

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2026

УДК 536-36(075.8)
ББК 31.31я73
Р537

Рецензент:

С.А.Чернявская – канд. физ.-мат. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р537 Реактивное движение : учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 27 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с двумя режимами работы ракетного двигателя – изохорным и изобарным. Студентам предлагается экспериментальным путём проверить характер изменения давления газа в ракете (в изохорном режиме) и массы газа (в изобарном режиме), а также проверить уравнения кинематики ракеты. Кроме того, студентам предлагается измерить внутренние параметры ракеты – реактивную постоянную, скорость истечения газа, разгонную скорость и температуру газа в ракете. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 536-36(075.8)
ББК 31.31я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 28 октября 2025 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

Работа 70. Реактивное движение

Цели работы

1. Исследовать характер движения ракеты в двух режимах истечения топлива: изобарном и изохорном.
2. Измерить внутренние параметры ракеты: реактивную постоянную, скорость истечения газа, температуру газа.

1. Краткая теория

1.1. Скорость ракеты

Под реактивным движением понимают движение тела за счет изменения его массы. Именно так движутся ракеты – как игрушечные, так и военные, и космические.

Рассмотрим в некоторой инерциальной системе отсчёта ракету массой M , движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$. Из ракеты вылетает струя газа со скоростью $\mathbf{u}$ относительно ракеты.

Если система ракета – газ является замкнутой, то есть на любую часть этой системы не действуют никакие внешние силы, то, в соответствии с законом сохранения импульса, импульс системы не изменяется с течением времени:

$$\mathbf{p} = \text{const}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0.$$

Будем понимать систему ракета–газ как две подсистемы:

- подсистема 1 – ракета с газом (топливом) внутри,
- подсистема 2 – газ, вылетевший из ракеты.

Обозначим $m(t)$ массу газа в ракете в момент времени t . Рассмотрим теперь малый промежуток времени dt и определим изменение импульса системы $d\mathbf{p}$ за время dt .

$$d\mathbf{p}_1 = d[(M + m(t))\mathbf{v}] = dm(t)\mathbf{v} + (M + m(t))d\mathbf{v},$$

а изменение импульса газа $d\mathbf{p}_2$ равно импульсу порции газа, вылетевшей из ракеты за время dt . Масса этой порции равна $dm_2 = -dm(t)$, а её скорость равна $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Тогда

$$d\mathbf{p}_2 = dm_2 \mathbf{v}_2 = -dm(t)(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

В результате:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= d\mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_2 = dm(t)\mathbf{v} + (M + m(t))d\mathbf{v} - dm(t)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \\ &= (M + m(t))d\mathbf{v} - dm(t)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Так как $d\mathbf{p}$ должно быть равно нулю, то получаем равенство:

$$(M + m(t))d\mathbf{v} = dm(t)\mathbf{u}. \quad (1)$$

Масса газа внутри ракеты $m(t)$ убывает, поэтому $dm(t) < 0$, и тогда векторы $d\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ антипараллельны. Следовательно, скорость ракеты за каждый промежуток времени dt прирастает в направлении, противоположном направлению истечения струи газа. Поэтому, если ракета стартовала из неподвижного состояния, то её скорость будет всегда направлена против скорости $\mathbf{u}$, увеличиваясь по величине. Это значит, что ракета движется ускоренно и прямолинейно.

Поделив обе части равенства (1) на dt , придём к равенству, которое называется *уравнением Мещерского*:

$$(M + m(t)) \frac{dv}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm(t)}{dt}. \quad (2)$$

Уравнение Мещерского можно понимать как Второй закон Ньютона для реактивного движения, поэтому его правую часть $\mathbf{u} \frac{dm(t)}{dt}$ называют *реактивной силой*.

Если известен закон изменения массы газа в ракете, то есть функция $m(t)$, то уравнение Мещерского – это дифференциальное уравнение относительно функции (t) . Данное уравнение можно решить, даже не зная функцию $m(t)$. Для этого надо использовать метод разделения переменных. Сначала уравнение приводится к виду:

$$dv = \mathbf{u} \frac{dm(t)}{M+m(t)},$$

а затем вычисляются интегралы от обеих частей:

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^m \mathbf{u} \frac{dm}{M+m},$$

где m_0 – начальная масса топлива в ракете.

Если скорость истечения u поддерживается неизменной, то $\mathbf{u}$ можно вынести из интеграла в правой части, и тогда интеграл легко вычисляется:

$$v(t) = u \ln(M + m) \Big|_{m_0}^m = u \ln \frac{M+m(t)}{M+m_0}.$$

Эту формулу можно записать и в скалярной форме, приравняв модули левой и правой частей:

$$v(t) = u \ln \frac{M+m_0}{M+m(t)}. \quad (3)$$

Из этой формулы вытекает, в частности, один интересный результат: чему равна максимальная скорость, до которой может разогнаться ракета (её называют *разгонной* скоростью)? – Этой скорости ракета достигнет в тот момент времени, когда в ней кончится топливо, то есть когда $m(t)$ обратится в нуль. Подставив в (3) $m(t) = 0$, получим

$$v_p = u \ln \frac{M+m_0}{M}. \quad (4)$$

Интересно, что величина разгонной скорости ракеты не зависит от характера сгорания топлива, то есть от функции $m(t)$, а зависит только от начальной массы топлива m_0 , скорости истечения u и, конечно, от массы ракеты M . Формула (4) известна под названием *формулы Циолковского*.

1.2. Скорость истечения

Выясним, при каких условиях скорость истечения может быть *неизменной* и от чего она зависит. Будем считать, что ракетный двигатель работает импульсно, причём каждый импульс состоит из двух стадий.

- Первая стадия – *формирование*. Формируется некоторая фиксированная порция газа, которая поступает в рабочую камеру. Это может быть реализовано, например, в результате химической реакции сгорания топлива или в результате нагрева порции газа при ядерной реакции.

- Вторая стадия – *разгон*. Газ из рабочей камеры через сопло вылетает из рабочей камеры, создавая реактивную силу.

С точки времени, основной стадией является вторая, первая стадия – кратковременная, гораздо более короткая, чем вторая. Нас, естественно, интересует стадия разгона, так как именно на ней происходит истечение реактивной струи. Рассмотрим процесс, происходящий с газом в окрестности сопла. Будем считать, что рабочая камера имеет форму цилиндра с площадью сечения S_0 , причём сопло находится на оси цилиндра, и площадь сечения сопла равна S – см. рисунок 1.

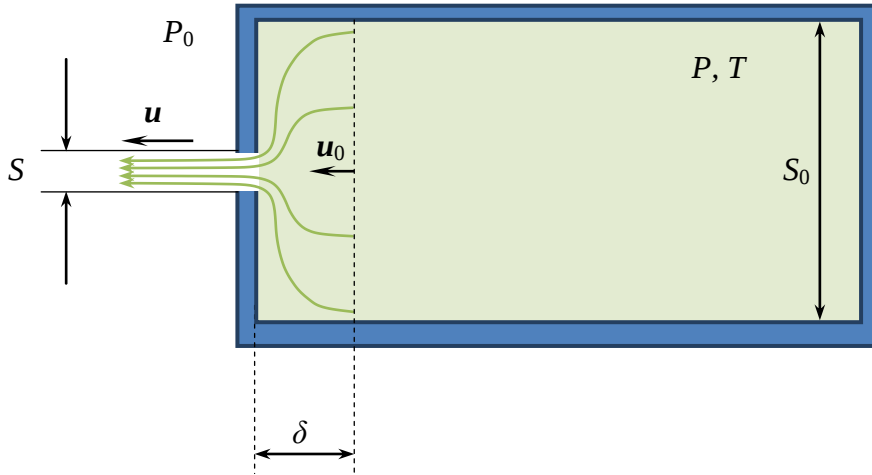


Рис. 1. Рабочая камера

Так как площадь отверстия S , через которое вытекает газ, значительно меньше площади сечения камеры S_0 , то время истечения газа из рабочей камеры значительно меньше времени релаксации газа. Это означает, что газ можно считать равновесным практически во всей рабочей камере, за исключением узкого слоя вблизи сопла, в котором газ разгоняется от нулевой скорости до скорости истечения u . Но даже в этом узком слое состояние газа мало отличается от равновесного. Главное отличие состоит в том, что в слое есть упорядоченное движение газа. В остальном слой будем считать равновесным (*квазиравновесным*), то есть в нём давление P , плотность ρ и температура газа T такие же, как и во всей камере.

Считая, что плотность газа в слое везде одинаковая, к нему можно применить уравнения гидродинамики: уравнение *непрерывности* и уравнение *Бернулли*, связывающие друг с другом характеристики двух любых точек сплошной среды. Рассмотрим две точки в слое на оси камеры: одну – на выходе из камеры (в сопле), другую – на расстоянии δ от сопла. Тогда уравнение непрерывности имеет вид:

$$Su = S_0 u_0, \quad (5)$$

где u_0 – скорость газа в сечении камеры на расстоянии δ от сопла. Теперь запишем уравнение Бернулли:

$$P_0 + \frac{\rho u^2}{2} + \rho g h_1 = P + \frac{\rho u_0^2}{2} + \rho g h_2,$$

где h_1 и h_2 – высота точек над уровнем Земли.

В данной лабораторной работе предлагается изучение горизонтального движения ракеты в пустоте, поэтому $h_1 = h_2$, $P_0 = 0$. В результате уравнение Бернулли упрощается:

$$\frac{\rho u^2}{2} = P + \frac{\rho u_0^2}{2}.$$

Немного преобразуем это уравнение.

$$\frac{\rho}{2} (u^2 - u_0^2) = P - P_0. \quad (6)$$

Из уравнения непрерывности (5) $Su = S_0 u_0$ следует, что $u_0 = \frac{S}{S_0} u$. Тогда

$$u^2 - u_0^2 = u^2 - \left(\frac{S}{S_0} u\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2\right] u^2,$$

Введём обозначение:

$$\alpha = 1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2. \quad (7)$$

С учётом этого равенство (6) можно записать так:

$$\frac{\rho}{2} \alpha u^2 = P,$$

откуда следует формула для скорости истечения:

$$u = \sqrt{\frac{2P}{\alpha\rho}}.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона следует, что

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}.$$

Тогда формулу для скорости истечения можно записать в виде

$$u = \sqrt{\frac{2R}{\alpha\mu}} T. \quad (8)$$

Следовательно, условие постоянства скорости истечения очень простое: $T = const$, то есть процесс, происходящий с газом в рабочей камере, должен быть *изотермическим*.

1.3. Режимы работы ракетного двигателя

Тот факт, что процесс, происходящий с газом в рабочей камере, изотермический, не определяет, однако, в полной мере этот процесс, так как неясно, как изменяются давление и объём газа. Ответ на этот вопрос естественно искать в уравнении Менделеева – Клапейрона

$$PV = \frac{m(t)}{\mu} RT.$$

Так как масса газа в камере убывает, то произведение PV не остаётся постоянным, как в законе Бойля – Мариотта, а *убывает*. Как меняется при этом каждый из параметров газа (давление и объём), из уравнения Менделеева – Клапейрона *не следует*, так что у разработчика ракетного двигателя есть возможность самому задать закон изменения давления и объёма газа во времени, то есть режим работы двигателя. Режим определяет, в первую очередь, функцию $m(t)$. И хотя, в соответствии с уравнением Циолковского, эта функция не влияет на разгонную скорость ракеты, но она влияет на время разгона.

Наиболее естественным является *изохорный* режим. В этом случае струя газа самопроизвольно вылетает из камеры, так как давление газа в камере больше наружного давления (напоминаем: в предлагаемой вам лабораторной установке снаружи ракеты – вакуум). Однако по мере уменьшения массы газа в камере давление газа постепенно снижается, в результате снижаются скорость выброса массы $\left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$ и реактивная сила $u \frac{dm(t)}{dt}$. Для увеличения реактивной силы есть единственный выход: следует принудительно остановить ракетный импульс и начать новый – опять начнётся стадии формирования, и ракета наполнится новой порцией газа при высоком давлении.

Идея второго режима порождена недостатком изохорного режима – убывания реактивной силы со временем, вызванного *падением давления* газа в камере. Поэтому второй режим – *изобарный*. Для поддержания постоянного давления в камере следует на стадии разгона уменьшать объём камеры – например, снабдив камеру поршнем. Убедимся, что в этом случае действительно реактивная сила поддерживается неизменной.

Реактивная сила определяется скоростью выброса массы $\left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$. В этом выражении $dm(t)$ – это приращение массы газа в камере за время dt . Масса газа в камере убывает, поэтому $dm(t) < 0$, и $dm(t) = -dm_{out}$, где dm_{out} – это масса порции газа, вылетевшей из сопла ракеты за время dt .

$$dm_{out} = \rho dV.$$

Вылетевшая из сопла порция газа – это цилиндр, площадь сечения которого равна площади сечения сопла S , а длина цилиндрика равна $d\ell = udt$.

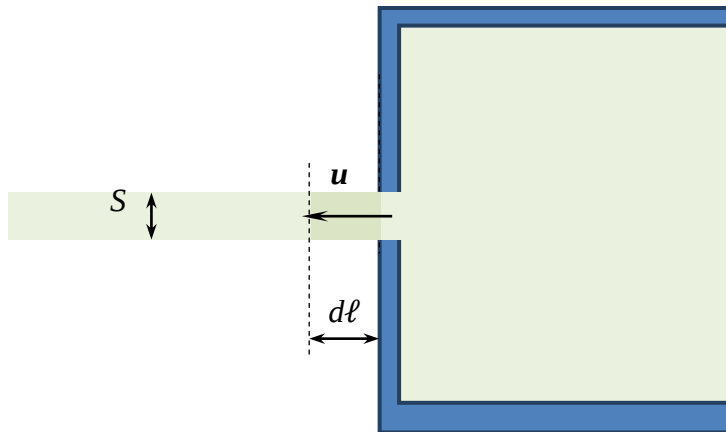


Рис. 2. Вылетающая из камеры порция газа

Таким образом,

$$dm(t) = -\rho dV = -\rho S u dt, \quad \frac{dm(t)}{dt} = -\rho S u. \quad (9)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного в виде

$$P\mu = \rho RT,$$

следует, что в изобарном режиме плотность газа тоже не изменяется с течением времени, тогда формула (9) означает, что скорость выброса массы $\left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$ и реактивная сила $\mathbf{F}_p = \mathbf{u} \frac{dm(t)}{dt}$ действительно в изобарном режиме *неизменны*.

Могут быть, разумеется, и другие режимы истечения газа в ракетном двигателе, но в данной лабораторной работе вам предлагается исследовать только два рассмотренных режима: изохорный и изобарный.

1.4. Особенности изохорного режима

Выясним сначала характер изменения массы газа в рабочей камере с течением времени, то есть получим выражение для функции $m(t)$. За основу удобно взять формулу (9), которая представляет собой дифференциальное уравнение для функции $m(t)$.

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\rho S u \quad (9)$$

Плотность газа ρ в этом уравнении связана с массой газа: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0}$, в результате чего получается такое уравнение:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -S u \frac{m}{V_0}.$$

Это уравнение легко решается методом разделения переменных. В итоге:

$$m(t) = m_0 e^{-\beta t}, \quad \beta = \frac{uS}{V_0}, \quad (10)$$

где m_0 – начальная масса газа, которая поступает в камеру на стадии формирования, а параметр β будем называть *реактивной постоянной*.

Зная функцию $m(t)$, можно определить, как зависят от времени ещё ряд важных параметров ракетного двигателя. Прежде всего, это скорость выброса массы и реактивная сила:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dm(t)}{dt} \right| &= \beta m_0 e^{-\beta t}, \\ F_p &= u \frac{dm(t)}{dt} = F_0 e^{-\beta t}, \quad F_0 = u \beta m_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Оба эти параметра, как и масса, экспоненциально убывают со временем. Причина этого уже отмечалась – падение давления газа в рабочей камере. Оно тоже падает экспоненциально, что следует из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P(t) = \frac{m(t)RT}{\mu V_0} = P_0 e^{-\beta t}, \quad P_0 = \frac{m_0 RT}{\mu V_0}. \quad (12)$$

Эту зависимость реально проверить *экспериментально*, для чего достаточно к камере подсоединить манометр, и его показания передавать наблюдателю по каналу телеметрии. Получение экспериментальной зависимости $P(t)$ позволяет, кроме того, измерить реактивную постоянную β , а также связанные с ней скорость истечения газа u и температуру газа в камере T .

- Для измерения реактивной постоянной β удобно линеаризовать формулу (12), для чего достаточно её прологарифмировать:

$$\ln P = \ln P_0 - \beta t.$$

Из этого выражения следует, что вспомогательная величина $y = \left| \ln \frac{P}{P_0} \right|$ пропорциональна времени:

$$y = \beta t,$$

так что для измерения реактивной постоянной β надо просто измерить коэффициент пропорциональности зависимости $y(t)$. Но сначала надо, разумеется, убедиться в том, что экспериментальная зависимость действительно – прямо пропорциональная. Это является критерием правильности формулы (12), то есть экспоненциального убывания давления газа в камере.

- Для измерения скорости истечения u можно воспользоваться определением реактивной постоянной (10) $\beta = \frac{uS}{V_0}$, откуда следует, что

$$u = \frac{\beta V_0}{S}. \quad (13)$$

- Зная скорость истечения, можно измерить температуру газа в камере T с помощью формулы (8)

$$u = \sqrt{\frac{2R}{\alpha\mu}} T,$$

откуда следует:

$$T = \frac{\alpha\mu}{2R} u^2, \quad (14)$$

А ещё подстановка формулы (10) в формулу (3)

$$v(t) = u \ln \frac{M + m_0}{M + m(t)}$$

позволяет получить *уравнения кинематики ракеты*.

- Уравнение для скорости:

$$v(t) = u \ln \frac{1+q}{1+q e^{-\beta t}}, \quad (15)$$

где обозначено: $q = \frac{m_0}{M}$. Это число q будем называть *массовым параметром*.

- Уравнение для ускорения получается дифференцированием скорости:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{u\beta}{\frac{1}{q} e^{\beta t} + 1}. \quad (16)$$

- Уравнение для координаты.

Это уравнение можно получить, если вычислить интеграл:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = u \int_0^t \ln \frac{1+q}{1+q e^{-\beta t}} dt. \quad (17)$$

Интеграл можно вычислить так: сначала сделать замену переменной $y = q e^{-\beta t}$, а затем разложить подынтегральную функцию в ряд по степеням y . В результате получается довольно громоздкая формула, которая здесь не приводится. Если интересно, получите её самостоятельно.

Уравнения кинематики ракеты можно проверить *экспериментальным путём*. Для этого надо расставить на пути следования ракеты датчики, снабжённые секун-

домерами, которые фиксируют момент прохождения мимо них ракеты. Зная координаты датчиков, можно в итоге получить экспериментальную зависимость $x(t)$ и затем сравнить её с теоретической – (17). К сожалению, теоретическая зависимость сложная, так что её проверка затруднительна. Поэтому можно поступить так: на основе экспериментальной зависимости $x(t)$ получить экспериментальные зависимости $v(t) = \frac{dx}{dt}$ и $a(t) = \frac{dv}{dt}$, и их уже сравнить с теоретическими (15) и (16). Достаточно это сделать для одной из зависимостей – если эксперимент подтвердит хотя бы одно из уравнений кинематики, то тем самым будут подтверждены и все остальные, так как они друг с другом связаны.

Необходимо при этом решить три проблемы.

- Как получить экспериментальные зависимости $v(t) = \frac{dx}{dt}$ и $a(t) = \frac{dv}{dt}$?
- Какое из уравнений кинематики целесообразнее проверять?
- Каким способом следует сравнивать теоретическое уравнение кинематики с экспериментальной зависимостью?

Метод получения экспериментальных кинематических зависимостей

Итак, экспериментальным путём определена зависимость $x(t)$, то есть измерен ряд значений координаты ракеты в различные моменты времени. Для того чтобы получить вторую кинематическую зависимость – $v(t)$, надо определить *способ измерения скорости* ракеты. По определению скорости, $v = \frac{dx}{dt}$. Если промежутки времени Δt между измерениями координат (то есть между моментами прохождения ракеты мимо соседних датчиков) достаточно малы, то скорость движения шарика между соседними датчиками можно измерить, используя формулу

$$v_n = v(t'_n) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}, \quad (18)$$

где s – расстояние между датчиками, n – порядковый номер датчика, t'_n – момент времени, для которого определена скорость v_n . Значение t'_n можно считать средним между t_n и t_{n-1} :

$$t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}. \quad (19)$$

Измерив скорость шарика в моменты времени t'_n , можно аналогичным образом измерить и *ускорение* шарика между каждой парой соседних моментов времени t'_n . Так как, по определению ускорения, $a = \frac{dv}{dt}$, то

$$a_n = a(t''_n) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2}. \quad (20)$$

Описанный метод измерения скорости и ускорения называется прямым методом. Он достаточно прост и понятен, но даёт низкую точность измерений. Это особенно проявляется при измерении ускорения.

Какое из уравнений кинематики целесообразнее проверять?

Из двух уравнений кинематики – для скорости (15) $v(t) = u \ln \frac{1+q}{1+q e^{-\beta t}}$ и для ускорения (16) $a(t) = \frac{u\beta}{\frac{1}{q} e^{\beta t} + 1}$ – второе *проще*, но погрешности измерения ускорения существенно больше погрешностей измерения скорости. Выбор – за экспериментатором. Он может для надёжности проверить и *оба* уравнения.

Способы сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей

Есть экспериментальная зависимость между двумя величинами x и y , то есть два соответствующие друг другу набора чисел (результатов измерений) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и есть теоретическая формула $y = f(x)$, определяющая связь между теми же величинами x и y . Здесь предлагаются два из возможных способов их сравнения.

Прямое сравнение.

Сначала нужно рассчитать значения функции $f(x)$ в той области значений x , в которой находятся результаты измерений $\{x_n\}$, а затем построить на одном графике два графика: экспериментальный и теоретический. Экспериментальные точки следует снабдить планками погрешностей, а теоретические точки *не ставить*, а только провести по ним линию. Если теоретическая линия пройдёт через экспериментальные точки, то теоретическую формулу $y = f(x)$ можно будет считать подтверждённой экспериментально.

Линеаризация.

Надо попытаться перейти от переменных x и y , связанных теоретической зависимостью $y = f(x)$ к другим переменным так, чтобы новые переменные (например, r и s) оказались зависящими друг от друга *линейно*. Затем надо, используя экспериментальные наборы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, получить два других набора $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$. Наконец, надо по данным $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ построить график экспериментальной зависимости $r(s)$. Точки на графике следует снабдить планками погрешностей, а затем провести через точки прямую линию тренда. Если эта линия пройдёт через экспериментальные точки, то теоретическую формулу $y = f(x)$ можно будет считать подтверждённой экспериментально.

Из двух уравнений кинематики (15) и (16) линеаризовать удастся только уравнение для ускорения (16). Сначала его можно записать так:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{u\beta} \left(\frac{1}{q} e^{\beta t} + 1 \right).$$

А уже это уравнение легко привести к линейной функции при следующей замене переменных:

$$z = \frac{1}{a}, \quad r = e^{\beta t}. \quad (21)$$

В результате получается:

$$z = kr + b,$$

где параметры функции $z(r)$ равны

$$k = \frac{1}{u\beta q}, \quad b = \frac{1}{u\beta} \quad (22)$$

1.5. Особенности изобарного режима

Главное достоинство изобарного режима состоит в том, что реактивная сила на стадии разгона не убывает со временем, а поддерживается *неизменной*. Для этого камера снабжается поршнем, который по мере уменьшения массы газа в камере уменьшает её объём. Выясним закон убывания массы газа $m(t)$.

Как отмечалось ранее, в изобарном режиме плотность газа ρ неизменна. Поэтому из равенства (9) $\frac{dm(t)}{dt} = -\rho S u$ следует, что масса убывает *линейно*:

$$m(t) = m_0 - \rho S u t = m_0 - \frac{m_0}{V_0} S u t = m_0 (1 - \beta t). \quad (23)$$

Линейное убывание массы газа означает, что через некоторое время после начала разгона газ в камере кончится. Это время назовём *временем разгона* и обозначим t_p . Из (23) следует, что время разгона – величина, обратная реактивной постоянной β :

$$t_p = \frac{1}{\beta} \quad (24)$$

То, что масса газа убывает со временем линейно, можно проверить экспериментально. Для этого только надо определить *способ измерения* массы. На следующем рисунке 3 показана рабочая камера в некоторый момент времени t .

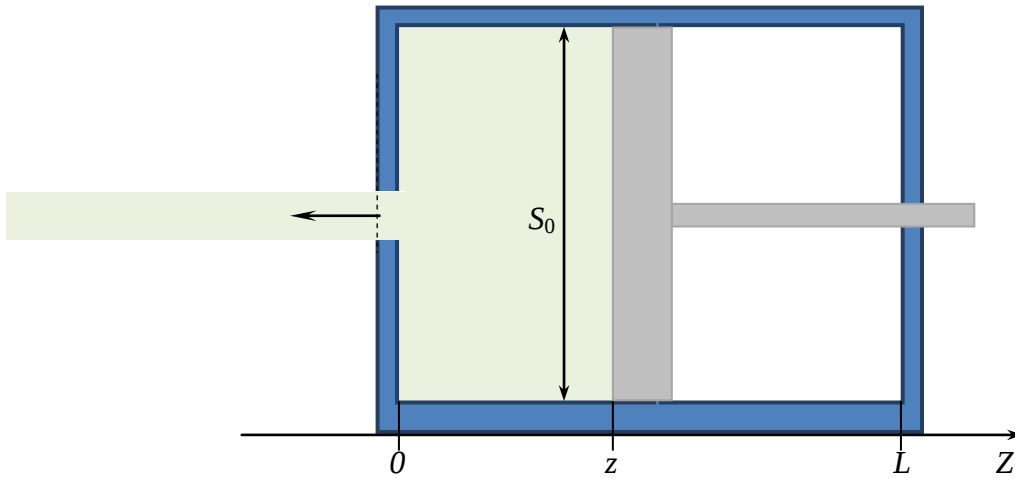


Рис. 2. Камера с поршнем в момент времени t

Если координата поршня равна z , то масса газа равна $m = \rho V = \rho S_0 z$. Плотность газа в стадии разгона постоянна и может быть определена так: $\rho = \frac{m_0}{V_0}$. Таким образом,

$$m = \frac{m_0}{V_0} S_0 z = \frac{m_0}{L} z,$$

где L – длина камеры. Начальная масса газа m_0 и длина камеры – это постоянные конструктивные параметры камеры, поэтому для измерения массы газа достаточно измерять координату поршня, причём прибор, измеряющий z , следует сразу проградуировать в единицах массы, а показания прибора (массу газа) передавать наблюдателю по каналу телеметрии.

Получив экспериментальную зависимость $m(t)$, экспериментатор может измерить реактивную постоянную β , а также связанные с ней скорость истечения газа u , разгонную скорость v_p и температуру газа в камере T .

- Для измерения реактивной постоянной β удобно сначала ввести вспомогательную величину

$$y = 1 - \frac{m}{m_0}.$$

Тогда формулу (23) можно записать в следующем виде:

$$y(t) = \beta t. \quad (25)$$

Таким образом, для измерения реактивной постоянной β надо просто измерить коэффициент пропорциональности экспериментальной зависимости $y(t)$. Но сначала надо, разумеется, убедиться в том, что эта зависимость действительно – прямо пропорциональная. Это является критерием правильности формулы (23), то есть линейного убывания массы газа в камере.

- Для измерения скорости истечения u можно использовать формулу (13) $u = \frac{\beta v_0}{s}$.
- Зная скорость истечения, можно, используя формулу Циолковского (4), измерить разгонную скорость:

$$v_p = u \ln \frac{M+m_0}{M} = \ln(1+q), \quad (26)$$

- Наконец, температуру газа в камере T можно измерить с помощью формулы (14)

$$T = \frac{\alpha \mu}{2R} u^2.$$

А ещё подстановка формулы (23) в формулу (3)

$$v(t) = u \ln \frac{M+m_0}{M+m(t)}$$

позволяет получить *уравнения кинематики ракеты*.

- Уравнение для скорости:

$$v(t) = u \ln \frac{1+q}{1+q(1-\beta t)}, \quad q = \frac{m_0}{M}.$$

В настоящее время в военных и космических ракетах масса топлива сравнима с массой ракеты, так что массовый параметр q порядка 1 и даже больше. Тем не менее, разработчики ракетной техники постепенно добиваются всё более эффективного топлива и снижения массового параметра. Ракеты, которые предлагаются вам для изучения в данной лабораторной работе, это – небольшие космические челноки, которые решают задачи работников орбитальных станций. Таким ракетам не надо преодолевать гравитационное поле Земли, поэтому топлива в них совсем немного, и массовый параметр $q \ll 1$. В этом случае уравнение для скорости можно записать в приближённом виде, используя разложение логарифма

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \approx x.$$

$$v(t) = u [\ln(1+q) - \ln(1+q(1-\beta t))] \approx u [q - q(1-\beta t)] = uq\beta t.$$

Итак, в первом приближении уравнение кинематики для скорости имеет вид:

$$v(t) = uq\beta t. \quad (27)$$

Скорость ракеты на стадии разгона нарастает пропорционально времени. Это означает, что ракета движется равноускоренно – с ускорением $a = uq\beta$.

- Уравнение для ускорения:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[u \ln \frac{1+q}{1+q(1-\beta t)} \right] = \frac{uq\beta}{1+q(1-\beta t)}.$$

Из этого уравнения следует, что с течением времени ускорение ракеты нарастает, но нарастание, по-видимому, незначительное, так как зависимость ускорения от времени определяется только вторым слагаемым в знаменателе $q(1-\beta t)$, а оно много меньше первого слагаемого 1. Максимальное значение второго слагаемого равно q , а $q \ll 1$. Поэтому, если отбросить $q(1-\beta t)$, то получится достаточно хорошее приближение:

$$a = \text{const} = uq\beta, \quad (28)$$

что вполне согласуется с уравнением (27).

- Уравнение для координаты:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = u \int_0^t \ln \frac{1+q}{1+q e^{-\beta t}} dt.$$

Интеграл – не простой, но можно и не тратить время на его вычисление, а сразу записать уравнение кинематики в первом приближении, считая движение ракеты равноускоренным:

$$x(t) = \frac{at^2}{2}, \quad a = uq\beta. \quad (29)$$

Разумеется, уравнения (29), (30) и (31) справедливы только для стадии разгона, то есть для $t < t_p = \frac{1}{\beta}$. А после разгона (при $t \geq t_p$) на ракету никакие силы не действуют, и она движется равномерно с разгонной скоростью v_p . Поэтому уравнения кинематики такие:

$$\begin{cases} x(t) = v_p t, \\ v(t) = v_p = \text{const} = u \ln(1+q) \approx uq, \\ a = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Экспериментальная проверка уравнений (27) – (30) достаточно проста. Сначала проводится эксперимент и получается экспериментальная зависимость $x(t)$. Затем описанным выше способом определяются ещё две экспериментальные зависимости: $v(t)$ и $a(t)$. В завершение строятся графики:

- $x(t)$. На участке разгона (при $t < t_p$) ожидается получить параболу, а после разгона (при свободном движении, $t \geq t_p$) – прямую линию.

- $v(t)$. На участке разгона ожидается получить наклонную прямую линию, проходящую через начало координат, а после разгона – горизонтальную прямую линию.
- $a(t)$. На обоих участках ожидается получить горизонтальные прямые линии ($a = \text{const}$): первая – выше, вторая – ниже, проходящая через нуль.

Интересно, что результаты исследования кинематики ракеты позволяют *независимо* от исследования зависимости $m(t)$ измерить два внутренних параметра ракеты: скорость истечения газа u и температуру газа T . Если подставить в формулу ускорения ракеты $a = uq\beta$ выражение для реактивной постоянной $\beta = \frac{uS}{V_0}$, то получится:

$$a = \frac{u^2 q S}{V_0},$$

откуда следует выражение для скорости истечения газа:

$$u = \sqrt{\frac{aV_0}{qS}} \quad (31)$$

Таким образом, есть два способа измерения скорости истечения:

- первый способ основан на исследовании зависимости $m(t)$, которое позволяет измерить реактивную постоянную β , а затем определить u по формуле (13) $u = \frac{\beta V_0}{S}$;
- второй способ основан на исследовании кинематики ракеты, которое позволяет измерить ускорение ракеты, а затем определить u по формуле (31).

Зная значение скорости истечения, можно с помощью уже упоминавшейся формулы (14) определить температуру газа T

$$T = \frac{\alpha \mu}{2R} u^2.$$

2. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При включении установки (при запуске программы) открывается начальное окно с названием работы и кнопками **Ход работы**, **Эксперимент**, **Завершение работы**. Вам надо нажать на кнопку **Эксперимент**, и тогда откроется окно, показанное на следующем рисунке 3.

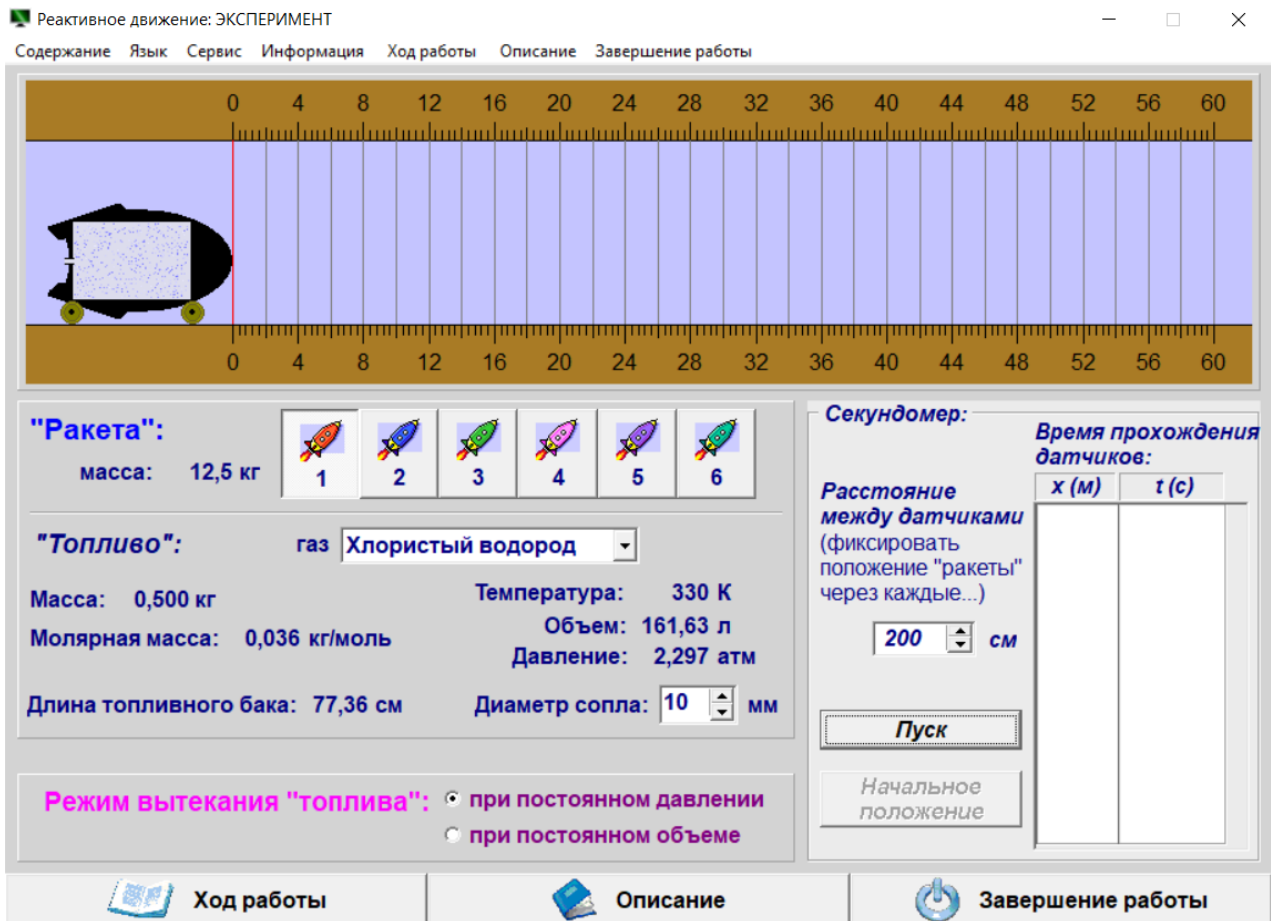


Рис. 3. Окно «Эксперимент»

В верхней части окна расположена область визуализации: движущаяся горизонтально ракета с показанной внутри её рабочей камерой и две линейки, показывающие координату ракеты.

Под областью визуализации расположена инструментальная панель: управляющие кнопки, приборы и инструменты.

- Инструмент **Ракета**. Предназначен для выбора одной из 6 ракет, которые отличаются только массой – значение массы показано слева от линейки с ракетами.
- Инструмент **Топливо**. Предназначен для выбора газа, которым на этапе формирования заполняется рабочая камера (7 вариантов). После выбора газа появляются значения параметров газа: масса (начальная), температура, молярная масса, объём и давление.
- Инструмент **Диаметр сопла**. Позволяет выбирать диаметр сопла в диапазоне от 10 мм до 30 мм.
- Инструмент **Режим вытекания топлива**. Позволяет выбирать один из двух режимов работы ракетного двигателя: *изобарный* (при постоянном давлении) и *изохорный* (при постоянном объёме).
- Прибор **Секундомер**. Он фиксирует моменты времени t_i прохождения ракеты мимо датчиков, расположенных вдоль её пути. Эти моменты и координаты датчиков x_i в ходе эксперимента появляются в окне **Время прохождения датчиков**. Расстояние между датчиками можно менять – от 200 см до 600 см с шагом 50 см.

- Кнопка **Пуск**. При нажатии на эту кнопку ракета начинает разгон и одновременно включается секундомер. Сама кнопка превращается в кнопку **Стоп**.

3. Порядок выполнения работы

Включите режим **Эксперимент** и обратитесь к преподавателю для того, чтобы он выбрал для вас ракету и режим вытекания топлива. Дальнейший порядок выполнения работы зависит от установленного режима.

Изохорный режим

3.1. Заполните таблицу 1 «Условия экспериментов».

Таблица 1

Условия экспериментов

Ракета			
Масса ракеты	M	кг	
Газ			
Начальное давление газа	P_0	атм	
Начальная масса газа	m_0	кг	
Массовый параметр	$q = m_0/M$		
Молярная масса	μ	кг/моль	
Температура	T	К	
Длина камеры	L	см	
Сечение камеры	S_0	см ²	
Объём камеры	V	л	
Диаметр сопла	d	мм	
Сечение сопла	S	см ²	
Параметр $\alpha = 1 - (S/S_0)^2$	α		
Расстояние между датчиками	s	м	
Газовая постоянная	R	Дж/(моль·К)	8,31446
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(\tau)$		
	$\Delta(P)$	атм	
	$\Delta(x)$	м	
	$\Delta(M)$	кг	
	$\Delta(m_0)$	кг	
	$\Delta(\mu)$	кг/моль	
	$\Delta(L)$	см	
	$\Delta(V)$	л	
	$\Delta(d)$	мм	

Эксперимент 1. Исследование характера убывания давления газа и измерение реактивной постоянной ракеты

- 3.2. Вам надо получить экспериментальную зависимость давления газа в ракете от времени $P(t)$. Начальное давление P_0 (при $t = 0$) вам уже известно – вы его запи-

сали в таблице 1. Для получения значений в другие моменты времени надо действовать так.

- Нажмите кнопку **Пуск** и наблюдайте за числами, которые появляются в окне **Время прохождения датчиков**.
- Как только в окне появляется очередная пара чисел (значения x и t), быстро нажмите кнопку **Стоп**.
- Запишите в таблицу 2 номер датчика, момент времени t (из окна **Время прохождения датчиков**) и давление – из раздела **Топливо**. Время надо записывать в столбец t_1 .
- Нажмите кнопку **Начальное положение**.

Эту операцию вам надо проделать 10 – 15 раз.

Таблица 2
Зависимость давления газа в ракете P от времени t

Среднее время реакции τ			с	
Номер замера n	t_1	P	$t = t_1 + \tau$	$y = \ln(P/P_0) $
	с	Па	с	
1	0			
2				
...				
...				
12				

- 3.3.** Для достаточно точного определения реактивной постоянной следует оценить систематическую ошибку измерения давления газа в ракете, вызванную реакцией экспериментатора. Чтобы измерить давление газа в момент прохождения ракеты мимо датчика, экспериментатор в этот момент нажимает кнопку **Стоп**. Однако он это делает с естественной задержкой, которая равна среднему времени его реакции τ . Следовательно, все времена в столбце t_1 таблицы 2 надо увеличить на τ . Для этого в таблице 3 предусмотрен столбец $t = t_1 + \tau$. Заполните его. Среднестатистическое время реакции человека считается равным 0,2 с, но вы можете поставить и своё время реакции, если вы его знаете.
- 3.4.** Используя данные в таблице 2, постройте график зависимости давления в ракете P от времени t . Не забудьте нанести планки погрешностей, причём учтите, что погрешность измерения времени в этом эксперименте – случайная, то есть $\Delta(\tau)$. Согласно формуле (12), $P(t) = P_0 e^{-\beta t}$, поэтому нанесите линию тренда и укажите в её параметрах: «экспоненциальная» и «показывать уравнение на диаграмме».
- 3.5.** Прокомментируйте построенный график.
- 3.6.** Чтобы определить реактивную постоянную β и связанные с ней внутренние параметры ракеты (скорость истечения газа u и температуру газа T) заполните следующую таблицу 3. Для определения β используйте функцию ЛИНЕЙН, а для определения u и T – формулы (13) и (14):

$$u = \frac{\beta v_0}{s}.$$

$$T = \frac{\alpha \mu}{2R} u^2.$$

Таблица 3

Реактивная постоянная β , скорость истечения газа u и температура газа T

Величина	β	u	T
Размерность	с^{-1}	м/с	К
Значение			
Абсолютная погрешность			
Относительная погрешность			

Эксперимент 2. Исследование кинематики ракеты

3.7. Нажмите кнопку **Пуск** и дождитесь окончания эксперимента, после чего перенесите все результаты измерений из окна **Время прохождения датчиков** в следующую таблицу 4 – в столбцы t и x .

Таблица 4

Зависимость координат, скорости и ускорения ракеты от времени

Номер замера n	t	x	t'	v	$\Delta(v)$	t''	a	$\Delta(a)$
	с	м	с	м/с	м/с	с	м/с ²	м/с ²
1	0	0,0	0	0	0			
2								
3								
...								
...								

Затем заполните столбцы t' , v и $\Delta(v)$, начиная со второй строки ($n = 2$). Для этого используйте формулы (18), (19) и (32):

$$v_n = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}, \quad t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2},$$

$$\varepsilon(v_n) = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{2\Delta(t)}{t_n - t_{n-1}}, \quad \Delta(v_n) = v_n \varepsilon(v_n).$$

И, наконец, заполните столбцы t'' , v и $\Delta(v)$. Начинать надо с третьей строки ($n = 3$), в ячейках первой и второй строк ничего писать не надо, использовать при этом формулы (20) и (33):

$$a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2},$$

$$\varepsilon(a_n) = \frac{2\Delta(v)}{v_n - v_{n-1}} + \frac{2\Delta(t)}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad \Delta(a_n) = a_n \varepsilon(a_n).$$

3.8. Для *прямого* сравнения результатов экспериментального исследования кинематики ракеты с теоретическими уравнениями кинематики сделайте расчёты значений скорости и ускорения ракеты по формулам (15) и (16):

$$v(t) = u \ln \frac{1+q}{1+q e^{-\beta t}}, \quad a(t) = \frac{u\beta}{\frac{1}{q} e^{\beta t} + 1}.$$

Расчёты следует провести для 10 – 15 моментов времени, начиная с $ct = 0$ и кончая числом, немного большим максимального экспериментального значения из таблицы 4. Шаг изменения t желательно задавать постоянным или примерно постоянным. Результаты расчётов поместите таблицу 5.

Таблица 5

Теоретические зависимости скорости и ускорения ракеты
от времени

t	βt	$e^{\beta t}$	v	a
с			м/с	м/с ²
0,00				
...				
...				

3.9. По данным таблиц 4 и 5 постройте следующие графики.

- Экспериментальная зависимость $x(t)$.
- Экспериментальная и теоретическая зависимости $v(t)$ – два графика на одном рисунке.
- Экспериментальная и теоретическая зависимости $a(t)$ – два графика на одном рисунке.

Обратите внимание: если на одном рисунке строятся два графика – экспериментальный и теоретический, то на экспериментальном графике должны быть *точки и планки погрешностей*, а на теоретическом графике точки не показывают, но показывают *линию*, для чего выбирают тип диаграммы «Точечная с гладкими кривыми».

Каждый из трёх рисунков прокомментируйте.

3.10. Подготовьте данные для проверки теоретической зависимости $a(t)$ методом линеаризации. Как указано выше, линеаризовать функцию $a(t) = \frac{u\beta}{\frac{1}{q}e^{\beta t} + 1}$ можно путём замены переменных (21)

$$z = \frac{1}{a}, \quad r = e^{\beta t}.$$

Поэтому заполните следующую таблицу 6.

Таблица 6

Зависимость между вспомогательными величинами $z = 1/a$ и $r = e^{\beta t}$

t	a	$\Delta(a)$	$r = e^{\beta t}$	$z = 1/a$	$\Delta(r)$	$\Delta(z)$
с	м/с ²	м/с ²		с ² /м		с ² /м
...						
...						
...						

В первые три столбца таблицы надо перенести данные из таблицы 4. Разумеется, что при этом в столбец t таблицы 6 переносятся числа из столбца t' таблицы 4.

3.11. На основании данных таблицы 6 постройте график зависимости $z(r)$. Нанесите на график планки погрешностей и линию тренда.

Построенный график прокомментируйте.

3.12. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

Изобарный режим

3.1. Заполните таблицу 1 «Условия экспериментов».

Таблица 1

Условия экспериментов

Ракета			
Масса ракеты	M	кг	
Газ			
Давление газа	P	атм	
Начальная масса газа	m_0	кг	
Массовый параметр	$q = m_0/M$		
Молярная масса	μ	кг/моль	
Температура	T	К	
Длина камеры	L	см	
Сечение камеры	S_0	см ²	
Начальный объём камеры	V_0	л	
Диаметр сопла	d	мм	
Сечение сопла	S	см ²	
Параметр $\alpha = 1 - (S/S_0)^2$	α		
Расстояние между датчиками	s	см	
Газовая постоянная	R	Дж/(моль·К)	8,31446
Погрешности прямых измерений и заданных величин	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(\tau)$	с	
	$\Delta(x)$	м	
	$\Delta(M)$	кг	
	$\Delta(m_0)$	кг	
	$\varepsilon(q)$		
	$\Delta(\mu)$	кг/моль	
	$\Delta(L)$	см	
	$\Delta(V_0)$	л	
	$\Delta(d)$	мм	

Эксперимент 1. Исследование зависимость массы ракеты от времени и измерение времени разгона ракеты

3.2. Вам надо получить экспериментальную зависимость массы газа в ракете от времени $m(t)$. Начальное давление m_0 (при $t = 0$) вам уже известно – вы его записали в таблице 1. Для получения значений в другие моменты времени надо действовать так.

- Нажмите кнопку **Пуск** и наблюдайте за числами, которые появляются в окне **Время прохождения датчиков**.
- Как только в окне появляется очередная пара чисел (значения x и t), быстро нажмите кнопку **Стоп**.

- Запишите в таблицу 2 номер датчика, момент времени t (из окна **Время прохождения датчиков**) и массу газа – из раздела **Топливо**. Время надо записывать в столбец t_1 .
- Нажмите кнопку **Начальное положение**.

Эту операцию вам надо проделывать до тех пор, пока масса газа *не равна* нулю. Результаты опыта, в котором $m = 0$, в таблицу 2 уже заносить не надо.

Таблица 2

Зависимость массы газа в ракете m от времени t

Среднее время реакции τ			с	
Номер замера n	t_1	m	$t = t_1 + \tau$	$y = 1 - m/m_0$
	с	Па	с	
1	0			
2				
...				

- 3.3.** Для достаточно точного определения времени разгона следует оценить систематическую ошибку измерения массы газа в ракете, вызванную реакцией экспериментатора. Чтобы измерить массу газа в момент прохождения ракеты мимо датчика, экспериментатор в этот момент нажимает кнопку **Стоп**. Однако он это делает с естественной задержкой, которая равна среднему времени его реакции τ . Следовательно, все времена в столбце t_1 таблицы 2 надо увеличить на τ . Для этого в таблице 3 предусмотрен столбец $t = t_1 + \tau$. Заполните его. Среднестатистическое время реакции человека считается равным 0,2 с, но вы можете поставить и своё время реакции, если вы его знаете.
- 3.4.** Используя данные в таблице 2, постройте график зависимости величины $y = \left(1 - \frac{m}{m_0}\right)$ от времени t . Нанесите на график планки погрешностей и линию тренда.
- 3.5.** Прокомментируйте построенный график.
- 3.6.** Чтобы измерить реактивную постоянную β , время разгона t_p и связанные с β внутренние параметры ракеты (скорость истечения газа u , разгонную скорость v_p и температуру газа T), заполните следующую таблицу 3. Для определения β используйте функцию ЛИНЕЙН, а для определения u , v_p и T – формулы (13) и (14):

$$u = \frac{\beta v_0}{s}, \quad T = \frac{\alpha \mu}{2R} u^2.$$

Таблица 3

Реактивная постоянная β , время разгона ракеты t_p , скорость истечения газа u , разгонная скорость v_p и температура газа T

Величина	β	t_p	u	v_p	T
Размерность	с^{-1}	с	м/с	м/с	К
Значение					
Абсолютная погрешность					
Относительная погрешность					

Эксперимент 2. Исследование кинематики ракеты

3.7. Нажмите кнопку **Пуск** и дождитесь окончания эксперимента, после чего перенесите все результаты измерений из окна **Время прохождения датчиков** в следующую таблицу 4 – в столбцы t и x .

Таблица 4

Зависимость координат, скорости и ускорения ракеты от времени

Номер замера n	t	x	t'	v	$\Delta(v)$	t''	a	$\Delta(a)$
	с	м	с	м/с	м/с	с	м/с ²	м/с ²
1	0	0,0	0	0	0			
2								
3								
...								
...								

Затем заполните столбцы t' , v и $\Delta(v)$, начиная со второй строки ($n = 2$). Для этого используйте формулы (18), (19) и (32):

$$v_n = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}, \quad t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2},$$

$$\varepsilon(v_n) = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{2\Delta(t)}{t_n - t_{n-1}}, \quad \Delta(v_n) = v_n \varepsilon(v_n).$$

И, наконец, заполните столбцы t'' , a и $\Delta(a)$. Начинать надо с третьей строки ($n = 3$), в ячейках первой и второй строк ничего писать не надо, использовать при этом формулы (20) и (33):

$$a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2},$$

$$\varepsilon(a_n) = \frac{2\Delta(v)}{v_n - v_{n-1}} + \frac{2\Delta(t)}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad \Delta(a_n) = a_n \varepsilon(a_n).$$

3.8. По данным таблицы 4 постройте три графика: $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$. Каждый из графиков постройте как два графика: для стадии разгона ($t < t_p$) и для стадии свободного движения (после окончания разгона – при $t > t_p$). Точки и линии на каждой из двух частей графика изобразите своим цветом, а в диалоговом окне «элементы диаграммы» включите режим «легенда». Кроме того, для того, чтобы чётко отделить друг от друга две части графика, отметьте на оси времени точку $t = t_p$ и проведите через неё вертикальную пунктирную линию.

После каждого из графиков напишите свой комментарий.

3.9. Если график экспериментальной зависимости $v(t)$ на стадии разгона покажет пропорциональность между v и t , то с помощью функции **ЛИНЕЙН** измерьте коэффициент пропорциональности (ускорение ракеты a), а также связанные с ускорением внутренние параметры ракеты: скорость истечения газа u и температуру газа T . При этом используйте формулы (31) и (14):

$$u = \sqrt{\frac{aV_0}{qS}}, \quad T = \frac{\alpha\mu}{2R} u^2.$$

Для измерения значений a , u и T оформите следующую таблицу 5.

Таблица 5

Ускорение ракеты a , скорость истечения газа u , и температура газа T

Величина	a	u	T
Размерность	м/с ²	м/с	К
Значение			
Абсолютная погрешность			
Относительная погрешность			

Сравните информацию в таблицах 3 и 5, напишите свой комментарий.

3.10. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

4. Оценка погрешностей измерений

4.1. Погрешности прямых измерений и заданных величин оцените самостоятельно и впишите их в таблицу «Условия экспериментов».

Две рекомендации.

А. В окне **Время прохождения датчиков** координаты ракеты x выдаются в метрах, с одним знаком после запятой. Поэтому погрешность $\Delta(x)$ можно было бы оценить как 0,1 м. Однако реально в лабораторной установке датчики положения ракеты установлены точнее: их координаты выверены с точностью 1 – 2 см. Поэтому рекомендуется принять $\Delta(x) = 0,02$ м.

Б. Погрешность измерения времени зависит от проводимого эксперимента. При исследовании кинематики ракеты погрешность измерения времени – приборная, а при исследовании зависимости от времени давления газа в ракете и массы газа эта погрешность – случайная, она определяется реакцией экспериментатора τ . Поэтому в таблицах «Условия экспериментов» предусмотрена погрешность $\Delta(\tau)$. Среднестатистическое время реакции человека равно $(0,2 \pm 0,1)$ с, так что в качестве оценки погрешности $\Delta(\tau)$ можно взять 0,1 с или 0,2 с.

4.2. Погрешность массового параметра $q = \frac{m_0}{M}$.

Из формулы для q следует:

$$\varepsilon(q) = \varepsilon(m_0) + \varepsilon(M), \quad \Delta(M) = M \cdot \varepsilon(M).$$

4.3. Погрешность сечения камеры S_0 .

Площадь сечения камеры определяется по формуле $S_0 = \frac{V_0}{L}$. Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(S_0) = \varepsilon(V_0) + \varepsilon(L), \quad \Delta(S_0) = S_0 \cdot \varepsilon(S_0).$$

4.4. Погрешность параметра $\alpha = 1 - \left(\frac{s}{s_0}\right)^2$.

$$\Delta(\alpha) = \Delta\left[\left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right] = \left(\frac{s}{s_0}\right)^2 \varepsilon\left[\left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right] = \left(\frac{s}{s_0}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{s}{s_0}\right) = 2\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 [\varepsilon(s) + \varepsilon(s_0)],$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} \approx \Delta(\alpha).$$

Так как $S \ll S_0$, то $\varepsilon(\alpha)$ значительно меньше погрешностей $\varepsilon(S)$ и $\varepsilon(S_0)$, поэтому погрешность параметра α можно не учитывать.

4.5. Погрешность измерения скорости истечения газа u .

Вам предлагается использовать два косвенных способа измерения скорости истечения.

Первый способ основан на применении формулы (13) $u = \frac{\beta V_0}{S}$. Исходя из этой формулы, а также из того, что $S = \pi \frac{d^2}{4}$, получаем:

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(\beta) + \varepsilon(V_0) + 2\varepsilon(d), \quad \Delta(u) = u\varepsilon(u).$$

Второй способ основан на применении формулы (31) $u = \sqrt{\frac{aV_0}{qS}}$. В этом случае:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}[\varepsilon(a) + \varepsilon(V_0) + \varepsilon(q) + 2\varepsilon(d)], \quad \Delta(u) = u\varepsilon(u).$$

Так как количество слагаемых в данной формуле для относительной погрешности больше трёх, то эта оценка погрешности – завышенная, более реальной является такая оценка:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2(a) + \varepsilon^2(V_0) + \varepsilon^2(m_0) + \varepsilon^2(M) + 4\varepsilon^2(d)}.$$

4.6. Погрешность измерения разгонной скорости ракеты v_p .

Разгонная скорость измеряется косвенным способом, на основе измерения скорости истечения газа u . Связь между v_p и u задаётся формулой Циолковского и следующей из неё формулой (26) $v_p = u \ln(1 + q)$. Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(v_p) = \varepsilon(u) + \varepsilon[\ln(1 + q)];$$

$$\Delta[\ln(1 + q)] = \left| \frac{d}{dq} \ln(1 + q) \right| \Delta(q) = \frac{\Delta(q)}{(1 + q)}.$$

Так как $q \ll 1$, то $(1 + q) \approx 1$, и тогда

$$\Delta[\ln(1 + q)] = \Delta(q), \quad \varepsilon[\ln(1 + q)] = \frac{\Delta(q)}{\ln(1 + q)}.$$

Используем разложение логарифма

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Тогда в первом приближении $\ln(1 + q) = q$, и в итоге

$$\varepsilon[\ln(1 + q)] = \frac{\Delta(q)}{q} = \varepsilon(q),$$

$$\varepsilon(v_p) = \varepsilon(u) + \varepsilon(q), \quad \Delta(q) = q\varepsilon(q).$$

4.7. Погрешность измерения температуры газа T .

Для измерения температуры используется формула (14) $T = \frac{\alpha \mu}{2R} u^2$. Так как погрешностями параметра α и универсальной газовой постоянной можно пренебречь, то из формулы (14) следует:

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(u) + \varepsilon(\mu), \quad \Delta(T) = T\varepsilon(T).$$

4.8. При измерении скорости ракеты v и её ускорения a необходимо оценивать не только погрешности $\Delta(v)$ и $\Delta(a)$, но и погрешности измерения времён t' и t'' , которым соответствуют измеренные значения скорости и ускорения ракеты.

Величина t' измеряется в соответствии с формулой (19): $t'_n = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$. Из этой формулы следует:

$$\Delta(t'_n) = \frac{1}{2}(\Delta(t_n) + \Delta(t_{n-1})) = \frac{1}{2}(\Delta(t) + \Delta(t)) = \Delta(t).$$

Для измерения моментов времени t'' используется формула (20) $t''_n = \frac{t'_n + t'_{n-1}}{2}$.

Поэтому аналогично получается, что $\Delta(t''_n) = \Delta(t'_n) = \Delta(t)$.

4.9. Погрешность измерения скорости ракеты v .

Скорость измеряется с использованием формулы (18) $v_n = v(t'_n) = \frac{s}{t_n - t_{n-1}}$. Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(v_n) = \varepsilon(s) + \varepsilon(t_n - t_{n-1}) = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{\Delta(t_n - t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{2\Delta(t)}{t_n - t_{n-1}}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon(v_n) = \frac{\Delta(s)}{s} + \frac{2\Delta(t)}{t_n - t_{n-1}}, \quad \Delta(v_n) = v_n \varepsilon(v_n). \quad (32)$$

4.10. Погрешность измерения ускорения ракеты a .

Для измерения ускорения используется формула (20): $a_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{t'_n - t'_{n-1}}$. Из этой формулы следует:

$$\begin{aligned} \varepsilon(a_n) &= \varepsilon(v_n - v_{n-1}) + \varepsilon(t'_n - t'_{n-1}) = \frac{\Delta(v_n - v_{n-1})}{v_n - v_{n-1}} + \frac{\Delta(t'_n - t'_{n-1})}{t'_n - t'_{n-1}} = \\ &= \frac{2\Delta(v)}{v_n - v_{n-1}} + \frac{2\Delta(t)}{t'_n - t'_{n-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varepsilon(a_n) = \frac{2\Delta(v)}{v_n - v_{n-1}} + \frac{2\Delta(t)}{t'_n - t'_{n-1}}, \quad \Delta(a_n) = a_n \varepsilon(a_n). \quad (33)$$

Обратите внимание: если разница между двумя соседними значениями скорости $(v_n - v_{n-1})$ окажется сравнимой с погрешностью измерения скорости $\Delta(v)$, то относительная погрешность измерения ускорения $\varepsilon(a)$ может оказаться очень большой. Поэтому, чтобы оценка погрешности ускорения не была слишком завышенной, рекомендуется выбрать для всех значений a минимальную погрешность скорости $\Delta(v)$ – при $n = 2$.

А вообще будьте готовы к тому, что планки погрешностей на графике ускорения окажутся не маленькими – как указывалось, прямой метод измерения скорости и ускорения обладает *низкой* точностью, и особенно это проявляется при измерении ускорения.

4.11. Погрешности измерения вспомогательных величин z и r , используемых для линеаризации зависимости ускорения ракеты от времени.

Эти величины определяются формулами (21)

$$z = \frac{1}{a}, \quad r = e^{\beta t}.$$

Из данных формул следует:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(a), \quad \Delta(z) = z\varepsilon(z);$$

$$\Delta(r) = \left| \frac{dr}{d(\beta t)} \right| \Delta(\beta t) = r(\beta t)\varepsilon(\beta t) = r\beta t(\varepsilon(\beta) + \varepsilon(t)).$$

5. Контрольные вопросы

- 5.1. Какое движение называется реактивным?
- 5.2. Напишите уравнение Мещерского и объясните, какие величины входят в это уравнение.
- 5.3. Что такое реактивная сила?
- 5.4. Напишите формулу Циолковского и объясните, какие величины входят в эту формулу.
- 5.5. От чего зависит скорости истечения газа из сопла ракеты?
- 5.6. При каком условии скорость истечения газа не изменяется в процессе работы ракетного двигателя?
- 5.7. Какие два режима работы ракетного двигателя изучаются в данной лабораторной работе?
- 5.8. Что такое реактивная постоянная?
- 5.9. Какой вид имеют уравнения кинематики ракеты при изохорном режиме работы двигателя?
- 5.10. Какой вид имеют уравнения кинематики ракеты при изобарном режиме работы двигателя?
- 5.11. Какой эксперимент вы будете выполнять для измерения реактивной постоянной при изохорном режиме работы двигателя?
- 5.12. Какой эксперимент вы будете выполнять для измерения реактивной постоянной при изобарном режиме работы двигателя?
- 5.13. Какой график зависимости ускорения ракеты от времени вы ожидаете получить при условии, что режим работы ракетного двигателя – изохорный?
- 5.14. Какой график зависимости ускорения ракеты от времени вы ожидаете получить при условии, что режим работы ракетного двигателя – изобарный?

6. Литература

- 6.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М., Наука, 1989.
- 6.2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М., Высшая школа, 1989.
- 6.3. Кравченко Н.С., Ревинская О.Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Издательство НИ ТПУ, 2007.
- 6.4. Рипп А.Г. Обработка измерений. Методическое пособие. – СНУЯЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Мирошниченко Евгения Владимировна**

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 230/2025. Объем 1,75 п.л. Усл. печ. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,715.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»