и та же. В дальнейшем будем называть и жидкости, и газы одним термином: «среда».

Так что же является причиной сопротивления в средах? – Разумеется, взаимодействие между молекулами. Молекулы предмета притягивают к себе молекулы среды, а так как предмет движется относительно среды, то он вовлекают в движение и среду. Это значит, что со стороны предмета на среду действует сила, направленная в сторону движения предмета. Тогда, согласно третьему закону Ньютона¹, среда действует на предмет с силой, направленной *против* его скорости, так что эта сила *тормозит* предмет и порождает сопротивление среды.

Важной особенностью сил взаимодействия между молекулами является то, что эти силы – *короткодействующие*. Это означает, что реально взаимодействуют друг с другом не все молекулы предмета и среды, а только ближайшие друг к другу, то есть молекулы предмета, находящиеся на его поверхности, и молекулы тонкого слоя среды (*элементарного* слоя), который непосредственно контактирует с предметом². Однако не следует думать, что только этот элементарный слой увлекается в движение вслед за предметом. Дело в том, что молекулы этого слоя взаимодействуют с молекулами предмета только с одной стороны слоя. С другой стороны слоя его молекулы взаимодействуют с такими же молекулами среды, принадлежащими соседнему элементарному слою. Молекулы этих слоёв тоже притягиваются друг к другу, поэтому пришедший в движение первый слой тянет за собой второй, а второй слой оказывает сопротивление движению первому слою. Точно так же взаимодействуют второй слой с третьим и так далее.

¹ Сила действия равна силе противодействия, и эти силы направлены в противоположные стороны.

² Толщина этого слоя равна среднему расстоянию между молекулами в среде.

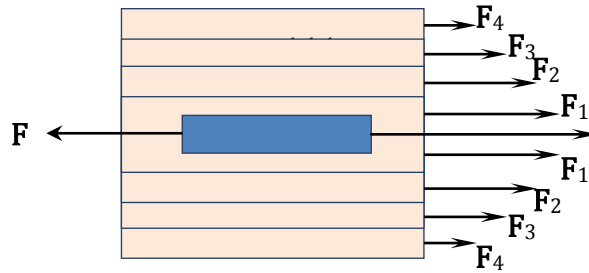


Рис. 1.1. Силы, действующие на тело и на слои среды

Обратите внимание на одну важную деталь этого «эффекта домино». На каждый из элементарных слоёв действуют две силы: ускоряющая сила – со стороны внутреннего слоя³ и тормозящая – со стороны внешнего.

Для того чтобы слой пришёл в движение, ускоряющая сила должна быть больше тормозящей. Но по третьему закону Ньютона тормозящая сила, действующая на данный слой, равна ускоряющей силе, действующей на соседний внешний слой. Следовательно, по мере удаления элементарного слоя от предмета ускоряющая сила, действующая на него, *убывает* и на некотором расстоянии от предмета ℓ падает до нуля. Более наглядный физический смысл этого расстояния: величина ℓ – это толщина слоя среды, которая приходит в движение вследствие появления в среде движущегося предмета. Чем более вязкой является среда, тем большая её часть реагирует на предмет и увлекается в движение. А от чего зависит значение ℓ ? – От

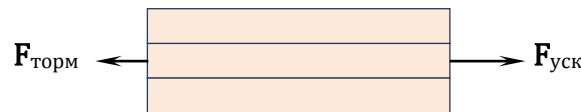


Рис. 1.2. Силы, действующие на отдельный слой

силы притяжения друг к другу каждой пары соседних молекул. Чем больше эта сила, тем сильнее влияют друг на друга соседние элементарные слои и тем большее их количество увлекается в движение. Таким образом, для количественного описания явления вязкости необходимо, в первую очередь, получить формулы взаимодействия друг с другом соседних молекул и соседних элементарных слоёв.

Первым эту задачу решил Исаак Ньютон. В 17 веке, когда он жил и работал, молекулярной теории ещё не было, поэтому Ньютон заинтересовался силой, действующей между соседними элементарными слоями среды. Эту силу, которая ускоряет более медленный слой и тормозит более быстрый, в настоящее время называют *силой внутреннего трения*.

³ Того, который ближе к предмету.

2. Краткая теория

2.1. Закон Ньютона для внутреннего трения

Пусть в некотором направлении движется ламинарный⁴ поток жидкости – см. рисунок 2.1. Направим в направлении потока ось OX , а перпендикулярно ей – ось OY . Разобьём жидкость на элементарные (бесконечно тонкие) слои и рассмотрим взаимодействие двух произвольных соседних слоёв толщиной dy .

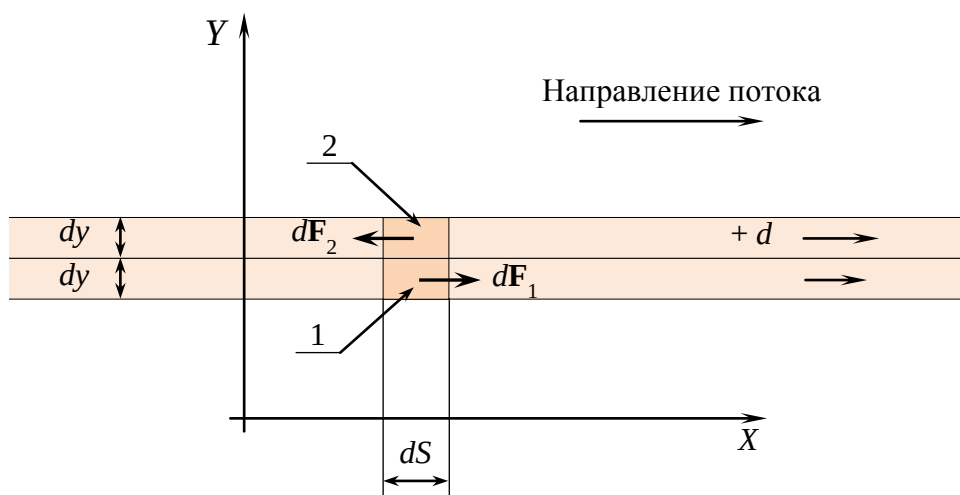


Рис. 2.1. Силы трения между слоями

Пусть для определённости верхний слой движется немного быстрее нижнего и поэтому увлекает его за собой. Нижний же слой оказывает на верхний тормозящее воздействие.

Силы взаимодействия между слоями зависят от площади поверхности контакта, поэтому выберем в рассматриваемых слоях два малых элемента 1 и 2 с площадью контакта dS . На нижний элемент 1 со стороны верхнего 2 действует ускоряющая сила dF_1 , направленная вдоль его скорости $\mathbf{v}$, а на верхний элемент 2 со стороны нижнего 1 – тормозящая сила dF_2 , направленная против его скорости $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Согласно третьему закону Ньютона,

$$d\mathbf{F}_1 = -d\mathbf{F}_2, \quad dF_1 = dF_2 = dF.$$

Ньютон предположил, что сила внутреннего трения dF пропорциональна площади поверхности контакта dS^5 и разности скоростей слоёв $d\mathbf{v}$:

$$dF \sim dS \cdot d\mathbf{v} \quad (2.1)$$

Дифференциал скорости $d\mathbf{v}$ можно представить в виде

⁴ В физике всевозможные движения среды делят на два типа: *ламинарное* (спокойное) движение и *турбулентное* (вихревое). Более простой является теория ламинарного движения.

⁵ Сейчас, когда у нас на вооружении есть молекулярно-кинетическая теория, это предположение нетрудно доказать. Каждый элементарный слой – мономолекулярен, поэтому число молекул в нём dN пропорционально площади слоя dS . С другой стороны, сила внутреннего трения dF порождается взаимодействием между молекулами контактирующих слоёв, так что dF пропорционально количеству молекул в каждом слое dN . Вот и выходит, что dF пропорционально dS .

$$dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.2)$$

Далее Ньютон, по всей вероятности, рассуждал так: именно вдоль оси ОУ, перпендикулярной скорости движения слоёв, скорость меняется *наиболее быстро*, поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial y} = |\text{grad}v| \quad . \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) и (2.2) в (2.1) даёт

$$dF \sim dS |\text{grad}v| dy. \quad (2.4)$$

Следующая идея: сила взаимодействия между слоями не должна зависеть от толщины слоёв dy . Как к этой мысли пришёл Ньютон, неизвестно, но с точки зрения молекулярно-кинетической теории это можно объяснить следующим образом. Элементарный слой среды – очень тонкий, но всё же он имеет конкретную толщину d_c , которая примерно равна диаметру молекулы среды. Слой толщиной dy – тоже тонкий, но не обязательно элементарный. Как отмечалось выше, взаимодействие между соседними слоями определяется только взаимодействием между ближайшими молекулами, расположенными по разные стороны от границы между слоями, то есть между молекулами элементарных слоёв. Поэтому, если толщина слоя dy больше d_c , то на силу dF влияют не все молекулы слоя, а только молекулы элементарного слоя, расположенного вдоль границы контакта. Вот и получается, что от величины dy сила dF не зависит. Итак, в формуле (2.4) множитель dy надо убрать. В итоге получается:

$$dF = \eta dS |\text{grad}v|. \quad (2.5)$$

Буквой η обозначен коэффициент пропорциональности, который может зависеть только от особенностей среды, то есть от состава и строения её молекул. Чем больше значение η , тем сильнее взаимодействуют между собой соседние слои среды, тем более вязкой является среда. Поэтому величину η называют *коэффициентом внутреннего трения* или *динамической вязкостью*.

Формулу (2.5) удобно переписать так, чтобы в ней не было дифференциалов. Для этого надо поделить левую и правую часть на dS и обозначить

$$f = \frac{dF}{dS}.$$

В результате получается формула, которую называют *законом Ньютона для внутреннего трения*:

$$\boxed{f = \eta |\text{grad}v|}. \quad (2.6)$$

Физический смысл величины f – это сила внутреннего трения, действующая между соседними слоями единичной площади, поэтому её называют *удельной силой внутреннего трения*.

Итак, удельная сила внутреннего трения зависит только от двух факторов: от градиента скорости в потоке среды и от динамической вязкости среды.

Примечание. Формула (2.6) применима и в том случае, когда взаимодействующие слои находятся по разным сторонам поверхности контакта среды и находящегося в ней тела. В этом случае формула (2.6) позволяет определить силу, действующую на тело со стороны среды. В зависимости от направления этой силы, она может выполнять разные роли: например, может быть силой сопротивления или подъёмной силой.

2.2. Формула Стокса

Закон Ньютона для внутреннего трения позволяет решить многие задачи, связанные с движением жидкости и газа, а также с движением твёрдых тел в жидкой и в газообразной среде. Эти задачи и методы их решения подробно рассмотрены в курсах гидродинамики и аэродинамики. Задача данной лабораторной работы – исследование характера падения твёрдого шарика в некоторой среде. Если бы никакой среды не было, то шарик падал бы равноускоренно – с ускорением свободного падения. Среда меняет характер движения, так как к силе гравитации добавляются ещё две силы: сила Архимеда и сила сопротивления. Сила Архимеда равна

$$F_a = \rho V g, \quad (2.7)$$

где ρ – плотность среды, V – объём шарика, g – ускорение свободного падения.

А как найти силу сопротивления среды? – Решим эту задачу, опираясь на закон Ньютона для внутреннего трения.

Сила сопротивления $\mathbf{F}_c$ складывается из сил внутреннего трения $d\mathbf{F}$, действующих со стороны жидкости на каждый элемент поверхности шарика dS – см. рисунок 2.2. Каждая такая элементарная сила действует вдоль поверхности контакта, то есть по касательной к шару. Итак,

$$\mathbf{F}_c = \int d\mathbf{F}.$$

Для того, чтобы от этого векторного равенства перейти к скалярному, запишем его в проекциях на вертикальную ось OX , при этом учтём, что сила сопротивления $\mathbf{F}_c$ направлена вертикально вверх.

$$F_c = \int dF_x = \iint_{(S)} f dS \cos \alpha.$$

Интегрирование в этой формуле ведётся по всей поверхности шарика.

Используем теперь формулу Ньютона для удельной силы внутреннего трения (2.6).

$$F_c = \iint_{(S)} \eta |\operatorname{grad} v| dS \cos \alpha.$$

Динамическая вязкость η является количественной характеристикой среды, которая во всех точках среды имеет *одно и то же значение*, поэтому η можно вынести из-под интеграла.

$$F_c = \eta \iint_{(S)} |\operatorname{grad} v| dS \cos \alpha.$$

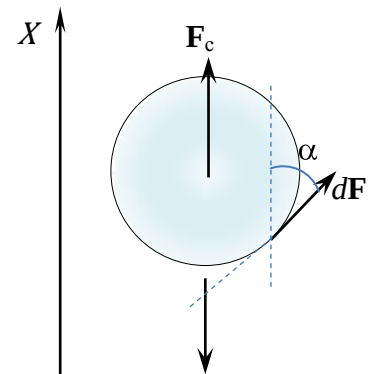


Рис. 2.2. Сила сопротивления и её составляющие

Градиент скорости в разных точках поверхности шарика разный, но так как $|gradv| = \frac{dv}{d\ell}$, а скорость среды по мере удаления от поверхности шарика изменяется от v до 0, то для каждой точки можно подобрать такое число L , что

$$|gradv| = \frac{v}{L},$$

где L – некоторая величина, имеющая размерность длины. Эта величина примерно равна толщине слоя среды ℓ , который увлекает движущийся шарик. Естественно, что на градиент скорости, а значит, и на величину L влияют форма и размеры сосуда, в котором находится среда. Учёт влияния сосуда усложняет задачу, но, к счастью, это влияние тем меньше, чем дальше от стен сосуда находится шарик. Будем считать, что сосуд достаточно велик и его влияние на движение шарика незначительно. Итак,

$$F_c = \eta \iint_{(S)} \frac{v}{L} dS \cos\alpha.$$

Скорость шарика можно вынести из-под интеграла, так что

$$F_c = \eta v \iint_{(S)} \frac{\cos\alpha}{L} dS.$$

Интеграл в этой формуле зависит только от размеров шарика. Вычисление его – задача, выходящая за рамки общей физики. Один из основателей гидродинамики Дж.Г. Стокс⁶ показал, что этот интеграл равен $6\pi r$, где r – радиус шарика. Таким образом,

$$F_c = 6\pi r \eta v. \quad (2.8)$$

Эта формула называется *формулой Стокса*. Она даёт достаточно точный результат при выполнении следующих двух условий.

- В среде при падении шарика не возникает турбулентности. Это условие выполняется, если шарик движется не слишком быстро. Для этого надо опускать его в среду плавно, без броска, то есть с нулевой начальной скоростью. Высота сосуда тоже не должна быть слишком большой, так как при не очень вязкой среде шарик может сильно разогнаться.
- Горизонтальный размер сосуда должен быть как минимум в 5 – 10 раз больше диаметра шарика. В этом случае влиянием формы и размера сосуда на величину L можно пренебречь.

В данной лабораторной работе оба условия выполняются. Во-первых, используемые шарики падают с нулевой начальной скоростью. Во-вторых, высота сосуда равна 4 м, так что шарики даже в газообразной среде разгоняются до скорости, не большей 8 м/с, а в жидкости скорость шарика может достигать всего несколько см/с. В-третьих, диаметр шариков не более 10 см, а сосуд – это цилиндрический резервуар диаметром более 1 м.

⁶ Джордж Габриель Стокс – английский физик и математик 19 века, член Лондонского королевского общества.

2.3. Уравнение движения шарика

Силы, действующие на падающий шарик, показаны на рисунке 2.3.

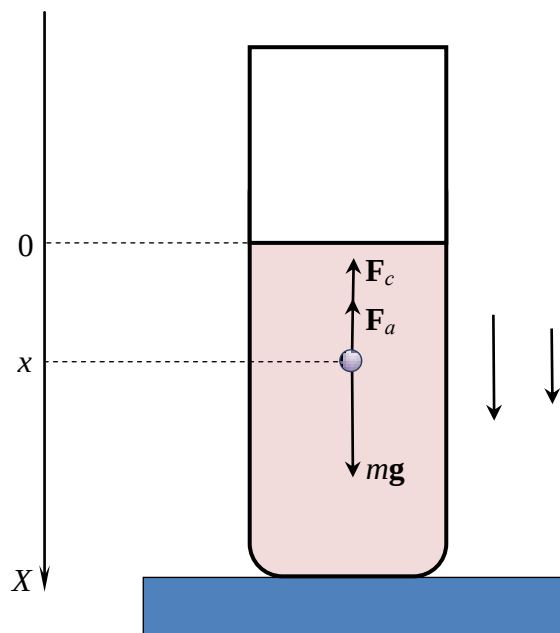


Рис. 2.3. Силы, действующие на шарик

Сложим все три силы и запишем для шарика Второй закон Ньютона в проекциях на ось OX – с учётом формулы (2.7) для силы Архимеда и формулы Стокса для силы сопротивления (2.8).

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - F_a - F_c}{m} = \frac{mg - \rho V g - 6\pi r \eta v}{m}. \quad (2.9)$$

Это – дифференциальное уравнение для скорости шарика $v(t)$. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{mg - \rho V g - 6\pi r \eta v}{m} = g \left(1 - \frac{\rho V}{m} \right) - \frac{6\pi r \eta}{m} v.$$

Массу шарика можно выразить через его плотность ρ_0 и объём: $m = \rho_0 V$. Кроме того, введём обозначение:

$$\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}. \quad (2.10)$$

Величина τ имеет размерность времени, поэтому будем называть её *постоянной времени*. Какой у неё физический смысл, мы выясним позже.

Итак, дифференциальное уравнение (2.9) приводится к следующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{v}{\tau}. \quad (2.11)$$

Для дальнейшего упрощения дифференциального уравнения сделаем замену переменной v на переменную u :

$$v = u + v_s,$$

где $\mathbf{v}_s$ – некоторая константа⁷. В этом случае из (2.11) следует:

$$\frac{du}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{u}{\tau} - \frac{v_s}{\tau}. \quad (2.12)$$

Выберем константу $\mathbf{v}_s$ так, чтобы постоянное слагаемое в правой части этого уравнения оказалась равной нулю:

$$g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{v_s}{\tau} = 0.$$

Тогда получаем:

$$v_s = g\tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (2.13)$$

при этом дифференциальное уравнение (2.12) приводится к совсем простому виду:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau}.$$

Это уравнение легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{\tau}, \quad \ln u = -\frac{t}{\tau} + \ln C,$$

где C – произвольная постоянная. Из последнего равенства следует:

$$u = Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \quad v(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + v_s.$$

Для определения произвольной постоянной C используем начальное условие: шарик отпускают без толчка, то есть $\mathbf{v}(0) = 0$. Это условие даёт:

$$v(0) = Ce^0 + v_s = C + v_s = 0 \Rightarrow v_s = -C.$$

В итоге получаем следующую формулу для $\mathbf{v}(t)$:

$$v(t) = v_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (2.14)$$

Анализ этой формулы говорит о том, что шарик набирает скорость сначала быстро, но потом всё медленнее, так что спустя некоторое время скорость становится практически постоянной и равной числу $\mathbf{v}_s$. Итак, введённая нами формально величина $\mathbf{v}_s$ имеет ясный физический смысл: максимальная скорость, до которой может разогнаться в данной среде свободно падающий шарик. Мы будем называть её *стационарной скоростью*.

Из формулы (2.14) следует ещё физический смысл постоянной времени τ : это время, за которое шарик набирает 63% стационарной скорости. За время 2τ шарик набирает 86% стационарной скорости, за время 3τ – 95% стационарной скорости. Параметр 3τ логично назвать *временем разгона* t_p .

График функции $\mathbf{v}(t)$ показан на рисунке 2.4.

⁷ В дальнейшем мы выясним физический смысл этой константы.

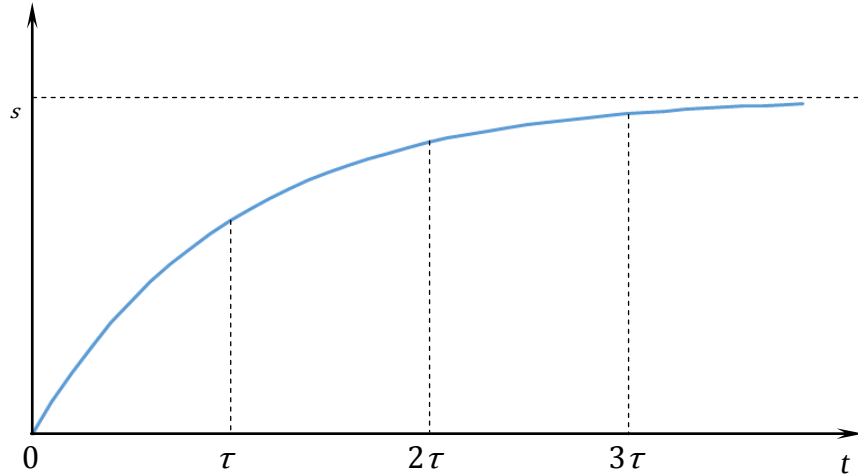


Рис. 2.4. Зависимость скорости шарика от времени

Продифференцировав скорость по времени, можно получить формулу для ускорения шарика:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad a_0 = \frac{v_s}{\tau} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \quad (2.15)$$

Здесь a_0 – это начальное ускорение: $a_0 = a(t = 0)$.

Как следует из формулы (2.15), ускорение движения шарика экспоненциально убывает от начального значения a_0 до нуля. При этом $a(\tau) = 0,37a_0$, то есть составляет 37% от начального ускорения, а ускорение в момент времени разгона равно $a(t_p) = a(3\tau) = 0,05a_0$, то есть только 5% от начального ускорения a_0 .

График функции $a(t)$ показан на рисунке 2.5.

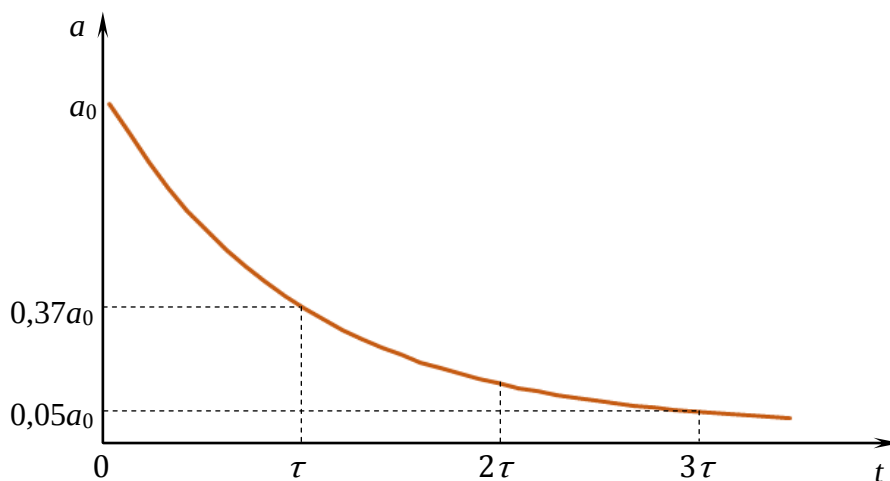


Рис. 2.5. Зависимость ускорения шарика от времени

Обратите внимание на две формулы (2.10) и (2.13):

$$\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}, \quad v_s = g\tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Из них видно, как влияет динамическая вязкость среды η на характер движения шарика.

- В вязких средах с большим значением η время разгона t_p мало и поэтому мала стационарная скорость v_s . Это значит, что большую часть своего движения шарик движется *равномерно* со сравнительно небольшой скоростью v_s . Ясно, что такими средами являются плотные жидкости – их в данной лабораторной работе называют *тяжёлыми жидкостями*.
- Другой предельный случай: движение в газе, где динамическая вязкость η мала. В газе время разгона t_p велико по сравнению с временем падения шарика, поэтому шарик к концу падения разгоняется до скорости, много меньшей, чем стационарная скорость v_s , а ускорение шарика за время падения не успевает существенно уменьшиться, так что шарик движется фактически равноускоренно с ускорением

$$a_0 = \frac{v_s}{\tau} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

- Третий случай – промежуточный. Среда является не слишком вязкой, но и не слабо вязкой, такую среду в данной работе называют *лёгкой жидкостью*. Движение в этой жидкости и не равномерное, и не равноускоренное.

В данной лабораторной работе средой является *тяжёлая жидкость* – с большой динамической вязкостью. Для такой жидкости характерен первый предельный случай, который послужил основой *закона Стокса*.

Всякое тело, падающее в жидкости или газе, сначала разгоняется, но затем разгон прекращается, и тело движется *равномерно*, то есть с постоянной (стационарной) скоростью.

Обратите внимание: этот закон сформулирован для *всякого тела*, и для *всякой среды*. Например, падение парашютиста в воздухе вполне подчиняется закону Стокса. Однако, если скорость, до которой может разогнаться падающее в данной среде тело, достаточно велика, то ламинарное движение слоёв среды, окружающих тело, может смениться на турбулентное – в этом случае закон Стокса не выполняется.

Кроме того, закон Стокса не обязательно выполняется, если тело падает в *сосуде ограниченной высоты* – как в данной лабораторной работе. Именно поэтому в данной работе закон Стокса выполняется только в первом предельном случае, когда средой является жидкость с большой динамической вязкостью.

2.4. Зависимость стационарной скорости шарика от его радиуса

Итак, в тяжёлой жидкости время падения шарика t_n много больше времени разгона t_p , поэтому основную часть времени падения шарик проходит равномерно, со стационарной скоростью v_s . В этом случае, за исключением короткого времени разгона зависимость координаты шарика x от времени t – *линейная*.

Для проверки этого факта надо провести эксперимент, измеряя путь x , пройденный шариком в течение различных интервалов времени t , то есть получить экспериментальную зависимость $x(t)$. Если основная часть точек на графике, за исключением нескольких первых точек, ляжет на прямую линию, то будет подтверждён закон Стокса.

После этого можно провести эксперименты по проверке формул (2.10) и (2.13):

$$\tau = \frac{m}{6\pi r \eta}, \quad v_s = g\tau \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Подстановка первой из них во вторую даёт:

$$v_s = \frac{mg}{6\pi r \eta} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \quad (2.16)$$

Входящие в эту формулу масса шарика m и его радиус r связаны друг с другом формулой:

$$m = \rho_0 V = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Тогда формул (2.16) приводится к следующему виду:

$$v_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_0 g}{\eta} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) r^2 = \frac{2}{9} (\rho_0 - \rho) \frac{g}{\eta} r^2. \quad (2.17)$$

В итоге мы получаем интересный факт: *стационарная скорость шарика v_s пропорциональна квадрату его радиуса r^2 .*

Это значит, что большие шарики падают *быстрее* маленьких. Формулу (2.17) нетрудно проверить экспериментально. Для этого её целесообразно сначала линеаризовать, введя вспомогательную величину $y = r^2$. В результате из (2.17) следует прямо пропорциональная зависимость между стационарной скоростью v_s и величиной y :

$$v_s = ky,$$

где коэффициент пропорциональности k равен

$$k = \frac{2}{9} (\rho_0 - \rho) \frac{g}{\eta}. \quad (2.18)$$

Итак, надо провести серию экспериментов с разными шариками, выполненными из одного и того же материала. В каждом из экспериментов надо измерять радиус шарика r и скорость его падения v_s . Затем, используя результаты экспериментов, надо построить график зависимости $v_s(y)$ и убедиться, что точки на этом графике укладываются на прямую линию, проходящую через начало координат. Это будет подтверждением формулы (2.17).

После того, как будет подтверждена прямо пропорциональная зависимость между v_s и y , можно измерить коэффициент пропорциональности k . Тогда формулу (2.18) можно использовать для измерения динамической вязкости жидкости η , если известны плотности жидкости и шарика ρ и ρ_0 :

$$\eta = \frac{2}{9} (\rho_0 - \rho) \frac{g}{k}. \quad (2.19)$$

2.5. Методика измерения стационарной скорости шарика

Для измерения стационарной скорости падения шарика надо, прежде всего, определить время разгона шарика t_p , после которого его движение становится равномерным. Это можно сделать, если сначала получить экспериментальную зависимость $x(t)$, затем построить график этой зависимости и на этом графике определить

то значение t , начиная с которого экспериментальные точки укладываются на прямую линию. Данное значение и есть время разгона t_p . После этого шарик движется равномерно. Обозначим координату шарика в момент t_p буквой x_p и назовём её «разгонный путь»: $x_p = x(t = t_p)$. Тогда

$$v_s = \frac{x_n - x_p}{t_n - t_p}, \quad (2.20)$$

где x_n – координата точки падения шарика на дно сосуда, а t_n – время падения.

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

Установка позволяет наблюдать собственные гармонические колебания пружинного маятника с одной и двумя пружинами. При включении установки (при запуске программы) открывается начальное окно с названием работы и кнопками «Ход работы», «Эксперимент», «Завершение работы». Вам надо нажать на кнопку «Эксперимент», и тогда откроется окно, показанное на рисунке 3.1.

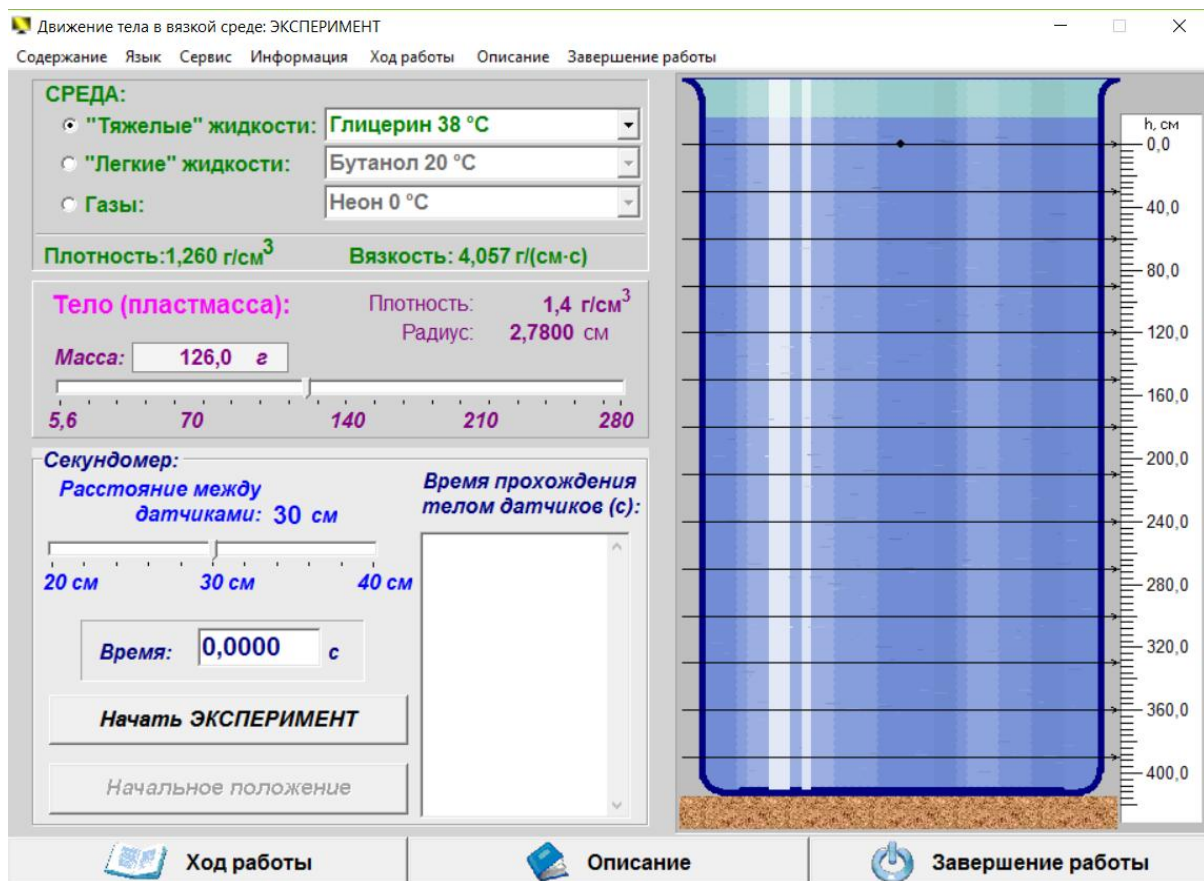


Рис. 3.1. Окно «Эксперимент»

Окно содержит три раздела: панель условий эксперимента (слева сверху), инструментальная панель (слева внизу) и окно визуализации (справа).

1. *Панель условий эксперимента* содержит окно «СРЕДА» для выбора типа среды: «Тяжёлые» жидкости, «Лёгкие» жидкости, Газы и линейку с бегунком **Мас-**

са для выбора массы шарика. Кроме того, на этой панели указано вещество, из которого изготовлен шарик (пластмасса плотностью $\rho = 1,4 \text{ г/см}^3$) и радиус шарика в сантиметрах.

2. В окне *визуализации* вы видите сосуд с жидкостью, падающий шарик и линейку **h, см**. Рядом с сосудом (справа) расположены на одинаковом расстоянии друг от друга датчики, реагирующие на пролетающий мимо них шарик. Датчики не показаны, но показаны горизонтальными линиями уровни, на которых находятся датчики.

3. *Инструментальная панель* содержит линейку с бегунком **Расстояние между датчиками**, окно **Время**, окно **Время прохождения телом датчиков** и две кнопки: **Начать ЭКСПЕРИМЕНТ** и **Начальное положение**.

- Расстояние между датчиками можно изменять в диапазоне от 20 до 40 см.
- В окне **Время** отображается полное время движения шарика, то есть время его падения на дно сосуда.
- В окне **Время прохождения телом датчиков** отображаются моменты прохождения шарика мимо всех датчиков.
- Кнопка **Начать ЭКСПЕРИМЕНТ** запускает шарик. После нажатия этой кнопки шарик в окне визуализации начинает движение, а кнопка превращается в кнопку **Остановить ЭКСПЕРИМЕНТ**.

При нажатии кнопки **Начальное положение** шарик оказывается в исходной позиции, то есть верху сосуда, причём в неподвижном состоянии.

4. Порядок выполнения работы

4.1. Обратитесь к преподавателю для того, чтобы он выбрал для вас среду и шарик. После этого заполните таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Жидкость			
Плотность жидкости	ρ	г/см ³	
Масса шарика	m	г	
Радиус шарика	r	см	
Плотность шарика	ρ_0	г/см ³	
Динамическая вязкость жидкости	η	г/(см·с)	
		Па·с	
Расстояние между датчиками	s	см	
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(x)$	см	
	$\Delta(x_p)$	см	
	$\Delta(m)$	г	
	$\Delta(r)$	см	
	$\Delta(\rho)$	г/см ³	
	$\Delta(\rho_0)$	г/см ³	
	$\Delta(\eta)$	Па·с	
	$\Delta(g)$	м/с ²	

Расстояние между датчиками выберите самостоятельно.

Плотность шарика ρ_0 , указанная на панели условий эксперимента (1,4 г/см³), задана с низкой точностью – всего 2 значащие цифры, но её можно узнать точнее, так как заданы радиус и масса шарика. Для этого используйте формулу

$$\rho_0 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Эксперимент 1. Исследование характера движения шарика

- 4.2. Запишите в заголовке таблицы 2 массу шарика.
- 4.3. Нажмите кнопку **Начать ЭКСПЕРИМЕНТ**. Шарик начнёт падать, а в окне **Время прохождения телом датчиков** будут появляться числа. После окончания эксперимента, то есть после падения шарика на дно сосуда перенесите информацию из окна **Время прохождения телом датчиков** в столбец « t » таблицы 2.

Таблица 2
Зависимость координаты шарика x от времени t
(масса шарика равна г)

Номер датчика	x см	t с
1	0	0
2		
...		
...		
...		

- 4.4. Заполните в таблице 2 столбец « x ».
- 4.5. На основании данных таблицы 2 постройте график зависимости $x(t)$. Не забудьте нанести на график планки погрешностей.
- 4.6. Убедитесь, что экспериментальные точки, начиная с некоторого момента времени (времени разгона t_p), ложатся на прямую линию, для чего нанесите на график прямую линию, используя вкладку Вставка, а в ней: Фигуры и значок «Линия».

Если вам удалось провести прямую линию по большинству экспериментальных точек, то ваш эксперимент подтвердил закон Стокса. Отметьте это в своём отчёте.

Эксперимент 2. Исследование зависимости стационарной скорости шарика от радиуса шарика

- 4.7. Выберите массу шарика минимальной, эту массу никуда записывать не надо, но обязательно запишите *радиус* шарика в таблицу 3.
- 4.8. Нажмите кнопку **Начать ЭКСПЕРИМЕНТ**. После падения шарика на дно сосуда перенесите в таблицу 3 время прохождения шарика мимо последнего датчика t_n – именно это время следует считать временем падения шарика, а не то, что высвечивается в окне **Время**, так как высота сосуда неизвестна, а координату последнего датчика можно определить, зная расстояние между датчиками, или по линейке **h, см** справа от сосуда.

- 4.9. Перенесите информацию из окна **Время прохождения телом датчиков** в таблицу 2 – вместо того, что там было ранее занесено в ходе Эксперимента 1. Позднее вы восстановите эту информацию.
- 4.10. Определите на графике зависимости $x(t)$ точку, начиная с которой экспериментальные точки укладываются на прямую линию. Занесите её координаты в таблицу 3 – в ячейки « x_p » (разгонный путь) и « t_p » (время разгона).
- 4.11. Занесите в таблицу 3 погрешность измерения времени разгона $\Delta(t_p)$ – как её оценить, написано в пункте 5.
- 4.12. Повторите ещё 9 раз пункты 4.7 – 4.11 с той разницей, что каждый раз массу шарика нужно немного увеличивать. Шаг изменения массы шарика выберите так, чтобы в последнем эксперименте масса была *максимальной*. Не обязательно, чтобы шаг был строго одним и тем же – лучше, если шаг будет постепенно уменьшаться.

Таблица 3

Зависимость скорости шарика от его радиуса

Номер опыта	r см	t_p с	x_p см	t_n с	v_s см/с	$y = r^2$ см ²	$\Delta(t_p)$ с	$\Delta(y)$ см ²	$\Delta(v_s)$ см/с
1									
2									
...									
...									
...									
10									

- 4.13. Восстановите информацию в таблице 2, для чего снова выберите в окне **Масса** то значение массы шарика, которое было в Эксперименте 1. Соответственно, поправьте прямую линию на графике зависимости $x(t)$.
- 4.14. Заполните в таблице 3 столбцы « v_s », « $y = r^2$ » и столбцы с погрешностями $\Delta(y)$, $\Delta(v_s)$. Значения стационарной скорости шарика v_s определяйте, используя формулу (2.20) $v_s = \frac{x_n - x_p}{t_n - t_p}$.
- 4.15. На основании данных таблицы 3 постройте график зависимости $v_s(y)$. Не забудьте нанести на график планки погрешностей.
- 4.16. Убедитесь, что экспериментальные точки ложатся на прямую линию, проходящую через начало координат, для чего нанесите на график линию тренда, причём в параметрах линии тренда выберите «Линейная», «Показывать уравнение на диаграмме» и в окне «Настроить пересечение» запишите число 0.
- 4.17. Если линия тренда прошла по всем экспериментальным точкам, то ваш эксперимент подтвердил формулу Стокса. Отметьте это в своём отчёте.
- 4.18. Для измерения динамической вязкости жидкости заполните таблицу 4. Определить значения коэффициента пропорциональности k зависимости $v_s(y)$ и оценить абсолютную погрешность измерения $\Delta(k)$ вам позволит функция ЛИ-НЕЙН. Вязкость жидкости вы узнаете по формуле (2.19) $\eta = \frac{2}{9}(\rho_0 - \rho) \frac{g}{k}$. Как оценить погрешность измерения вязкости $\Delta(\eta)$, написано в пункте 5.

Динамическая вязкости жидкости

Величина	k	η
Размерность	$(\text{см}\cdot\text{с})^{-1}$	Па·с
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

4.19. Запишите результат измерения динамической вязкости жидкости в стандартной форме:

$$\eta = (... \pm ...) \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad \varepsilon(\eta) = ...\%.$$

4.20. Сравните измеренное и заданное значения динамической вязкости жидкости и напишите в отчёте, о чём говорит это сравнение.

4.21. Отметьте в отчёте точность измерения динамической вязкости жидкости η .

4.22. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений.

Прямым способом в данной работе измеряются шесть величин: радиус шарика r , масса шарика m , координата шарика x , время прохождения шарика мимо датчиков t , разгонный путь x_p и время разгона t_p .

Радиус шарика r высвечивается на панели условий эксперимента в см в виде числа с четырьмя знаками после запятой. Следовательно, $\Delta(r) = 0,0001 \text{ см}$.

Массу шарика m вы видите в окне **Масса** в граммах в виде числа с одним знаком после запятой. Следовательно, $\Delta(m) = 0,1 \text{ г}$.

Координата шарика x определяется расстоянием между датчиками, которое задаётся в сантиметрах с помощью линейки с бегунком и высвечивается над линейкой в виде целого числа. Поэтому $\Delta(x) = 1 \text{ см}$. Однако числа на линейке в окне визуализации указаны с точностью до десятых долей см, так что можно принять погрешность координаты шарика $\Delta(x) = 0,1 \text{ см}$.

Время прохождения шарика мимо датчиков t вы видите в соответствующем окне в секундах в виде числа с четырьмя знаками после запятой. Таким образом, $\Delta(t) = 0,0001 \text{ с}$.

Разгонный путь шарика x_p вы определяете, как координату той точки на графике зависимости $x(t)$, начиная с которой экспериментальные точки укладываются на прямую линию. Вы можете ошибиться не более, чем на одну точку, и даже меньше – примерно на 1/10 расстояния между соседними точками. Поэтому погрешность $\Delta(x_p)$ можно считать равной 1/10 расстояния между датчиками: $\Delta(x_p) = \frac{s}{10}$.

Время разгона шарика t_p вы определяете, как момент времени прохождения шарика мимо датчика с координатой x_p . Поэтому погрешность $\Delta(t_p)$ можно оценить аналогично погрешности $\Delta(x_p)$ – как 1/10 разницы между значениями t_p соседних экспериментальных точек зависимости $x(t)$.

5.2. Погрешности заданных величин.

На панели условий эксперимента заданы три величины: плотности среды и шарика ρ и ρ_0 и динамическая вязкость среды η .

Плотность среды ρ задана в г/см³ в виде числа с тремя знаками после запятой. Поэтому $\Delta(\rho) = 0,001$ г/см³.

Вязкость среды η задана в г/(см·с) в виде числа с тремя знаками после запятой. Поэтому $\Delta(\eta) = 0,001$ г/(см·с). Переведите это число в единицы Па·с.

Плотность шарика ρ_0 задана с низкой точностью, поэтому вам предложено определять её по формуле $\rho_0 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$. Из этой формулы следует, что

$$\varepsilon(\rho_0) = \varepsilon(m) + 3\varepsilon(r), \quad \Delta(\rho_0) = \rho_0 \varepsilon(\rho_0).$$

Ускорение свободного падения. В районе Севастополя оно равно $(9,807 \pm 0,002)$ м/с².

5.3. Погрешность измерения вспомогательной величины $y = r^2$.

В соответствии с общей формулой,

$$\Delta(y) = \left| \frac{dr^2}{dr} \right| \Delta(r) = 2r\Delta(r).$$

5.4. Погрешность измерения стационарной скорости шарика v_s .

Для измерения v_s используется формула (2.20) $v_s = \frac{x_n - x_p}{t_n - t_p}$, из которой следует:

$$\varepsilon(v_s) = \varepsilon(x_n - x_p) + \varepsilon(t_n - t_p),$$

$$\varepsilon(x_n - x_p) = \frac{\Delta(x_n - x_p)}{x_n - x_p} = \frac{\Delta(x_n) + \Delta(x_p)}{x_n - x_p}, \quad \varepsilon(t_n - t_p) = \frac{\Delta(t_n - t_p)}{t_n - t_p} = \frac{\Delta(t_n) + \Delta(t_p)}{t_n - t_p}.$$

Так как $\Delta(x_n) \ll \Delta(x_p)$ и $\Delta(t_n) \ll \Delta(t_p)$, а кроме того, $x_p \ll x_n$ и $t_p \ll t_n$, то

$$\varepsilon(x_n - x_p) \approx \frac{\Delta(x_p)}{x_n}, \quad \varepsilon(t_n - t_p) \approx \frac{\Delta(t_p)}{t_n}.$$

Итак,

$$\varepsilon(v_s) = \frac{\Delta(x_p)}{x_n} + \frac{\Delta(t_p)}{t_n}, \quad \Delta(v_s) = v_s \varepsilon(v_s).$$

5.5. Погрешность измерения динамической вязкости η .

Для измерения η используется формула (2.19): $\eta = \frac{2}{9}(\rho_0 - \rho) \frac{g}{k}$. Из неё следует:

$$\varepsilon(\eta) = \varepsilon(\rho_0 - \rho) + \varepsilon(g) + \varepsilon(k),$$

$$\varepsilon(\rho_0 - \rho) = \frac{\Delta(\rho_0 - \rho)}{\rho_0 - \rho} = \frac{\Delta(\rho_0) + \Delta(\rho)}{\rho_0 - \rho}.$$

$$\Delta(\eta) = \eta \varepsilon(\eta).$$

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что является причиной силы сопротивления жидкости и газа?
- 6.2. От чего зависит сила взаимодействия между двумя соседними слоями жидкости?
- 6.3. Что называется коэффициентом внутреннего трения (динамической вязкостью)?
- 6.4. Напишите формулу Стокса и назовите величины, входящие в неё.
- 6.5. Напишите формулу зависимости скорости шарика от времени и назовите величины, входящие в неё.
- 6.6. Что такое стационарная скорость шарика?
- 6.7. Как влияет динамическая вязкость среды η на характер движения шарика?
- 6.8. В чём состоит закон Стокса?
- 6.9. Почему в данной лабораторной работе закон Стокса выполняется только для тяжёлых жидкостей?
- 6.10. Как зависит стационарная скорость падающего в жидкости шарика от его размера?
- 6.11. Какие две физические закономерности требуется экспериментально проверить в данной лабораторной работе?
- 6.12. Каким образом измеряется стационарная скорость шарика в данной лабораторной работе?
- 6.13. Каким образом в данной лабораторной работе измеряется динамическая вязкость жидкости?

7. Рекомендуемая литература

- 7.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М., Наука, 1989.
- 7.2. Кикоин А.К. Кикоин И.К. Молекулярная физика, – М.: Наука, 1976.
- 7.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 7.4. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Издательство НИ ТПУ, 2007.
- 7.5. Рипп А.Г. Обработка измерений. Методическое пособие. – СНУЯЭП, 2012.

В авторской редакции