

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко

СКОЛЬЖЕНИЕ ШАРИКА ПО КРУГОВОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2026

УДК 531.44(075.8)
ББК 22.3я73
Р537

Рецензент:
С.А.Чернявская – канд. физ.-мат. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р537 Скольжение шарика по круговой направляющей: учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 21 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с особенностями работы силы трения, действующей на тело при его движении по криволинейной траектории – в частности, по круговой. Студентам предлагается убедиться экспериментальным путём в двух особенностях движения шарика по круговой направляющей и, кроме того, измерить коэффициент трения. Интересной особенностью предлагаемой лабораторной работы является то, что студентам предлагается *измерить* значение интеграла – используя численное интегрирование. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 531.44(075.8)
ББК 22.3я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 28 октября 2025 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

Работа 69. Скольжение шарика по круговой направляющей

Цели работы

1. Исследовать характер движения твёрдого шарика по вертикальной круговой направляющей.
2. Измерить коэффициент трения скольжения шарика.

1. Описание экспериментальной установки

Схема установки показана на рисунке 1.

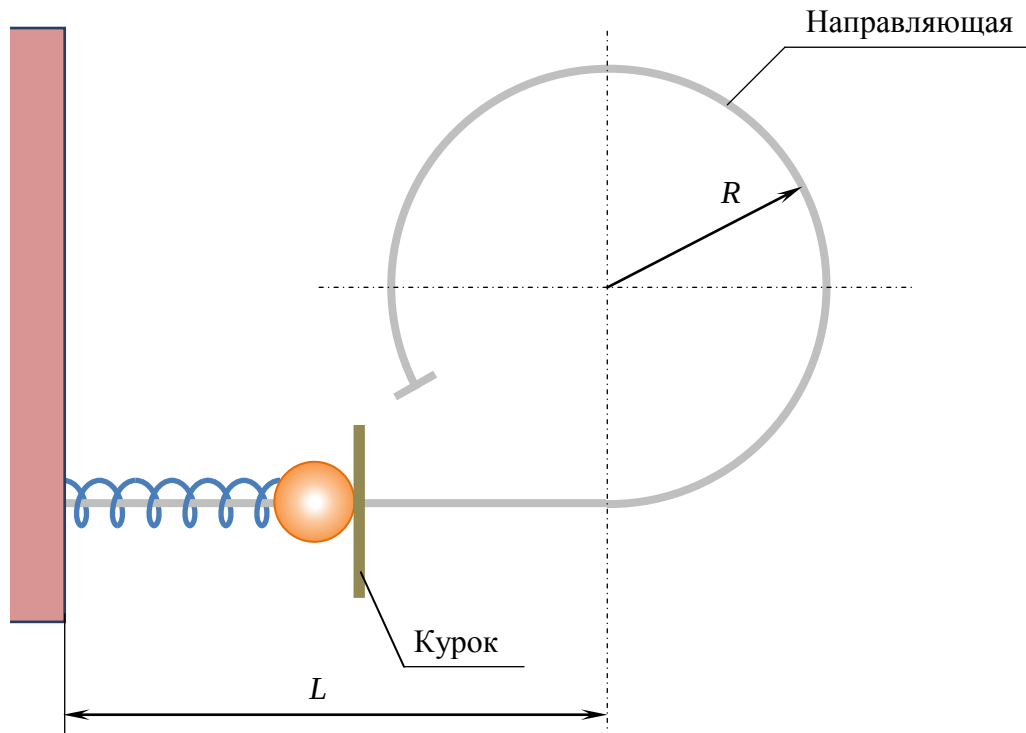


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

В твёрдый шарик продета по его диаметру стальная спица (направляющая), по которой шарик может скользить. Направляющая имеет два участка: прямолинейный горизонтальный длиной L и круговой вертикальный радиусом R . На горизонтальный участок направляющей надета пружина, один конец которой закреплён в вертикальной стенке, там же закреплена и направляющая. Второй конец пружины свободен. Если к этому концу подвести шарик, а затем с помощью курка сжать пружину, то после спуска курка пружина распрямляется и разгоняет шарик. После отделения от пружины шарик продолжает скользить по направляющей и постепенно под действием силы трения скольжения и силы тяжести (на круговом участке) останавливается. Если остановка происходит на круговом участке, то после остановки шарик скатывается вниз по правой стороне направляющей, разгоняется и затем — уже на прямолинейном участке — снова останавливается. Если шарик при спуске курка получает от пружины достаточно большую скорость, то он может достигнуть верхней точки окружности и затем скатиться вниз по левой стороне направляющей. В конце её находится ограничитель, останавливающий шарик.

Интересно исследовать более подробно характер движения шарика по направляющей. Это можно сделать теоретически и экспериментально. Рассмотрим сначала, что даёт теория.

2. Краткая теория

2.1. Уравнения движения шарика

На начальном участке (горизонтальном) на шарик действует сила трения, направленная против его скорости (влево) и равная

$$F_{\text{тр}} = \mu P,$$

где P – сила прижатия шарика к направляющей (вес), а μ – коэффициент трения. Сила прижатия равна, в соответствии с третьим законом Ньютона, силе реакции со стороны направляющей N . А из второго закона Ньютона следует, что сила реакции N равна силе тяжести mg , действующей на шарик. Таким образом, сила трения, действующая на шарик на горизонтальном участке, равна

$$F_{\text{тр}} = \mu mg.$$

Эта сила постоянна, поэтому шарик после отделения от пружины движется *равнозамедленно* с ускорением

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = \mu g.$$

Характер движения шарика на круговом участке более сложен. Рассмотрим это движение по правой части составляющей, для чего используем Второй закон Ньютона. На рисунке 2 показаны силы, действующие на шарик: сила тяжести mg , сила реакции со стороны направляющей N и сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$. А ещё показана вращающаяся декартова система координат (τ, n) , её орты называются соответственно тангенциаль и нормаль.

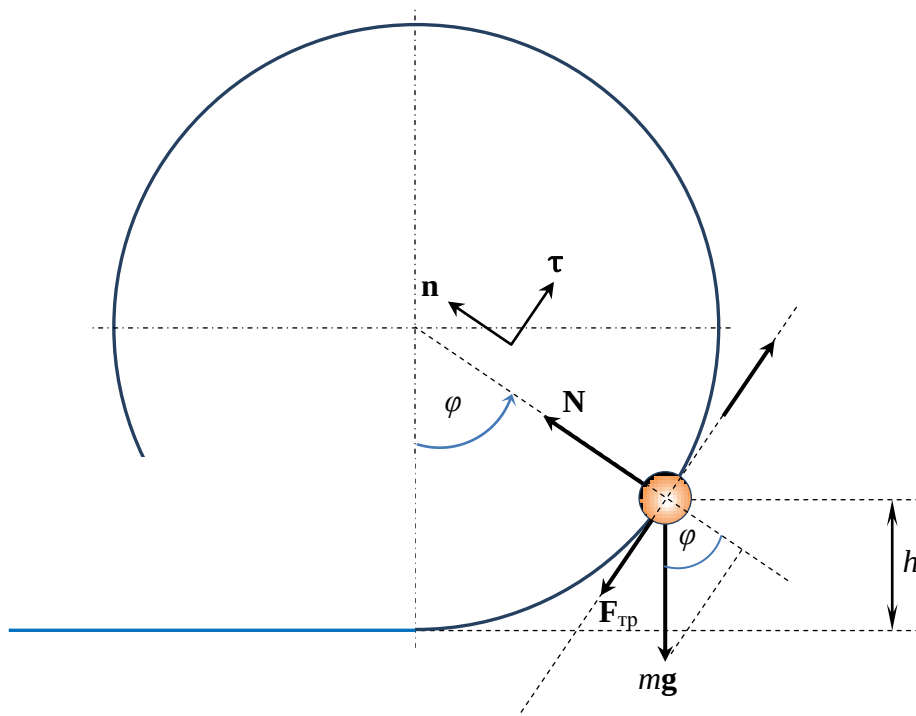


Рис. 2. Силы, действующие на шарик на круговом участке

Итак, запишем второй закон Ньютона:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + m\mathbf{g}}{m}.$$

Для перехода от векторов к скалярам запишем это векторное уравнение в проекциях на тангенциаль $\boldsymbol{\tau}$ и нормаль $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{-F_{\text{тр}} - mg \sin \varphi}{m} = \frac{-\mu N - mg \sin \varphi}{m} = \frac{-\mu N}{m} - g \sin \varphi, \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{N - mg \cos \varphi}{m} = \frac{N}{m} - g \cos \varphi. \end{cases} \quad v(\varphi).$$

Исключим из уравнений силу реакции N . Для этого выразим $\frac{N}{m}$ из второго уравнения и подставим в первое:

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{R} + g \cos \varphi, \quad \frac{dv}{dt} = -\mu \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \varphi \right) - g \sin \varphi.$$

Получилось дифференциальное уравнение относительно скорости шарика, решением которого является функция $v(\varphi)$. Правда, это уравнение справедливо только для нижней части траектории, где угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$, а проекция силы тяжести на нормаль отрицательна. В верхней части траектории угол $\varphi > \frac{\pi}{2}$, а проекция силы тяжести на нормаль положительна. Убедитесь самостоятельно, что в этом случае получается такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \varphi \right) - g \sin \varphi.$$

Оба уравнения можно записать в следующей общей форме:

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R} - \mu g |\cos \varphi| - g \sin \varphi. \quad (1)$$

Это – нелинейное и неоднородное дифференциальное уравнение, поэтому решать его непросто. Но мы и не будем пока его решать, всё-таки функция $v(\varphi)$ – не самая наглядная функция, характеризующая кинематику движения шарика. Гораздо наглядней и полезней функция $\varphi(t)$, и дифференциальное уравнение для неё совсем нетрудно получить из уравнения (1). Так как $v = \omega R = R \frac{d\varphi}{dt}$, то $\frac{dv}{dt} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Тогда из (1) вытекает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{g}{R} (\mu |\cos \varphi| + \sin \varphi) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение – не проще, чем уравнение (1), однако из него следует один важный количественный вывод. В уравнение входят два параметра: коэффициент трения μ и радиус направляющей R . Поэтому и решение уравнения – функция $\varphi(t)$, определяющая кинематику шарика, – тоже зависит от μ и R . От чего ещё может зависеть функция $\varphi(t)$? – Решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий. Этих условий два:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \omega(0) = \omega_0.$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$ зависит, кроме μ и R , ещё от φ_0 и ω_0 . Если время отсчитывать от момента, когда шарик начинает движение по круговой части, то $\varphi_0 = 0$. На величину начальной угловой скорости ω_0 влияют несколько факторов.

- Во-первых, начальная скорость шарика на горизонтальном участке v_1 , зависящая от упругости пружины k , начального сжатия пружины Δx , и массы шарика m .
- Во-вторых, потеря скорости шарика на горизонтальном участке, которая зависит от длины горизонтального пути шарика и действующей на шарик силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$.

Таким образом, функция $\varphi(t)$ зависит от очень многих факторов. Однако можно сделать так, чтобы во всех опытах величина начальной угловой скорости ω_0 была одной и той же постоянной величиной. Тогда $\varphi(t)$ будет зависеть только от μ и R . Если при этом во всех опытах будет использоваться одна и та же направляющая, а шарики будут сделаны из одного и того же материала, то $\varphi(t)$ будет во всех опытах одной и той же функцией. Поэтому шарик во всех опытах будет двигаться совершенно одинаково. Это, в частности означает, что максимальная высота подъёма шариков h_{max} и время подъёма шариков на максимальную высоту T не будет зависеть от массы шариков. Данный факт нетрудно проверить экспериментально, и если он подтвердится, то это будет подтверждением и дифференциальных уравнений движения шарика (1) и (2).

Выясним, как обеспечить условие постоянства начальной угловой скорости ω_0 . Эта скорость связана с линейной скоростью шарика в начале кругового участка v_0 соотношением $v_0 = \omega_0 R$, а для нахождения v_0 можно воспользоваться законом изменения механической энергии шарика:

$$E_0 - E' = A_{\text{тр}}, \quad (3)$$

где E_0 и E' – энергии шарика в конце и начале горизонтального участка, $A_{\text{тр}}$ – работа диссипативной силы трения на горизонтальном участке.

Перед нажатием на курок энергия системы пружина–шарик равна потенциальной энергии сжатой пружины:

$$E' = \frac{k(\Delta x)^2}{2}. \quad (4)$$

При нажатии на курок шарик разгоняется, и после его отделения от пружины она уже не деформирована, так что её потенциальная энергия равна нулю и полная энергия системы пружина–шарик равна кинетической энергии шарика, поэтому, если шарик не остановится на горизонтальном участке, то его энергия в конце участка равна

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (5)$$

Работа постоянной силы трения на горизонтальном участке равна

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} L' \cos \alpha,$$

где L' – длина пути шарика на горизонтальном участке, $\alpha = 180^\circ$ – это угол между скоростью шарика и силой трения. Из рисунка 3, который показывает состояние шарика перед нажатием курка, видно, что

$$L' = L - (\ell_0 - \Delta x),$$

где ℓ_0 – длина недеформированной пружины.

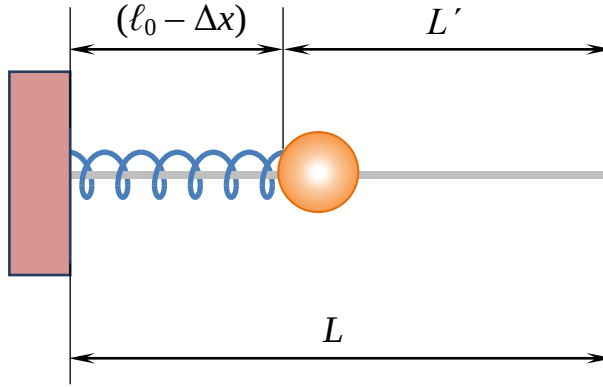


Рис. 3. Состояние шарика перед нажатием курка

Таким образом,

$$A_{\text{тр}} = -\mu mg(L - \ell_0 + \Delta x). \quad (6)$$

Подстановка (4), (5) и (6) в закон изменения механической энергии (3) даёт:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{k(\Delta x)^2}{2} = -\mu mg(L - \ell_0 + \Delta x). \quad (7)$$

Требование $\omega_0 = \text{const}$ эквивалентно требованию $v_0 = \text{const}$, тогда последнее равенство представляет собой уравнение для определения начального сжатия пружины Δx . Это – квадратное уравнение, которое можно преобразовать в приведённое квадратное уравнение

$$(\Delta x)^2 + 2p\Delta x + q = 0,$$

где

$$p = -\frac{\mu mg}{k}, \quad q = -\frac{m}{k}(2\mu g(L - \ell_0) + v_0^2).$$

Решение этого уравнения такое:

$$\Delta x = -p \pm \sqrt{D}, \quad D = p^2 - q.$$

Так как $\sqrt{D} > p$, то необходимо выбрать знак «+».

Значение v_0 формально выбирается произвольно, однако при проведении экспериментов это значение целесообразно выбирать так:

- в первом из экспериментов произвольно устанавливается сжатие пружины Δx , а затем рассчитывается значение v_0 на основании формулы (7), из которой следует:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2\mu g(L - \ell_0 + \Delta x)}, \quad (8)$$

- в остальных экспериментах значение v_0 должно быть таким же, как в первом, а так как из первого эксперимента оно уже известно, то перед проведением каждого последующего эксперимента следует рассчитывать начальное сжатие пружины – по формуле $\Delta x = -p + \sqrt{D}$.

2.2. Работа силы трения

На горизонтальном участке сила трения постоянна, поэтому работу силы трения A_1 определить легко, это уже рассмотрено в пункте 2.1, где получена формула (6):

$$|A_1| = \mu mg(L - \ell_0 + \Delta x).$$

Рассчитать работу силы трения на круговом участке A_2 сложнее, тем более, что нам неизвестен характер движения шарика на круговом участке¹. Однако эту задачу решить можно и даже двумя способами. Первый способ основан на определении понятия работы, будем его называть *прямым*. Второй способ основан на использовании закона изменения механической энергии, будем его называть *косвенным*.

При расчётах будем рассматривать конкретный частный случай, при котором шарик не долетает до верхней точки направляющей, а останавливается в некоторой точке над горизонтальным диаметром, то есть на высоте $h_{max} > R$ и под углом $\varphi_{max} > \frac{\pi}{2}$, после чего скатывается назад. Работу силы трения будем находить на участке подъёма шарика.

Начнём с прямого способа. По определению

$$A_2 = \int_1^2 F_{\text{тр},\ell} d\ell = - \int_1^2 F_{\text{тр}} d\ell = - \int_1^2 \mu N d\ell = -\mu \int_0^{\varphi_{max}} NR d\varphi = -\mu R \int_0^{\varphi_{max}} N d\varphi.$$

В пункте 2.1 из второго закона Ньютона получено выражение для силы реакции направляющей N :

$$N = m \left(\frac{v^2}{R} + g|\cos\varphi| \right) = m(\omega^2 R + g|\cos\varphi|).$$

Поэтому

$$A_2 = -\mu m R \int_0^{\varphi_{max}} (\omega^2 R + g|\cos\varphi|) d\varphi = -\mu m R \left[R \int_0^{\varphi_{max}} \omega^2 d\varphi + g \int_0^{\varphi_{max}} |\cos\varphi| d\varphi \right].$$

Второй интеграл вычислить нетрудно.

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_{max}} |\cos\varphi| d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_{max}} (-\cos\varphi) d\varphi = \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin\varphi_{max} - \sin\frac{\pi}{2} \right) = 2 - \sin\varphi_{max}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим первый интеграл. Обозначим его буквой I .

$$I = \int_0^{\varphi_{max}} \omega^2 d\varphi = \int_0^{\varphi_{max}} \omega^2 \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_0^T \omega^3 dt. \quad (9)$$

Тогда

$$|A_2| = \mu m R [RI + g(2 - \sin\varphi_{max})]. \quad (10)$$

Так как функция $\varphi(t)$ нам неизвестна, то неизвестна и функция $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$, поэтому без решения дифференциального уравнения (2) определить интеграл I и работу силы трения A_2 невозможно. Тем не менее, из формул (9) и (10) можно получить некоторую весьма полезную информацию.

¹ Речь идёт о том, что нам не удалось получить уравнение движения шарика в явной (*интегральной*) форме, то есть функцию $\varphi(t)$, хотя в дифференциальной форме уравнение движения получено – это уравнение (2).

Как указывалось в пункте 2.1, в серии экспериментах, проводимых при условиях: $R = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и $\omega_0 = \text{const}$ характер движения шарика *один и тот же*. Это, в частности, означает, что функция $\varphi(t)$ не зависит от массы шарика, а тогда и функция $\omega(t)$, и интеграл I тоже не зависят от массы шарика. В этом случае, как следует из (10), работа силы трения на круговом участке A_2 *пропорциональна массе шарика m* . Этот факт можно проверить экспериментально, если придумать *способ измерения* работы силы трения A_2 или интеграла I . Работу A_2 можно измерить косвенным способом (об этом – позднее), а интеграл I можно вычислить численно, если определить функции $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ *экспериментальным путём*. Если экспериментальная зависимость между A_2 и m в самом деле окажется прямо пропорциональной, то это будет экспериментальным подтверждением теоретической формулы (9).

Теперь рассмотрим косвенный способ определения работы силы трения на круговом участке A_2 . Он, как было сказано, основан на применении закона изменения механической энергии. Запишем этот закон применительно ко всей траектории шарика от спуска курка до остановки на высоте $h_{\max}$:

$$E_1 - E' = A,$$

где E_1 и E' – энергии системы пружина-шарик в конце и начале пути.

Начальная системы – это потенциальная энергия пружины, определяемая формулой (4):

$$E' = \frac{k(\Delta x)^2}{2}.$$

В конце пути шарика пружина никакой энергии не имеет, а шарик обладает потенциальной энергией:

$$E_1 = mgh_{\max}.$$

Таким образом,

$$A = mgh_{\max} - \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \quad |A| = \frac{k(\Delta x)^2}{2} - mgh_{\max}. \quad (11)$$

Зная всю работу силы трения A и работу силы трения на горизонтальном участке A_1 , которая определяется формулой (6)

$$|A_1| = \mu mg(L - \ell_0 + \Delta x),$$

можно определить работу силы трения на круговом участке A_2 :

$$|A_2| = |A| - |A_1|. \quad (12)$$

Формулы (6), (11) и (12) можно понимать, как *способ измерения* работы силы трения на круговом участке A_2 . Это даёт реальную возможность проверить пропорциональность между A_2 и m и экспериментально подтвердить теоретическую формулу (9).

2.3. Измерение коэффициента трения скольжения

Тот факт, что существуют два разных способа измерения работы силы трения, позволяет предложить способ измерения коэффициента трения. В самом деле, из прямого способа измерения $|A|$, то есть из формул (6) и (10), следует:

$$|A| = |A_1| + |A_2| = \mu mg(L - \ell_0 + \Delta x) + \mu mR[RI + g(2 - \sin\varphi_{\max})] = \\ = \mu \{mg(L - \ell_0 + \Delta x) + mR[RI + g(2 - \sin\varphi_{\max})]\}.$$

Тогда, считая, что значение работы $|A|$ измерено косвенным способом, можно узнать значение коэффициента трения – по формуле

$$\mu = \frac{|A|}{mg(L - \ell_0 + \Delta x) + mR[RI + g(2 - \sin\varphi_{\max})]}. \quad (13)$$

3. Инструменты и возможности экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При включении установки (при запуске программы) открывается начальное окно с названием работы и кнопками **Ход работы**, **Эксперимент**, **Завершение работы**. Вам надо нажать на кнопку **Эксперимент**, и тогда откроется окно, показанное на рисунке 3.1.

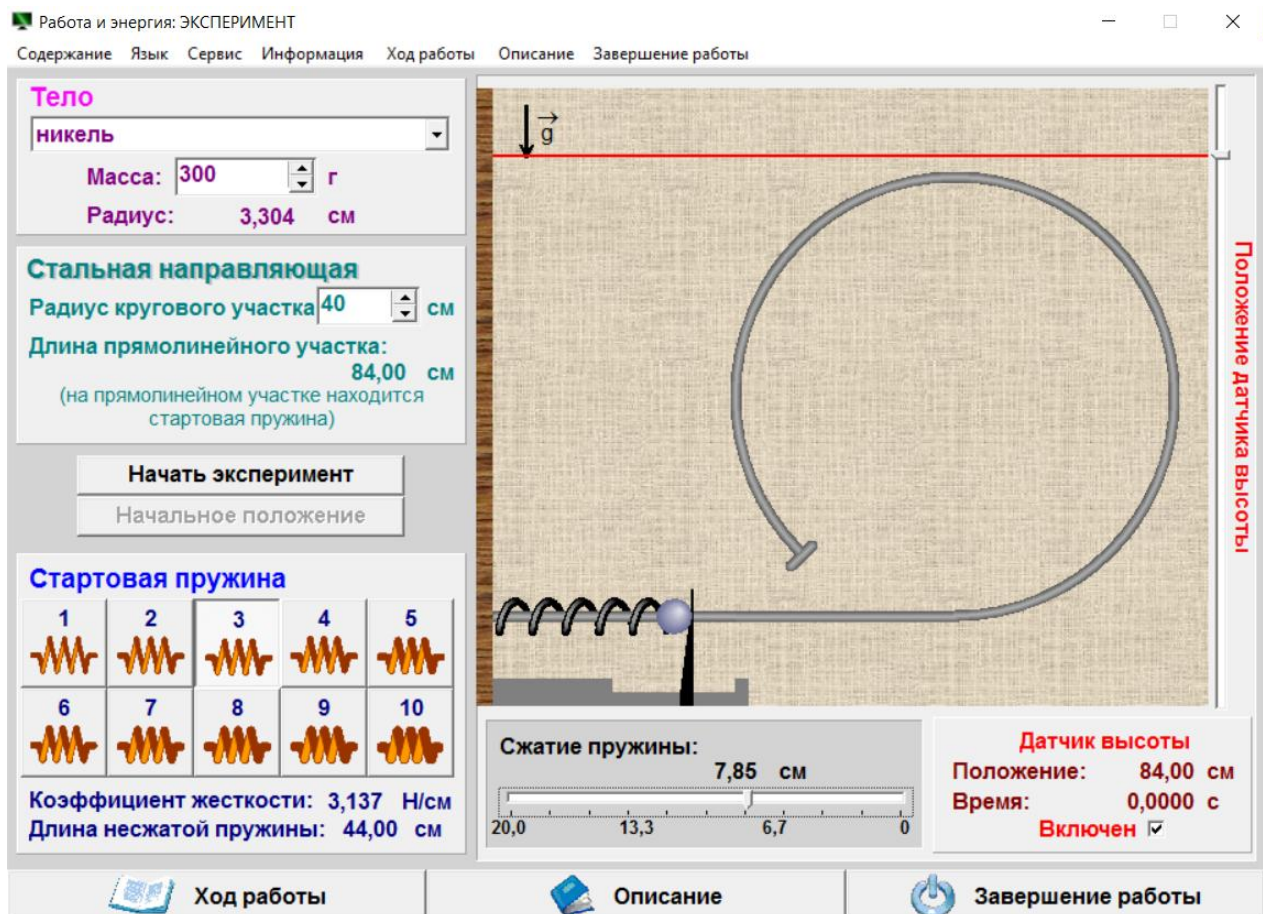


Рис. 3.1. Окно «Эксперимент»

В правой части окна расположена область визуализации: установка и движущийся шарик.

В левой части окна и под окном визуализации расположены управляющие кнопки, приборы и инструменты.

- Инструмент **Тело**. Предназначен для выбора материала, из которого изготовлен шарик.
- Инструмент **Масса**. Предназначен для выбора массы шарика в пределах от 200 г до 600 г. После выбора массы под окошком с массой появляется значение радиуса шарика.
- Инструмент **Радиус кругового участка**. Позволяет выбирать радиус направляющей в диапазоне от 27 см до 40 см.
- Инструмент **Стартовая пружина**. Позволяет выбирать одну из 10 пружин. После выбора пружины появляются значения жёсткости пружины k и длины несжатой (недеформированной) пружины ℓ_0 .
- Инструмент **Сжатие пружины**. Это окно с бегунком, которое позволяет устанавливать начальное сжатие пружины Δx в интервале от 0 до 20 см. Регулировать значение Δx можно левой кнопкой или колёсиком мыши, или кнопками ► и ◀.
- Прибор **Датчик высоты**. Он состоит из некоторого элемента, реагирующего на пролетающий мимо него шарик. Этот элемент на установке не показан. Фактически именно он может быть назван датчиком высоты. В составе датчика высоты находится ещё один важный элемент — это секундомер. В момент, когда датчик высоты обнаруживает шарик, секундомер выключается. А включается секундомер в момент начала опыта — когда нажатием кнопки **Начать эксперимент** экспериментатор спускает курок и шарик начинает разгон. Таким образом, секундомер показывает полное время движения шарика от спуска курка до подъёма шарика на уровень датчика высоты. Правда, для этого необходимо, чтобы был установлен флажок **Включен**. В момент, когда шарик долетает до датчика высоты, секундомер останавливается, а флажок **Включен** исчезает. Если шарик не долетает до уровня датчика, то секундомер выключается в момент, когда шарик после своего падения останавливается, флажок **Включен** при этом остаётся.
- Инструмент **Положение датчика высоты**. Это окно с бегунком справа от окна визуализации, которое позволяет устанавливать датчик высоты на высоту h в интервале от -16 см до 96 см. Высота h отсчитывается от уровня расположения горизонтального участка направляющей. Регулировать значение h можно левой кнопкой или колёсиком мыши, или кнопками ▼ и ▲.
- Кнопка **Начать эксперимент**. После её нажатия она превращается в кнопку **Остановить эксперимент**, а когда шарик упадёт и остановится, она снова становится кнопкой **Начать эксперимент** и под ней становится активной кнопка **Начальное положение**. Нажав последнюю, вы подведёте шарик к пружине и взведёте курок, то есть сожмёте пружину до начального значения.

4. Порядок выполнения работы

Включите режим **Эксперимент** и обратитесь к преподавателю для того, чтобы он выбрал для вас материал шарика и радиус кругового участка. После этого заполните таблицу 1. «Общие условия экспериментов». Значение коэффициента трения скольжения возьмите из таблицы, приведённой в пункте 7 (Приложение). В этой таблице для каждого материала указан диапазон возможных значений коэффициента трения. Вам надо выбрать какое-то одно значение – лучше всего среднее. Как выбрать пружину, написано ниже.

Таблица 1

Общие условия экспериментов

Материал шарика			
Коэффициент трения	μ		
Стартовая пружина			
Упругость пружины	k	Н/см	
Длина несжатой пружины	ℓ_0	см	
Радиус направляющей	R	см	
Длина прямолинейного участка	L	см	
Ускорение свободного падения	g	см/с ²	980,7
Погрешности прямых измерений	$\Delta(m)$	г	
	$\Delta(h_{max})$	см	
	$\Delta(T_2)$	с	

Эксперимент 1. Исследование зависимости максимальной высоты подъёма шарика и времени подъёма от массы шарика

4.1. Выбор пружины.

- Выберите пружину 1.
- Установите в окне **Масса** максимальную массу шарика $m = 600$ г.
- Установите максимальное сжатие пружины $\Delta x = 20$ см.
- Нажмите кнопку **Начать эксперимент**.
- Обратите внимание, до какой максимальной высоты h_{max} поднялся шарик. Если эта высота больше $\frac{3}{4}$ диаметра образующей D или шарик перелетел верхнюю точку образующей и упал в левой части, то пружина годится для экспериментов. В противном случае вам нужно выбрать более жёсткую пружину.
- После того, как вам удалось подобрать подходящую пружину, позовите преподавателя и согласуйте с ним ваш выбор. Затем запишите номер пружины, её упругость и длину несжатой пружины в таблицу 1.

4.2. Установите в окне **Масса** минимальную массу шарика $m = 200$ г. Запишите это значение в первую строку таблицы 2.

Зависимость максимальной высоты подъёма шарика h_{max} и времени его подъёма T от массы шарика m

Номер опыта	m	v_0	p	$ q $	Δx	h_{max}	T_2	t_0	T
	г	см/с	см	см ²	см	см	с	с	с
1									
2									
...									
9									

4.3. Выбор начального сжатия пружины.

- Установите сжатие пружины $\Delta x = 10$ см и нажмите кнопку **Начать эксперимент**.
- Обратите внимание, до какой максимальной высоты h_{max} поднялся шарик. Эта высота должна быть в интервале $(\frac{3}{4}D; D)$ – шарик должен подняться достаточно высоко, но *не перелететь* через верхнюю часть образующей. В противном случае вам надо уменьшить или увеличить сжатие пружины Δx и повторить эксперимент.
- Как только вы добились того, что $h_{max} \in (\frac{3}{4}D; D)$, запишите выбранное значение сжатия пружины Δx в таблицу 2.

4.4. Измерьте значение h_{max} . Это можно сделать так.

- Установите датчик высоты с помощью бегунка в окне **Положение датчика высоты** чуть выше той высоты, до которой поднялся в вашем последнем опыте шарик.
- Включите секундомер. Для этого в окне **Датчик высоты** поставьте флажок **Включен**.
- Нажмите кнопку **Начать эксперимент**.
- Секундомер измеряет время подъёма шарика на высоту h , на которой установлен датчик. Если шарик не долетает до уровня датчика, то секундомер выключается после падения шарика. Поэтому, если секундомер не остановился после того, как шарик поднялся до максимальной высоты h_{max} , и продолжал работать, то шарик *не долетел* до датчика, так что $h > h_{max}$. В противном случае $h \leq h_{max}$. В первом случае, то есть при $h > h_{max}$, надо одним нажатием кнопки ▼ немного опустить датчик высоты и повторить эксперимент, для чего надо сначала нажать кнопку **Начальное положение**, а затем – **Начать эксперимент**. Если ситуация не изменилась, то надо ещё немного опустить датчик высоты и снова повторить эксперимент. Если вы добились того, что после уменьшения высоты датчика секундомер в эксперименте остановился не после падения шарика, а тогда, когда шарик был вблизи своей верхней точки, то можно считать, что датчик высоты находится как раз на той высоте, до которой долетает шарик, так что $h = h_{max}$. Это значение занесите в таблицу 2. Туда же в столбец T_2 занесите показание секундомера.

4.5. Рассчитайте начальную скорость шарика v_0 в момент его отрыва от пружины по формуле (8):

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2\mu g(L - \ell_0 + \Delta x)}.$$

4.6. Записанное вами показание секундомера T_2 – это *полное* время движения шарика от момента спуска курка до момента подъёма шарика на максимальную высоту, а время движения шарика на круговой части T меньше, чем T_2 , на время прямолинейного движения шарика t_0 . Для измерения t_0 проделайте следующее.

- Опустите датчик высоты в положение 0 см.
- Нажмите кнопку **Начальное положение** и установите флажок **Включен**.
- Нажмите кнопку **Начать эксперимент**.
- После окончания эксперимента секундомер в окне **Датчик высоты** покажет вам значение t_0 .

Занесите результат измерения t_0 в таблицу 2. Туда же занесите значение времени движения шарика на круговом участке, равное $T = T_2 - t_0$.

На этом первый опыт, с минимальной массой, завершён. Ячейки p и $|q|$ в первом опыте заполнять не надо.

4.7. Увеличьте массу шарика на 50 г и запишите значение массы в таблицу 2.

4.8. Запишите в таблицу 2 значение начальной скорости v_0 , равное его значению в первом опыте.

4.9. Рассчитайте значение сжатия пружины Δx по формулам

$$p = -\frac{\mu mg}{k}, \quad q = -\frac{m}{k}(2\mu g(L - \ell_0) + v_0^2),$$

$$D = p^2 - q, \quad \Delta x = -p + \sqrt{D}, \quad .$$

Результаты расчётов впишите в таблицу 2. Обратите внимание на значения $|p|$ и $|q|$. Как правило, $|p| \ll |q|$, поэтому $D \cong |q|$, так что при расчёте сжатия пружины Δx можно использовать более простую формулу:

$$\Delta x = -p + \sqrt{|q|}.$$

4.10. Измерьте значения h_{max} , T_2 , t_0 и T тем же способом, что и в первом опыте. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

4.11. Прделайте пункты 4.7 – 4.10 ещё 7 раз, постепенно увеличивая массу шарика до 600 г.

4.12. Для иллюстрации результатов измерений постройте два графика: зависимость высоты подъёма шарика h_{max} от его массы m и зависимость времени подъёма шарика T от его массы m . Нанесите на графиках планки погрешностей и, при желании, линии тренда.

4.13. Прокомментируйте построенные графики.

Эксперимент 2. Исследование зависимости работы силы трения на круговом участке от массы шарика

Все прямые измерения, необходимые для данного эксперимента, уже проведены в ходе эксперимента 1. Поэтому вам осталось сделать следующее.

4.14. Перенести из таблицы 2 в таблицу 3:

- массу шарика m ;
- сжатие пружины Δx ;
- максимальную высоту подъёма шарика h_{max} .

Таблица 3

Зависимость работы силы трения на круговом участке A_2
от массы шарика m

Номер опыта	m г	Δx см	h_{max} см	$ A $ см ²	$ A_1 $ с	$ A_2 $ с
1						
2						
...						
9						

4.15. Измерьте *косвенным* способом полную работу силы трения на всём пути шарика $|A|$. Как указывалось выше, этот способ основан на использовании формулы (11):

$$|A| = \frac{k(\Delta x)^2}{2} - mgh_{max}.$$

Результат занесите в таблицу 3.

4.16. Определите работу силы трения на прямолинейном участке пути шарика $|A_1|$ и занесите результат в таблицу 3. При этом используйте формулу

$$|A_1| = \mu mg(L - \ell_0 + \Delta x).$$

4.17. Определите работу силы трения на круговом участке пути шарика $|A_2|$ и занесите результат в таблицу 3. При этом используйте формулу (12):

$$|A_2| = |A| - |A_1|.$$

4.18. Используя данные таблицы 3, постройте график зависимости работы силы трения на круговом участке пути шарика $|A_2|$ от массы шарика m . Нанесите на графике линию тренда.

4.19. Прокомментируйте построенный график.

Эксперимент 3. Измерение коэффициента трения скольжения

4.20. Пригласите преподавателя для согласования условий эксперимента: надо выбрать массу шарика m и сжатие пружины Δx . Результаты запишите в таблицу 4.

Таблица 4

Условия эксперимента

Масса шарика	m	г	
Сжатие пружины	Δx	см	

4.21. Вам надо получить экспериментальную зависимость высоты шарика от времени $h(t)$. И для начала надо выбрать шаг изменения времени или высоты. В

экспериментальной установке достаточно просто установить высоту шарика, так как это – высота датчика высоты, поэтому целесообразно задать шаг изменения именно высоты Δh , а не времени. Это можно сделать так.

- Измерьте максимальную высоту подъёма шарика h_{max} – так, как это написано в пункте 4.4. Запишите результаты измерений h_{max} и T_2 к себе в рабочую тетрадь, позже вы перенесёте их в таблицу 5.
- Разделите h_{max} на 20 и округлите полученное число до целого или полуцелого числа – например, до 4; 3,5; 3; 2,5, 2. Это и будет шаг изменения высоты Δh .

4.22. Впишите в таблицу 5 все значения высоты шарика, для которых вы будете проводить эксперимент. Первое значение равно нулю, второе – на шаг Δh больше, третье – ещё на шаг Δh больше и так далее. Последним значением высоты шарика h впишите измеренную вами максимальную высоту подъёма h_{max} .

Таблица 5
Результаты измерений высоты и времени подъёма шарика

Номер опыта	h см	t с	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
1				
2				
...				
...				

4.23. Для каждого значения высоты шарика h проделайте следующий опыт.

- Установите датчик высоты на уровне h и поставьте флажок **Включен**.
- Нажмите кнопку **Начать эксперимент**.
- После завершения движения шарика запишите в таблицу 5 показание секундомера. К этому времени кнопка **Начать эксперимент** будет снова активна, и вы сможете перейти к следующему опыту – с другой высотой.

4.24. Заполните в таблице 5 столбцы $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Что такое угол φ , показывает рисунок 2 в разделе «Краткая теория». Для расчётов используйте следующие формулы:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{h}{R}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}.$$

4.25. Полученная вами зависимость $h(t)$ нужна вам для вычисления интеграла I , который определяется формулой (9):

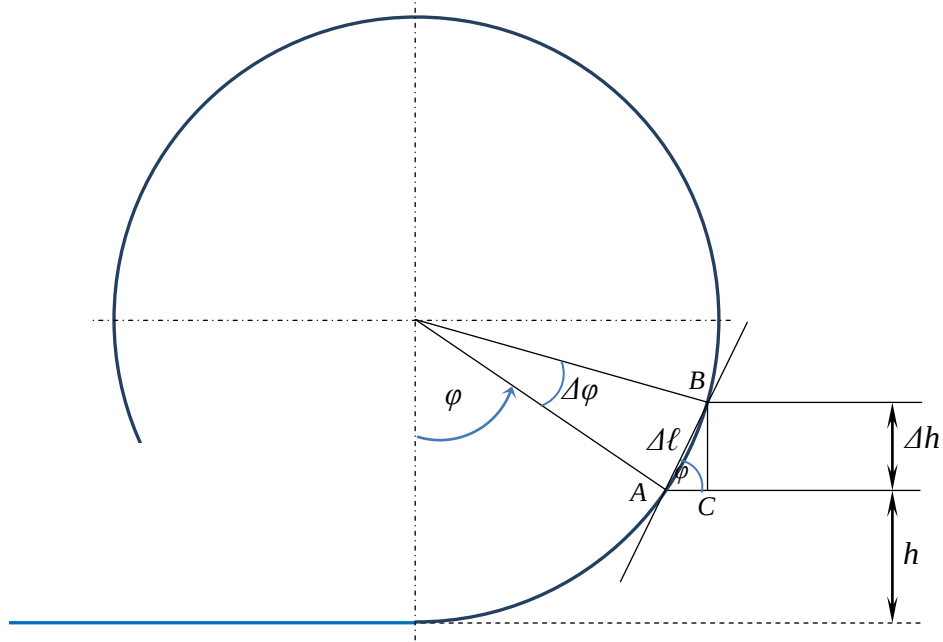
$$I = \int_0^T \omega^3 dt = \int_{t_0}^{T_{max}} \omega^3 dt.$$

Метод вычисления этого интеграла – *численное интегрирование*. При этом область интегрирования $(t_0; T_{max})$ разбивается на малые (элементарные) интервалы, а интеграл заменяется суммой

$$I = \int_{t_0}^{T_{max}} \omega^3 dt \cong \sum_{(n)} \omega_n^3 \Delta t_n.$$

Для вычисления интеграла вам надо сначала заполнить таблицу 6. Пояснения к этой таблице.

- Интервал – это промежуток между соседними, следующими друг за другом в таблице 5 значениями высоты шарика и, соответственно, соседними значениями времени подъёма.
- $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.
- В столбце $\sin\varphi$ надо указывать *среднее* значение синуса на интервале, то есть $\sin\varphi = \langle \sin\varphi \rangle = \frac{\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_n}{2}$.
- ω – это *средняя* угловая скорость шарика на интервале, которая по определению равна $\omega = \langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Для нахождения $\Delta\varphi$ рассмотрим рисунок 4.1.

Рис. 4.1. К расчёту приращения угла $\Delta\varphi$

Обозначим $\Delta\ell$ длину дуги, на которую опирается угол $\Delta\varphi$. Тогда $\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{R}$. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Угол A в нём равен φ , а длину гипотенузы AB можно, вследствие малости угла $\Delta\varphi$, принять равной длине дуги $\Delta\ell$. Тогда катет BC равен $BC = \Delta h = \Delta\ell \sin\varphi$, откуда $\Delta\ell = \frac{\Delta h}{\sin\varphi}$. Таким образом,

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta\ell}{R\Delta t} = \frac{\Delta h}{R\sin\varphi\Delta t}, \quad \omega_n = \frac{\Delta h_n}{R\sin\varphi_n\Delta t_n}.$$

- Интеграл I равен сумме всех чисел в последнем столбце таблицы 6. Эту сумму вам надо записать в первую строку таблицы 7.

Таблица 7
Коэффициент трения

I	с^{-2}	
a_1	Дж	
a_2	Дж	
$ A $	Дж	
μ		

4.26. Для измерения коэффициента трения скольжения μ используется формула (13):

$$\mu = \frac{|A|}{a_1 + a_2}, \quad (13)$$

где введены обозначения:

$$a_1 = mg(L - \ell_0 + \Delta x), \quad a_2 = mR[RI + g(2 - \sin \varphi_{\max})].$$

Рассчитайте значения a_1 и a_2 и впишите их в таблицу 7.

4.27. Значение полной работы силы трения, действующий на шарик на всём его пути от спуска курка до достижения шариком верхней точки, измеряется косвенным способом – с использованием формулы (11)

$$|A| = \frac{k(\Delta x)^2}{2} - mgh_{\max}.$$

Рассчитайте значение $|A|$ и впишите результат в таблицу 7.

4.28. Определите значение коэффициента трения скольжения μ по формуле (13), результат впишите в таблицу 7.

4.29. Прокомментируйте таблицу 7.

4.30. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений

В данной лабораторной работе для проведения эксперимента 1 требуется оценить и вписать в таблицу 1 погрешности трёх величин, измеряемых прямым способом: погрешности массы m шарика, максимальной высоты подъёма шарика $h_{\max}$ и времени подъёма шарика на максимальную высоту T_2 .

- Масса шарика задаётся и высвечивается в окне **Масса** в граммах в виде целого числа. Поэтому $\Delta(m) = 1$ г.
- Максимальная высота подъёма шарика измеряется с помощью датчика высоты. Его положение определяется в сантиметрах в виде десятичного числа с двумя знаками после запятой, поэтому погрешность высоты датчика равна $\Delta(h) = 0,01$ см. Однако погрешность высота подъёма шарика определяется не погрешностью высоты датчика, а минимальным шагом изменения высоты датчика. Этот шаг равен 0,25 см, поэтому следует принять $\Delta(h_{\max}) = 0,3$ см.
- Время подъёма шарика на максимальную высоту T_2 измеряется с помощью секундомера, погрешность которого 0,0001 с, однако погрешность $\Delta(T_2)$ больше погрешности секундомера. Причина в том, что для измерения T_2 необходимо установить датчик высоты на максимальную высоту подъёма $h_{\max}$, а это делается с погрешностью $\Delta(h_{\max})$. Разберёмся, как связаны погрешности $\Delta(T_2)$ и $\Delta(h_{\max})$. В соответствии с общим правилом,

$$\Delta(T_2) = \left| \frac{dT_2}{dh_{\max}} \right| \Delta(h_{\max}).$$

Зависимость T_2 от $h_{\max}$ нам неизвестна, поэтому вычислить производную $\frac{dT_2}{dh_{\max}}$ невозможно, но можно попробовать её оценить. Прежде всего, ясно, что она

положительная, так как с ростом высоты подъёма растёт и время подъёма. Во-вторых, простейшей оценкой производной $\frac{dT_2}{dh_{max}}$ является

$$\frac{dT_2}{dh_{max}} \approx \frac{T_2}{h_{max}}.$$

Попробуем найти более точную оценку. Это удобнее сделать не для абсолютной погрешности $\Delta(T_2)$, а для относительной – $\varepsilon(T_2)$.

$$\varepsilon(T_2) = \frac{\Delta(T_2)}{T_2} = \frac{dT_2}{dh_{max}} \frac{\Delta(h_{max})}{T_2}.$$

Умножим и разделим это выражение на h_{max} и немного преобразуем дроби.

$$\varepsilon(T_2) = \frac{h_{max}}{T_2} \frac{1}{\frac{dh_{max}}{dT_2}} \frac{\Delta(h_{max})}{h_{max}} = \gamma \varepsilon(h_{max}), \quad \gamma = \frac{\frac{h_{max}}{T_2}}{\frac{dh_{max}}{dT_2}}.$$

Если бы шарик поднимался с постоянной скоростью v , то тогда

$$h(t) = v(t - t_0), \quad h_{max} = v(T_2 - t_0),$$

$$\frac{dh_{max}}{dT_2} = v, \quad \frac{h_{max}}{T_2} \approx v,$$

$$\gamma \approx 1, \quad \varepsilon(T_2) = \varepsilon(h_{max}).$$

Но шарик поднимается не равномерно, а с замедлением, то есть его скорость постепенно уменьшается. Примерный вид зависимости $h(t)$ показан на рисунке 5.1.

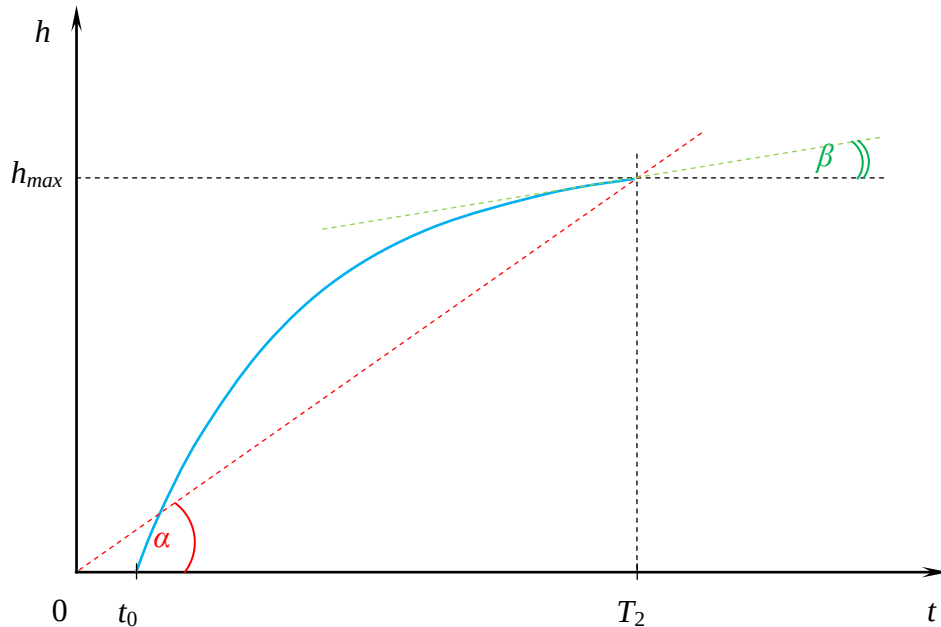


Рис. 5.1. Зависимость высоты подъёма шарика h от времени t

Из этого рисунка видно, что

$$\frac{h_{max}}{T_2} \approx tg\alpha, \quad \frac{dh_{max}}{dT_2} = tg\beta.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{tg\alpha}{tg\beta} > 1.$$

Во сколько раз $tg\alpha$ больше, чем $tg\beta$, неизвестно. Так как значение этого отношения нам нужно не для точных расчётов, а для *оценочных*, то примем его равным 3^2 . В результате получаем

$$\varepsilon(T_2) = 3\varepsilon(h_{max}).$$

Итак, для оценки величины $\Delta(T_2)$ следует действовать так.

- Провести эксперимент 1 и получить средние значения максимальной высоты подъёма шарика $\langle h_{max} \rangle$ и времени подъёма шарика на максимальную высоту $\langle T_2 \rangle$.
- Зная абсолютную погрешность $\Delta(h_{max}) = 0,3$ см, оценить относительную погрешность $\varepsilon(h_{max}) = \frac{\Delta(h_{max})}{\langle h_{max} \rangle}$.
- Оценить относительную погрешность времени подъёма шарика по формуле $\varepsilon(T_2) > 3\varepsilon(h_{max})$.
- Оценить абсолютную погрешность времени подъёма шарика по формуле $\Delta(T_2) = \varepsilon(T_2)\langle T_2 \rangle$.

5.2. Погрешность измерения времени движения шарика на *круговом* участке T .

Эта величина измеряется косвенно, используется формула

$$T = T_2 - t_0,$$

где t_0 – время движения шарика на прямолинейном (горизонтальном) участке. Из этой формулы следует, что

$$\Delta(T) = \Delta(T_2) + \Delta(t_0).$$

Погрешность $\Delta(t_0)$ равна погрешности секундомера, то есть 0,0001 с, что гораздо меньше, чем $\Delta(T_2)$. Поэтому можно пренебречь погрешностью $\Delta(t_0)$ и принять, что $\Delta(T) = \Delta(T_2)$.

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Запишите формулу для силы трения скольжения и назовите величины, входящие в эту формулу.
- 6.2. Запишите формулу, определяющую работу силы.
- 6.3. В чём состоит закон изменения механической энергии?
- 6.4. От чего зависит характер движения шарика на круговом участке пути?
- 6.5. При каком условии характер движения шарика на круговом участке пути не зависит от массы шарика?
- 6.6. Зависит ли работа силы трения, действующей на шарик на круговом участке пути, от массы шарика?

² Если в дальнейшем окажется, что это число следует увеличить, то его можно принять за 5 или 6.

- 6.7. Каково назначение датчика высоты?
- 6.8. Для чего нужен флажок **Включен** в окне датчика высоты?
- 6.9. Как узнать, долетел ли шарик до датчика высоты?
- 6.10. Что показывает секундомер датчика высоты?
- 6.11. Как измерить время движения шарика на прямолинейном (горизонтальном) участке пути?

7. Приложение

Значения коэффициента трения скольжения по стали

Материал	Коэффициент трения	Материал	Коэффициент трения
Алюминий	0,18 – 0,47	Никель	0,62 – 0,65
Бронза	0,10 – 0,20	Полиуретан	0,15 – 0,40
Дерево	0,25 – 0,6	Сталь	0,03 – 0,80
Дуб	0,50 – 0,62	Стекло	0,5 – 0,7
Лёд	0,014 – 0,020	Цинк	0,20 – 0,22
Латунь	0,19 – 0,30	Чугун	0,15 – 0,19
Медь	0,15 – 0,36		

8. Литература

- 8.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М., Наука, 1989.
- 8.2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М., Высшая школа, 1989.
- 8.3. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Издательство НИ ТПУ, 2007.
- 8.4. Рипп А.Г. Обработка измерений. Методическое пособие. – СНУЯЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Мирошниченко Евгения Владимировна**

**СКОЛЬЖЕНИЕ ШАРИКА
ПО КРУГОВОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 229/2025. Объем 1,5 п.л. Усл. печ. л. 1,39. Уч. изд. л. 1,47.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»