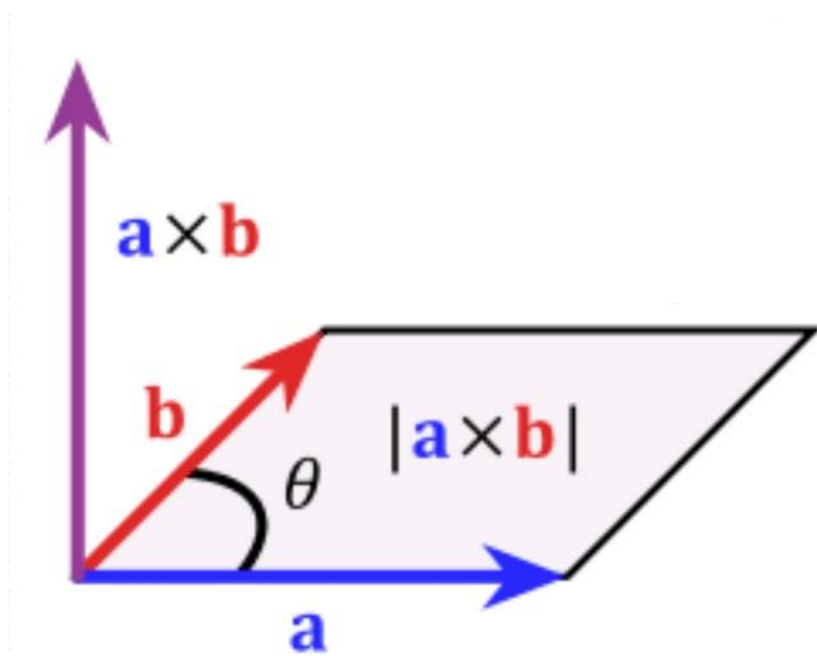


С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

Э Л Е М Е Н Т Ы ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

Э Л Е М Е Н Т Ы ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие
к проведению практических занятий
по высшей математике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2026

УДК 514.742.2(076.5)
ББК 22.151.511я73
Ч408

Р е ц е н з е н т:
О.В. Матузаева – канд. техн. наук

Чернявская С. А.

Ч408 Элементы векторной алгебры: учебно-методическое пособие к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / С.А. Чернявская, В.Г. Царёв; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2026. – 78 с.: ил. – Текст: электронный.

Разработано преподавателями кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначено для студентов 1 курса технических и естественно-научных специальностей, выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика».

Пособие знакомит читателя с понятиями: вектор, скалярные и векторные величины, коллинеарность, ортогональность, компланарность, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. В пособии приведено достаточное количество примеров и задач по рассматриваемым темам, приведены варианты индивидуальных заданий по теме «Элементы векторной алгебры». Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 514.742.2(076.5)
ББК 22.151.511я73

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Высшая математика», № 6 от 16 февраля 2026 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ	4
2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТАМ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ	26
3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	40
4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	49
5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	60
6. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ	68
ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ	71
ЛИТЕРАТУРА	78

§1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1.1. Основные вопросы теории

1.1.1. Начальные понятия

При изучении закономерностей окружающего нас мира выявляются два типа величин: скалярные и векторные. Величина, характеризующаяся только числовым значением, называется скалярной. Примерами скалярных величин являются: масса, температура, плотность, количество выпавших осадков и т.д. Величина, которая характеризуется не только количественной стороной, но и направлением, называется векторной величиной. Такими величинами являются скорость точки, сила, напряженность магнитного поля и т.д.

Для отвлеченного изображения векторных величин служат векторы.

Определение. Вектором называется направленный отрезок с начальной точкой А и конечной В (или, что то же, упорядоченная пара точек А, В).

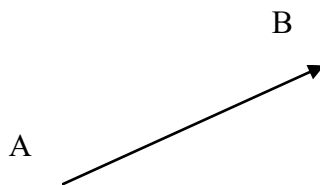


Рис. 1

Направление на отрезке принято отмечать стрелкой (рис. 1). Над буквенным обозначением вектора ставится черточка или стрелочка: $\overline{AB}$ или $\vec{AB}$. В книгах буквы, обозначающие вектор, набирают жирным шрифтом: **$\overline{AB}$** .

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (а также модулем и абсолютной величиной). Ее обозначение: $|\overline{AB}|$, $|\vec{AB}|$, AB . Часто векторы обозначаются одной буквой, например $\vec{a}$ или $\vec{F}$, или $\vec{R}$.

Если начало и конец вектора совпадают, то он называется нулевым (или нуль-вектором): $\vec{0}$. Длина нуль-вектора равна нулю, направление не определено. Нуль-вектор – точка.

Определение. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Их обозначение $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$) (противоположно направленными ($\vec{a} \updownarrow \vec{b}$)) если они коллинеарны и идут в одну (разные) стороны (рис.2).

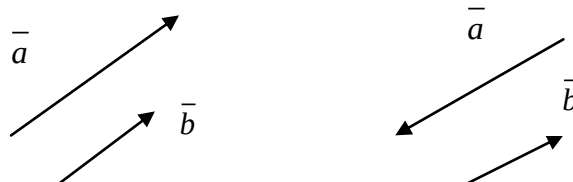


Рис. 2

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда их длины равны и они сонаправлены, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \end{cases}.$$

Из этого определения следует, что выбрав одну точку O' можно построить единственный вектор $\vec{a}'$, выходящий из точки O' и равный данному $\vec{a}$, т.е. другими словами, перенести вектор $\vec{a}$ в точку O' (рис.3)

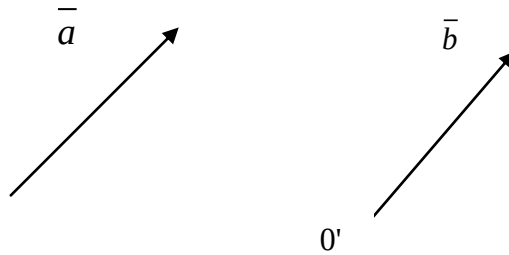


Рис. 3

Замечание. В физике используются понятия свободного, скользящего и приложенного векторов. Математически эти понятия вводят в зависимости от особенностей определения равенства векторов.

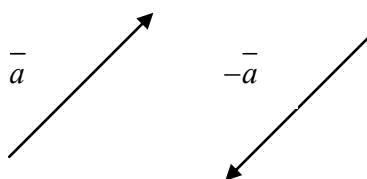
Если взять указанное выше определение, то получаем свободный вектор, т.е. вектор, который можно как угодно перемещать в пространстве, сохраняя при этом его длину и направление. Свободным вектором, например, изображается угловая скорость тела.

Если считать два вектора равными, когда они равны по длине, лежат на одной прямой и идут в одну сторону, то произвольный вектор может быть перенесен не в любую точку пространства, а только вдоль прямой, на которой он лежит. Такие векторы называются скользящими. Скользящим вектором изображается сила, действующая на абсолютно твердое тело.

Если не вводить никакого особого понятия равенства, но считать, что каждый вектор равен только самому себе и задается, помимо длины и направления еще и точкой приложения, то имеем приложенный вектор. Такой вектор нельзя перемещать в пространстве. Приложенными векторами изображается сила, действующая на упругое тело.

В дальнейшем будем рассматривать только свободные вектора в трехмерном пространстве.

Определение. Два ненулевых вектора называются противоположными, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления.



Вектор, противоположный $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$ (рис. 4).

Рис. 4

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным.

Существует бесчисленное множество единичных векторов.

Определение. Единичный вектор, сонаправленный с данным $\vec{a}$, называется его ортом. Орт вектора $\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^\circ$ (рис. 5).

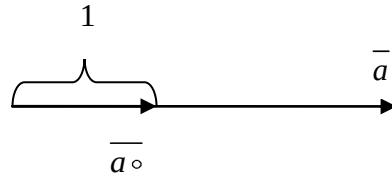


Рис. 5

Определение. Три ненулевых вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рис. 6).

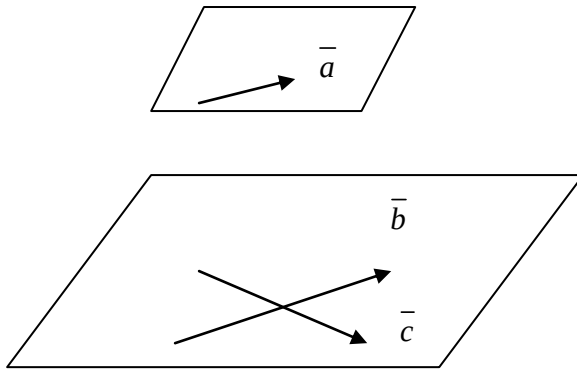


Рис. 6

Определение. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарные, то такие векторы компланарны.

Определение. Углом φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего угла между направлениями этих векторов, имеющими общее начало (рис. 7).

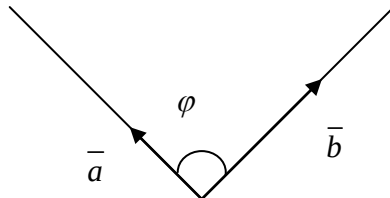


Рис. 7

Угол между векторами условимся обозначать $\varphi = \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right)$. Очевидно, что $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Определение. Два вектора, угол между которыми равен 90° , называются ортогональными. Записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$.

1.1.2. Линейные операции над векторами

К линейным операциям векторов относятся сложение векторов и умножение вектора на скаляр.

Определение. Суммой нескольких векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{q}$, называется вектор $\vec{R}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, если заданные векторы расположены так, что конец предыдущего является началом последующего.

Из определения следует, что если необходимо сложить n векторов, произвольно расположенных в плоскости необходимо их расположить в цепочку векторов (используя определение равенства векторов), сделав параллельный перенос каждого вектора так, чтобы начало каждого вектора начиная со второго совпало с концом предыдущего. Затем соединить начало первого вектора с концом последнего (рис. 8).

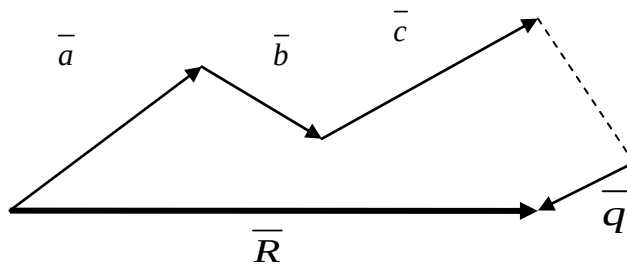


Рис. 8

Операция нахождения суммы векторов называется их сложением. Сложение двух векторов по определению называется **правилом треугольника** (рис. 9).

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку O и построим вектор $\vec{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{b}$. Вектор $\vec{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

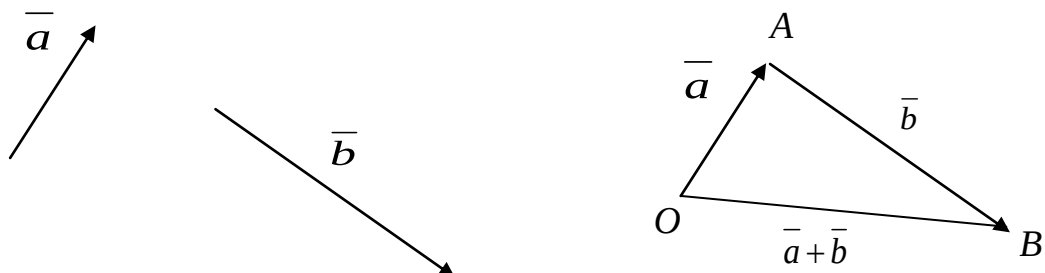


Рис. 9

Свойства сложения векторов

1. Сложение векторов коммутативно (перестановочно), т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (рис. 10).

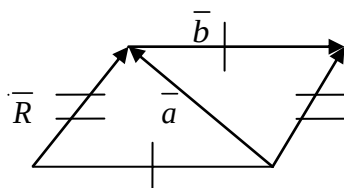


Рис.10

2. Сложение векторов ассоциативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, выполняется $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (рис. 11)

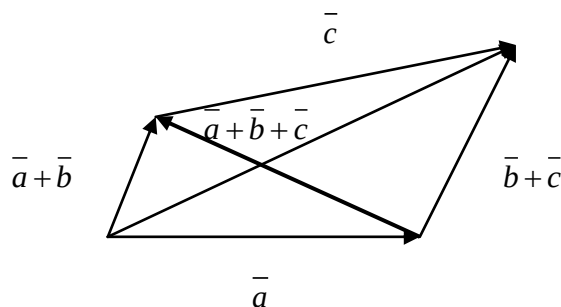


Рис. 11

3. Закон поглощения нуль-вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Из определения суммы и свойств сложения следуют специальные правила сложения двух и трех векторов, отнесенных к общему началу.

Правило параллелограмма. Сумма двух неколлинеарных векторов, отнесенных к общему началу, есть третий вектор, выходящий из общего начала и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на складываемых векторах как на сторонах (рис. 12).

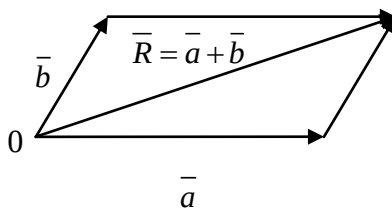


Рис. 12

Правило параллелепипеда. Сумма трех некомпланарных векторов, отнесенных к общему началу, есть новый вектор $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, выходящий из общего начала и совпадающий с диагональю параллелепипеда, построенного на слагаемых векторах как на ребрах (рис. 13).

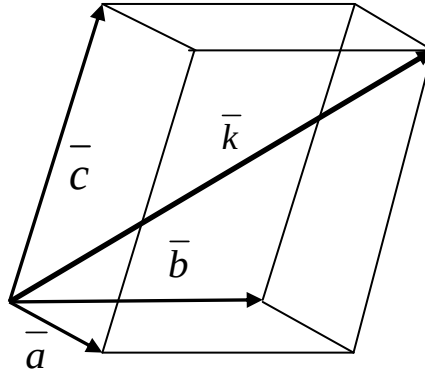


Рис. 13

Определение. Произведение вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на скаляр $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda \vec{a}$, который

- 1) имеет длину, равную $|\lambda| |\vec{a}|$ и
- 2) сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлен, если $\lambda < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на скаляр λ обозначается $\lambda \vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ при любом λ .

Если $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0}$ для любых $\vec{a}$.

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Построим векторы $\frac{1}{2}\vec{a}$ и $-2\vec{b}$. Для этого длину вектора $\vec{a}$ уменьшим в два раза, направление оставим прежним, получим вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$. Длину вектора $\vec{b}$ увеличим в два раза и направление изменим на противоположное, получим вектор $-2\vec{b}$ (см. рис.14).

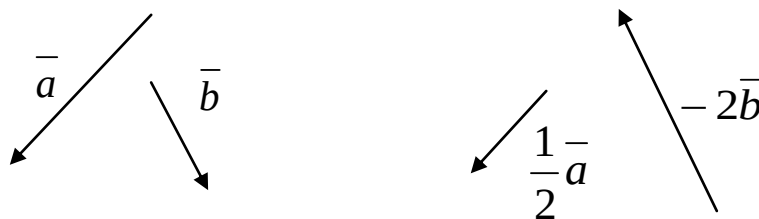


Рис. 14

Свойства умножения вектора на скаляр.

1. Умножение вектора на скаляр ассоциативно, т. е. для любых чисел λ_1 и λ_2 и любого вектора $\vec{a}$ справедливо $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a})$.

2. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно и по отношению к сложению чисел, и по отношению к сложению векторов, т.е. для любых чисел λ_1 и λ_2 и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a} \quad \text{и} \quad \lambda_1 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_1 \cdot \vec{b}.$$

3. Умножение вектора на единицу не меняет этого вектора: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

4. Для любого вектора $\vec{a}$ вектор $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Вычитание векторов определяется как действие, обратное сложению.

Определение. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который будучи сложным вектором $\vec{b}$, дает вектор $\vec{a}$, т.е. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Способы построения разности векторов

I способ: Чтобы построить разность двух векторов, выходящих из общего начала, достаточно соединить конец вектора вычитаемого с концом вектора уменьшаемого (рис.15).

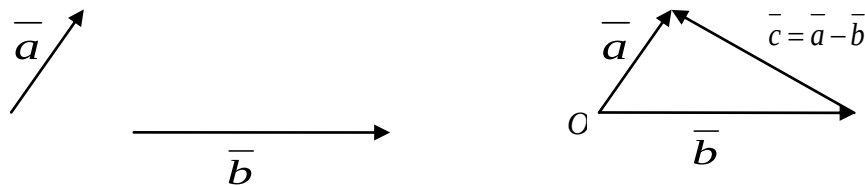


Рис. 15

II способ: Чтобы построить разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор, противоположный вектору $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{рис. 16}).$$

С учётом вышесказанного, II способ можно использовать для нахождения линейной комбинации любого числа векторов, используя правила сложения. На рисунке 16 построен вектор $\vec{r}$, который является линейной комбинацией векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{r} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 0,5\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + (-\frac{1}{2}\vec{c})$

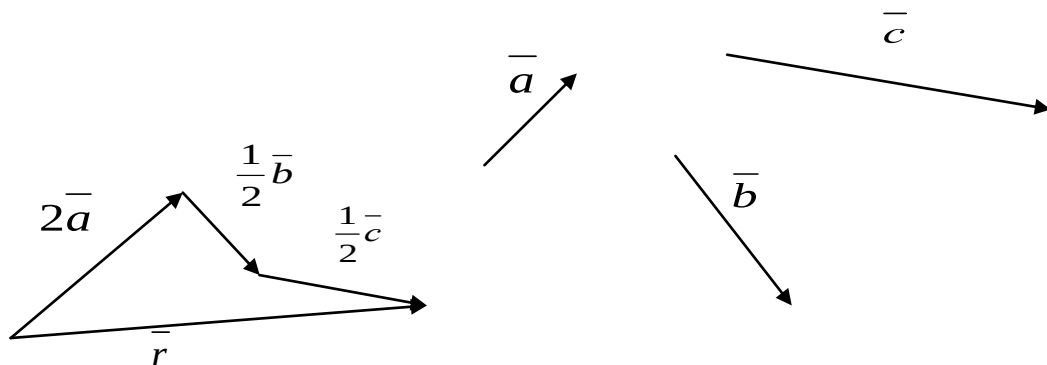


Рис. 16

Из определения суммы и произведения вектора на скаляр следует:

Следствие 1. Любой ненулевой вектор можно выразить через свой орт:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^{\circ} \text{ и наоборот } \vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Следствие 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и коллинеарные, то один из них всегда можно выразить через другой, т.е. всегда найдутся такие числа $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, что $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$ и $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$. Докажем это.

Дано:

Доказать: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$ или $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$.

Доказательство:

Используя *следствие 1* представим вектор $\vec{a}$ через его орт: $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^{\circ}$. По условию векторы коллинеарные: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, поэтому их орты либо равны, либо противоположны, т.е. $\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow \vec{b} \\ \vec{a} \downarrow \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}^{\circ} = \pm \vec{b}^{\circ}$. Тогда $\vec{a} = \pm |\vec{a}| \vec{b}^{\circ}$. С другой стороны,

$\vec{b}^{\circ} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, поэтому $\vec{a} = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ или $\vec{a} = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$, тогда $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$, где $\lambda_1 = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Аналогично доказывается и равенство $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$.

Справедливость обратного утверждения (если $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$ или $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$, то векторы коллинеарны) следует из определения произведения вектора на скаляр.

Все это позволяет равенства $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}$ и $\vec{b} = \lambda_2 \vec{a}$ считать признаком коллинеарности векторов.

Определение. Если ненулевой вектор $\vec{R} \neq 0$ можно представить в виде $\vec{R} = m\vec{a} + n\vec{b}$, $m, n \neq 0$, одновременно и $\vec{R}$ компланарен двум неколлинеарным векторам $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$, то говорят, что вектор $\vec{R}$ разложим по двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Следствие 3. Любой ненулевой вектор $\vec{R} \neq 0$ на плоскости единственным образом можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем это.

Поместим начала всех трех векторов в одну точку O плоскости и через конец M вектора $\vec{R}$ проведем прямую MA , параллельную вектору $\vec{b}$ до пересечения с вектором $\vec{a}$ или его продолжением (рис.17). Тогда $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$, но вектор $\vec{OA}$ коллинеарен $\vec{a}$, поэтому $\vec{OA} = m\vec{a}$, вектор $\vec{AM}$ коллинеарен $\vec{b}$, поэтому $\vec{AM} = n\vec{b}$.

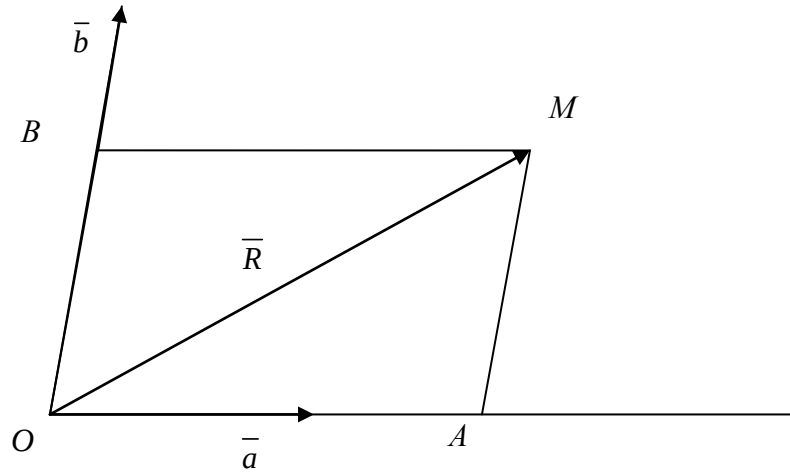


Рис. 17

Покажем теперь единственность полученного разложения. Положим, что существует еще одно разложение вектора $\bar{R}$ по тем же векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{R} = m_1 \bar{a} + n_1 \bar{b}$. Составим разность разложений $\bar{O} = (m - m_1) \bar{a} + (n - n_1) \bar{b}$.

Если обе скобки будут отличны от нуля, то каждый из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, может быть выражен через другой:

$$\bar{a} = -\frac{n - n_1}{m - m_1} \bar{b}, \quad \bar{b} = -\frac{m - m_1}{n - n_1} \bar{a}.$$

Последнее означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Полученное противоречие и доказывает единственность разложения.

Следствие 4. Любой ненулевой вектор $\bar{R} \neq 0$ в пространстве единственным образом можно разложить по трём некомпланарным векторам в виде $\bar{R} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$, где $m, n, p \neq 0$.

Доказательство.

Поместим начала всех четырех векторов в одну точку O и проведем через конец M вектора $\bar{R}$ прямую MD , параллельную вектору $\bar{c}$ до пересечения с плоскостью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис.18)

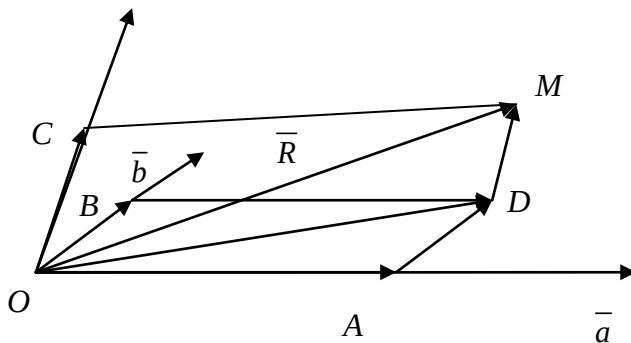


Рис. 18

Тогда $\overline{OM} = \overline{OD} + \overline{DM}$, но вектор $\overline{OD}$ компланарен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, поэтому может быть единственным образом разложен по этим векторам: $\overline{OD} = m\bar{a} + n\bar{b}$. Вектор $\overline{DM}$ коллинеарен $\bar{c}$, поэтому $\overline{DM} = p\bar{c}$. В связи с этим $\bar{R} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$. Единственность полученного разложения доказывается аналогично предыдущему.

1.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис.19). Найти векторы:

- 1) $\bar{c} = \frac{1}{4}\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{d} = \bar{a} - 2\bar{b}$, используя правило параллелограмма

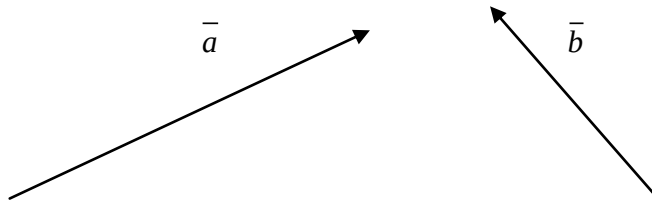


Рис. 19

Решение.

1) Относим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к общему началу, точке O (рис.20). Отметив четверть вектора $\bar{a}$, строим на векторах $\frac{1}{4}\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллелограмм. Тогда вектор, выходящий из точки O , совпадающий с диагональю этого параллелограмма, и есть искомый вектор $\bar{c}$.

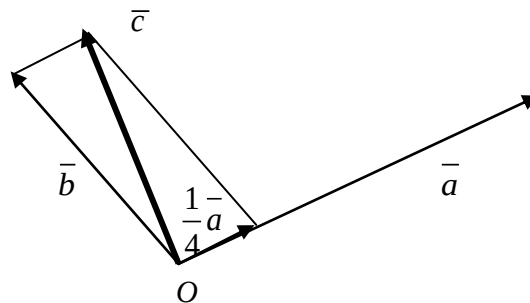


Рис. 20

- 2) Строим вектор, противоположный вектору $\bar{b}$, т.е. $-\bar{b}$ и на его направлении откладываем две длины, получаем вектор $-2\bar{b}$.

На векторах $\vec{a}$ и $-\vec{2b}$ строим параллелограмм. Вектор, исходящий из точки O и совпадающий с диагональю этого параллелограмма и будет искомым вектор $\vec{d}$ (рис. 21).

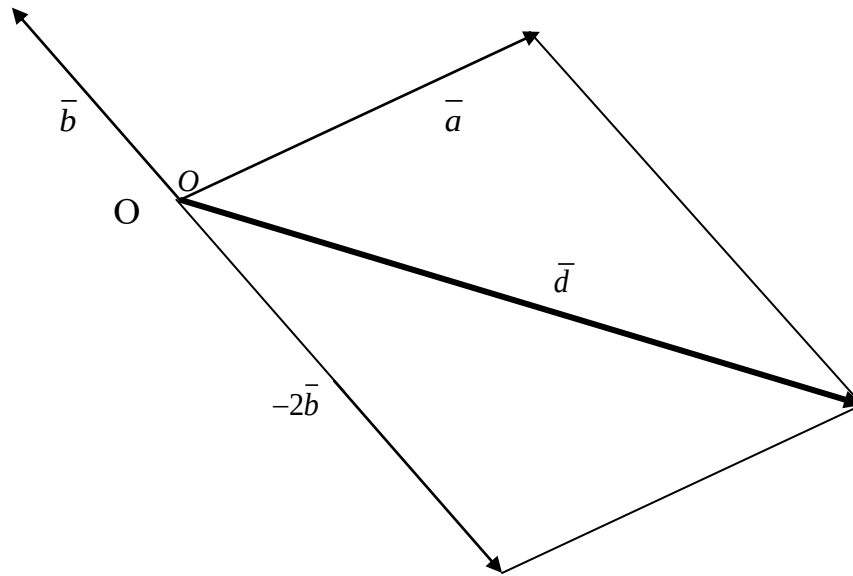


Рис. 21

№ 2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

Решение.

Отнесем произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу, точке O , и построим на них параллелограмм $OACB$ (рис.22). Тогда $|\vec{a} + \vec{b}|$ есть длина диагонали OC , $|\vec{a} - \vec{b}|$ – длина диагонали BA .

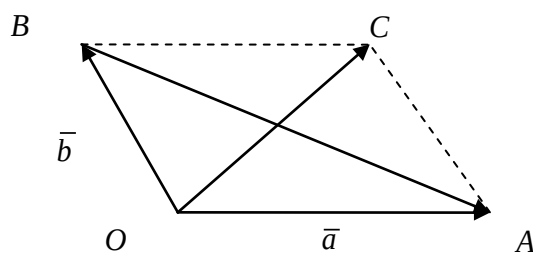


Рис. 22

Но диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда параллелограмм есть прямоугольник (или квадрат), поэтому $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

№ 3 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$ (рис. 23). Найти вектор $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} + \vec{f}$.

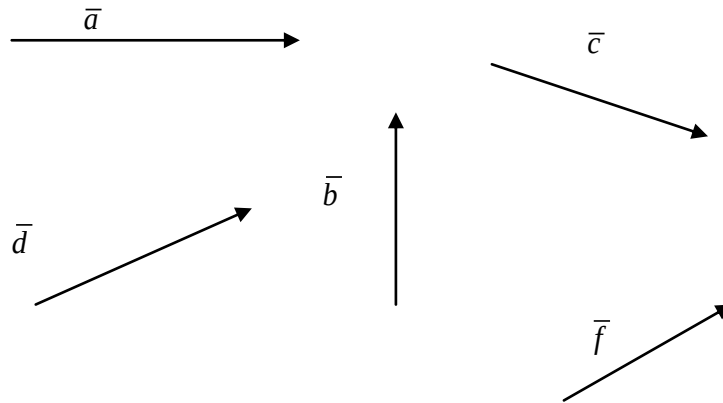


Рис. 23

Решение.

Помещаем начало вектора $\vec{a}$ в произвольную точку O (рис. 24).

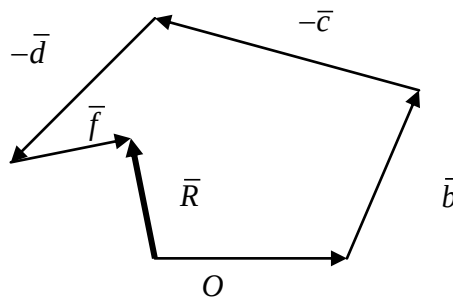


Рис. 24

К концу вектора $\vec{a}$ прикладываем начало вектора $\vec{b}$, в конце вектора $\vec{b}$ помещаем начало вектора $-\vec{c}$ (противоположного $\vec{c}$), к концу вектора $-\vec{c}$ прикладываем начало вектора $-\vec{d}$ (противоположного $\vec{d}$), в конце вектора $-\vec{d}$ помещаем начало вектора $\vec{f}$. Вектор $\vec{R}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{f}$ и будет искомым.

№ 4. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ проверить справедливость тождества: $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$.

Решение.

Берем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и строим на них параллелограмм $ABCD$ (рис. 25), в котором $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

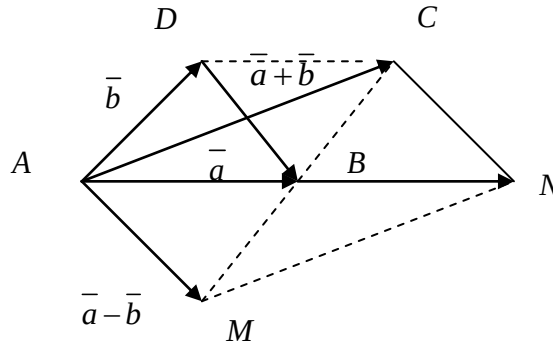


Рис. 25

По правилу параллелограмма строим сумму векторов $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{b}$, тогда $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = \overrightarrow{AN}$.

А так как точка B – точка пересечения диагоналей параллелограмма $AMNC$, то $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$.

Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$.

№ 5 Точка O является центром тяжести треугольника ABC . Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Доказательство.

По условию точка O – точка пересечения медиан данного треугольника (рис. 26).

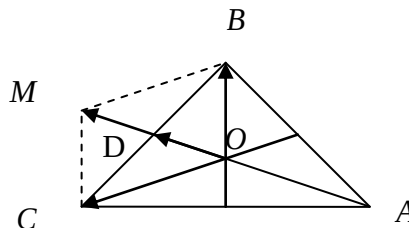


Рис. 26

Сложим векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$ по правилу параллелограмма:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} \quad (1.1).$$

Точка D – точка пересечения диагоналей в параллелограмме $OBMC$, поэтому $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OD}$ (1.2).

Учитывая свойство медиан треугольника имеем: $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{OD}|$, откуда $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OD}$. В связи с этим, см.(1.2) $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OM}$ или $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ (1.3).

Подставим в равенство (1.3) выражение из (1.1), тогда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

№ 6 Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол между ними, равный 120° . Построить вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b}$ и определить его длину, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$

Решение.

Отнесем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к общему началу – точке O (рис. 27).

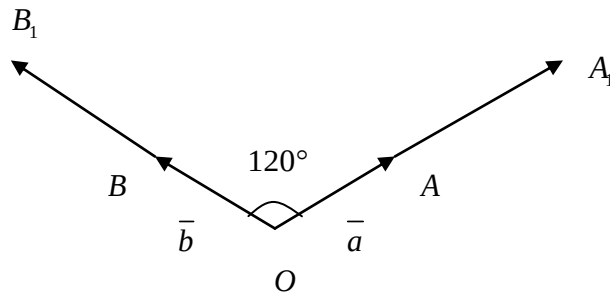


Рис. 27

Пусть $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$. Построим векторы $\overline{OA_1} = 2\overline{OA} = 2\bar{a}$ и $\overline{OB_1} = 1.5\overline{OB} = 1.5\bar{b}$. Очевидно, что $|\overline{OA_1}| = 2 \cdot 3 = 6$; $|\overline{OB_1}| = 1.5 \cdot 4 = 6$. Строим разности $\overline{BA_1} = 2\bar{a} - 1.5\bar{b}$.

Найдем его длину по теореме косинусов

$$|\overline{BA_1}|^2 = |\overline{OA_1}|^2 + |\overline{OB_1}|^2 - 2|\overline{OA_1}| \cdot |\overline{OB_1}| \cdot \cos 120^\circ, \text{ поэтому}$$

$$|\overline{BA_1}|^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 108. \text{ Отсюда } |\overline{BA_1}| = |2\bar{a} - 1.5\bar{b}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

№ 7. Даны три компланарных единичных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, причем $(\bar{a}; \wedge \bar{b}) = 30^\circ$, $(\bar{b}; \wedge \bar{c}) = 60^\circ$. Построить вектор $\bar{R} = \bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c}$ и найти его длину.

Решение.

Отнесем векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ к общему началу, точке O (рис. 28), тогда: $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$, при этом $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1$.

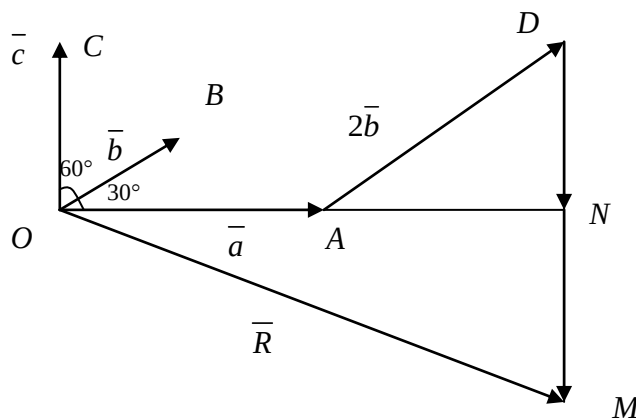


Рис. 28

Строим векторы $\overline{AD} = 2\vec{b}$ и $\overline{DM} = -3\vec{c}$, у которых $\overline{AD} = 2$, $\overline{DM} = 3$. Соединим начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $-3\vec{c}$, получим вектор $\overline{OM} = \vec{R} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Найдем его длину: $|\vec{R}|^2 = |\overline{OM}|^2 = |\overline{ON}|^2 + |\overline{MN}|^2$, $|\overline{ON}| = |\overline{OA}| + |\overline{AN}| = 1 + |\overline{AN}|$, а так как $|\overline{AN}| = |\overline{AD}| \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, то $|\overline{ON}| = 1 + \sqrt{3}$; $|\overline{MN}| = |\overline{DM}| - |\overline{DN}|$, но $|\overline{DN}| = 1$, (половина длины гипотенузы AD), а, следовательно, $|\overline{MN}| = 3 - 1 = 2$. В связи с этим

$$|\vec{R}|^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 4 = 8 + 2\sqrt{3}, \text{ откуда } |\vec{R}| = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}} \approx 3.39.$$

№ 8. В равнобедренной трапеции $OACB$ (рис. 29) величина угла BOA равна 60° , $|\overline{OB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}| = 2$, точки M и N – середины сторон BC и AC . Выразить векторы:

1) $\overline{AC}$; 2) $|\overline{OM}|$; 3) $\overline{ON}$; 4) $\overline{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

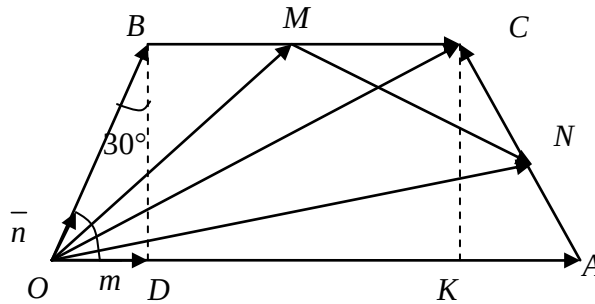


Рис. 29

Решение.

1) $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ (1.4). Но $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = |\overline{OB}|\vec{n} + |\overline{BC}|\vec{m} = 2\vec{n} + 2\vec{m}$;

$\overline{OA} = |\overline{OA}|\vec{m}$ найдем $|\overline{OA}| = 2|\overline{OD}| + |\overline{DK}|$; $|\overline{DK}| = 2$; $|\overline{OD}| = 1$ (половина гипотенузы OB), поэтому $|\overline{OA}| = 2 + 2 = 4$, но тогда $|\overline{OA}| = 4\vec{m}$.

Подставим выражения векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OA}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ в равенство (1.4):

$$\overline{AC} = 2\vec{n} + 2\vec{m} - 4\vec{m} = 2\vec{n} - 2\vec{m}$$

$$2) \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{BM} = |\overline{OB}|\vec{n} + |\overline{BM}|\vec{m} = 2\vec{n} + \vec{m}.$$

$$3) \overline{ON} = \overline{AN} + \overline{OA} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Но из пункта 1) $\overline{OA} = 4\vec{m}$, $\overline{AC} = 2\vec{n} - 2\vec{m}$, поэтому $\overline{ON} = 4\vec{m} + \vec{n} - \vec{m} = 3\vec{m} + \vec{n}$.

$$4) \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = 3\vec{m} + \vec{n} - (2\vec{n} + \vec{m}) = 2\vec{m} - \vec{n}.$$

№ 9 Даны $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Решение.

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $OACB$ (рис. 30).

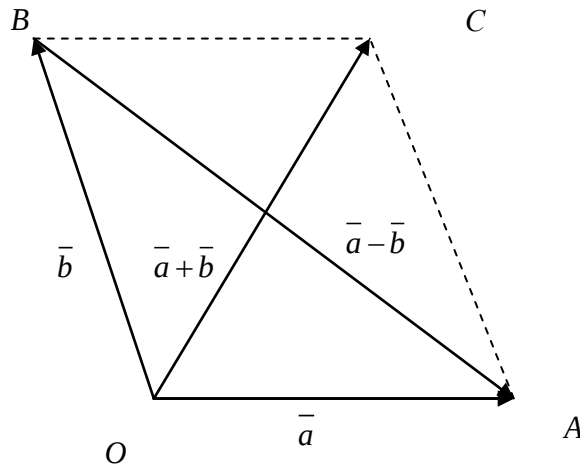


Рис. 30

Вектор $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. Найдем $|\vec{OC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, поэтому $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$, откуда $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$, следовательно, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot 121 + 2 \cdot 529 - 900 = 400$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.

№ 10. Даны векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Вектор $\vec{OC} = \vec{c}$ совпадает с медианой треугольника OAB (рис. 31). Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ аналитически и геометрически.

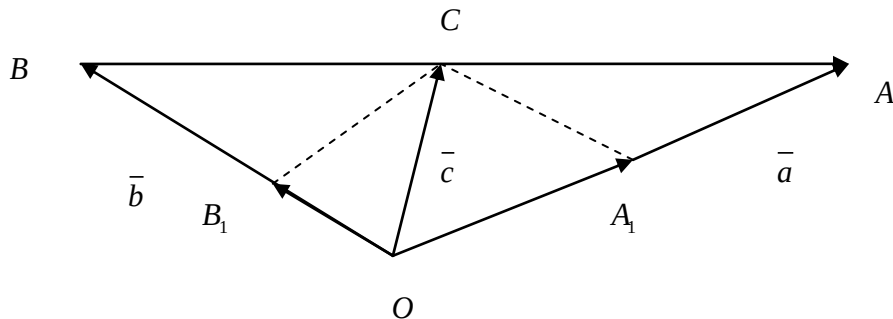


Рис. 31

Решение.

Аналитическое. По определению суммы векторов $\vec{c} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{BC}$.
Найдем $\vec{BC}$. Вектор $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, поэтому $\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. В связи с этим,
$$\vec{c} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Геометрическое. Из конца вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные сторонам OA и OB , получим параллелограмм $OACB$, откуда $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB_1}$. Но согласно теореме Фалеса $|\vec{OA_1}| = \frac{1}{2}|\vec{OA}|$, $|\vec{OB_1}| = \frac{1}{2}|\vec{OB}|$. Поэтому $\vec{OA_1} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $|\vec{OB_1}| = \frac{1}{2}|\vec{OB}| = \frac{1}{2}|\vec{b}|$, следовательно $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

№ 11. Даны три некопланарных вектора: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и четвертый вектор $\vec{d}$ (рис. 32).

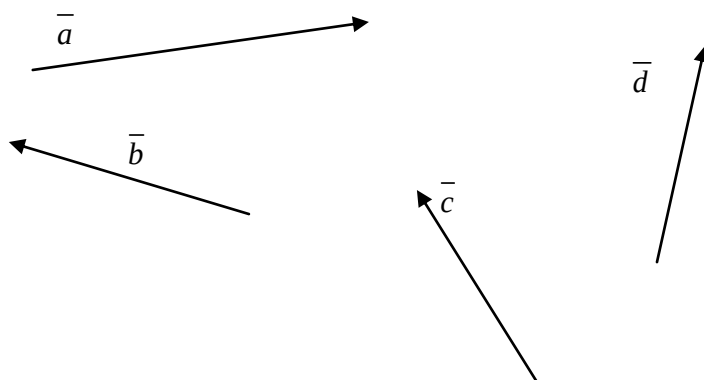


Рис. 32

Разложить геометрически вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Отнесем все четыре вектора к общему началу, точке O , (рис. 33), тогда $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$.

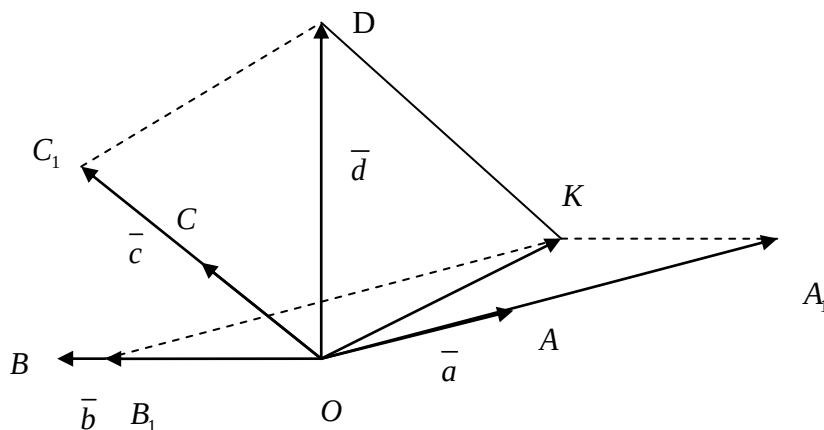


Рис. 33

Из конца вектора $\vec{d}$ проведем прямую DK параллельную вектору $\vec{c}$ до пересечения с плоскостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\vec{d} = \vec{OK} + \vec{KD} = \vec{OK} + \vec{OC}_1$. Вектор $\vec{OK}$ разложим по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. геометрическое решение предыдущей задачи). Имеем $\vec{OK} = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1$. В связи с этим $\vec{d} = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1$, но $\vec{OA}_1 \uparrow\uparrow \vec{OA}$, $\vec{OB}_1 \uparrow\uparrow \vec{OB}$, $\vec{OC}_1 \uparrow\uparrow \vec{OC}$, поэтому $\vec{OA}_1 = m\vec{OA} = m\vec{a}$, $\vec{OB}_1 = n\vec{OB} = n\vec{b}$, $\vec{OC} = p\vec{OC} = p\vec{c}$,

$$m = \frac{|\vec{OA}_1|}{|\vec{OA}|}, \quad n = \frac{|\vec{OB}_1|}{|\vec{OB}|}, \quad p = \frac{|\vec{OC}_1|}{|\vec{OC}|}.$$

Следовательно, $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

№ 12. К двум тросам подвешен груз весом 30 Н (рис. 34). Определить, силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120^\circ$.

Решение.

Обозначим силы, возникающие в тросах через $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Очевидно, что $(-\vec{F}_1) + (-\vec{F}_2) = \vec{p}$. Найдем $|\vec{F}_1| = |-\vec{F}_1|$ и $|\vec{F}_2| = |-\vec{F}_2|$. Для этого разложим вектор $\vec{p}$ по направлению векторов $\vec{CB}$ и $\vec{CA}$.

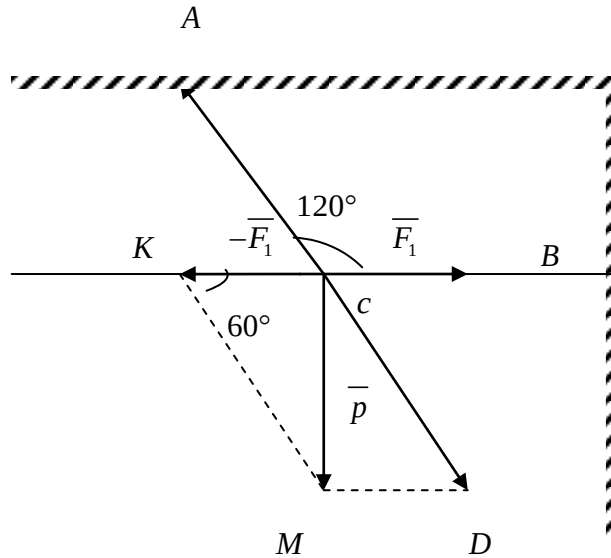


Рис. 34

В результате имеем $|\vec{CK}| = |-\vec{F}_1| = |\vec{F}_1|$; $|\vec{CD}| = |-\vec{F}_2| = |\vec{F}_2|$. Но из $\triangle CMK$: $|\vec{CK}| = |\vec{CM}| \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$, поэтому $|\vec{F}_1| = |\vec{p}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$ (Н).

Из $\triangle MDC$ $|\vec{CD}| = \frac{|\vec{CM}|}{\cos 30^\circ}$, поэтому $|\vec{F}_2| = 30 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ (Н).

1.3. Задачи и примеры для самостоятельного решения

№ 13. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 35).



Рис. 35

Построить векторы $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{d} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{l} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

№ 14. Какому условию удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен по биссектрисе угла между ними?

№ 15. Какому условию, удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ 2) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$?

№16. Даны три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 36).

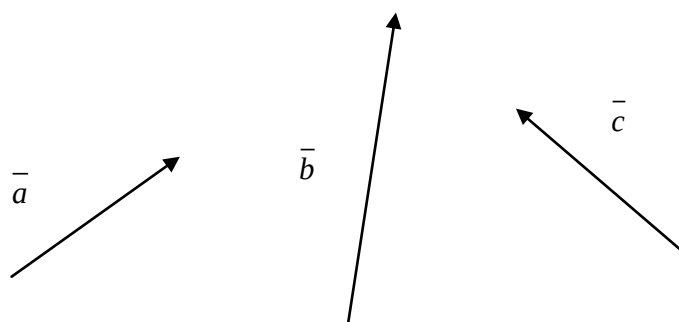


Рис. 36

Найти их сумму, пользуясь правилом параллелепипеда.

№ 17. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ (рис. 37).

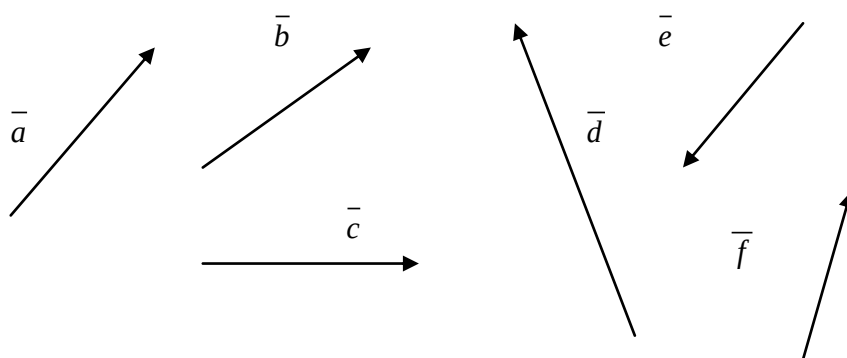


Рис. 37

Найти вектор $\vec{R} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} - \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{f} - 2\vec{e}$.

№ 18. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей. E и F – соответственно, середины параллельных сторон BC и AD . Построить следующие векторы.

1. $\vec{AB} + \vec{DC}$.
2. $\vec{AE} + \vec{DF}$.
3. $\vec{BC} - \vec{AB}$.
4. $\vec{OC} + \vec{CD} + \vec{OB}$.
5. $\vec{FD} + \vec{FA} + \vec{FO}$.
6. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{OF} - \vec{OE}$.

№ 19. Пусть $ABCD$ правильный шестиугольник O – его центр. Полагая, $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$, выразить $\vec{OC}$, $\vec{OD}$, $\vec{OE}$, $\vec{OF}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{ED}$, $\vec{EC}$, $\vec{CA}$, $\vec{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№ 20. В треугольной пирамиде $SABC$ даны векторы $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$. Найти вектор $\vec{SM}$, где M – центр тяжести основания ABC .

№ 21. Даны три компланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, причем $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, $(\vec{a}; \wedge \vec{b}) = 90^\circ$, $(\vec{b}; \wedge \vec{c}) = 45^\circ$.

Построить вектор $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и найти его длину

№ 22. На трех некопланарных векторах $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$ построен параллелепипед. Указать те его вектор-диагонали, которые соответственно равны: $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

№ 23. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\vec{OA}, \vec{AC}, \vec{CB}, \vec{BO}, \vec{OC}, \vec{BA}$, если $|\vec{OA}| = 3$, $|\vec{OB}| = 4$.

№ 24. В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\vec{AC} = \vec{a}$ и $\vec{BD} = \vec{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$.

№ 25. Три вектора $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$ служат сторонам треугольника ABC . С помощью векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника $\vec{AM}, \vec{BN}, \vec{CD}$ и отрезком $\vec{DA}$.

№ 26. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ проверить справедливость тождества $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$.

№ 27. В прямоугольнике $OACB$ точки M и N – соответственно середины сторон BC и AB . Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{OC} = \vec{c}$ по векторам $\vec{OM} = \vec{a}$ и $\vec{ON} = \vec{b}$.

№ 28. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $|\vec{OA}| = 3$. Обозначив единичные векторы направлений $\vec{OA}, \vec{AB}, \vec{BC}$ через $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, установить зависимость между ними. Выразить через $\vec{m}, \vec{n}$ векторы $\vec{OB}, \vec{EO}, \vec{BC}, \vec{OD}, \vec{DA}$.

№ 29. Дано: $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№ 30. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}| = 12$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№ 31. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол φ , равный 60° , при этом $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№ 32. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60° , при этом $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2.5$. Построить вектор $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ и определить его длину.

№ 33. В равнобоковой трапеции $ABCD$ известны нижнее основание $\overline{AB} = \vec{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \vec{d}$ и угол между ними $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ все векторы, составляющие остальные диагонали трапеции.

№ 34. К одной и той же точке приложены две силы P и Q действующие под углом 120° , причем $|\vec{P}| = 7$ Н и $|\vec{Q}| = 4$ Н. Найти величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

№ 35. Доказать, что для любых заданных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

№ 36. Даны три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны.

№ 37. Груз весом 60 Н поддерживается двумя стержнями AB и CB (рис. 38).

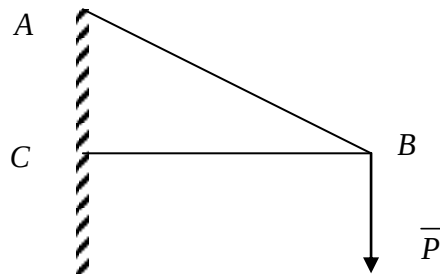


Рис. 38

Определить силы, возникающие в стержнях, если $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$.

№ 38. Даны три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 39) и вектор $\vec{d}$. Разложить геометрически вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

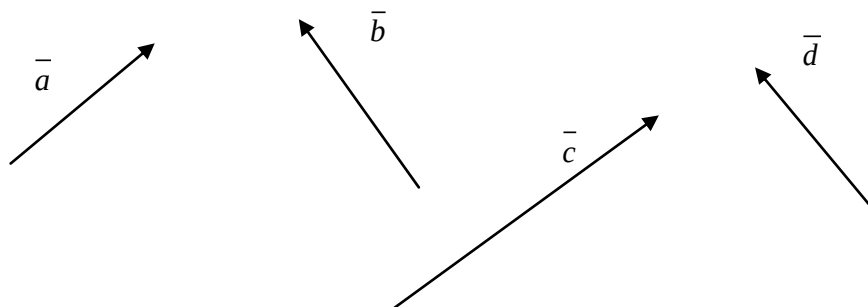


Рис. 39

1.4. Ответы

№ 14. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

№ 15. 1) Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый. 2) Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой.

№ 18. 1) $2\vec{AB}$ (или) $2\vec{CD}$;

2) $\vec{AB}$;

3) $\vec{BO}$;

4) $\vec{O}$;

5) $\vec{EO}$;

6) $\vec{AF}$.

№ 19. $\vec{OC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{OD} = -\vec{a}$, $\vec{EO} = -\vec{b}$, $\vec{OF} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{AB} = -\vec{a}$, $\vec{ED} = \vec{b} - \vec{a}$,
 $\vec{EC} = 2\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{DA} = 2\vec{a}$.

№ 20. $\vec{SM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

№ 21. $|\vec{R}| = \sqrt{17} \approx 4.12$.

№ 23. $\vec{OC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{BA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{OA} = 3\vec{i}$, $\vec{AC} = 4\vec{j}$, $\vec{CB} = -3\vec{i}$, $\vec{BO} = -4\vec{j}$.

№ 24. $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{DA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

№ 25. $\vec{AM} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{c}$ или $\vec{AM} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$, $\vec{BN} = \frac{\vec{b}}{2} + \vec{a}$ или $\vec{BN} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2}$, $\vec{CD} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$ или
 $\vec{CD} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$.

№ 27. $\vec{c} = \frac{2}{3}(2\vec{a} - \vec{b})$.

№ 28. $\vec{m} + \vec{p} = \vec{n}$, $\vec{OB} = 3(\vec{m} + \vec{n})$, $\vec{BC} = 3(\vec{n} - \vec{m})$, $\vec{EO} = 3(\vec{m} - \vec{n})$, $\vec{OD} = 3(2\vec{n} - \vec{m})$,
 $\vec{DA} = 6(\vec{m} - \vec{n})$.

№ 29. $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$.

№ 30. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$.

№ 31. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11.4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

№ 32. $|\vec{c}| = \sqrt{119} \approx 4.36$.

№ 33. $\overline{BC} = -\frac{b}{a}\vec{a} + \vec{b}$, $\overline{CD} = \frac{b-a}{a}\vec{a}$, $\overline{AC} = \frac{a-b}{a}\vec{a}$, $\overline{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

№ 34. $|\vec{R}| = \sqrt{37} \approx 6.08$ (Н).

№ 37. На стержень AB действует растягивающая сила в 120 Н, а на стержень BC – сжимающая сила в $60\sqrt{3}$ Н.

§2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТАМ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

2.1. Основные вопросы теории

2.1.1. Проекция вектора на ось

Определение. Проекцией точки M на ось OL называется точка M' пересечения оси с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси (рис.40).

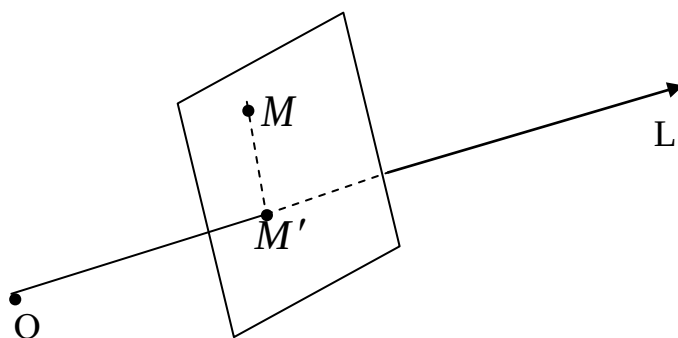


Рис. 40

Рассмотрим ось OL , векторы $\overline{AB} \neq 0$ и $\overline{CD} \neq 0$.

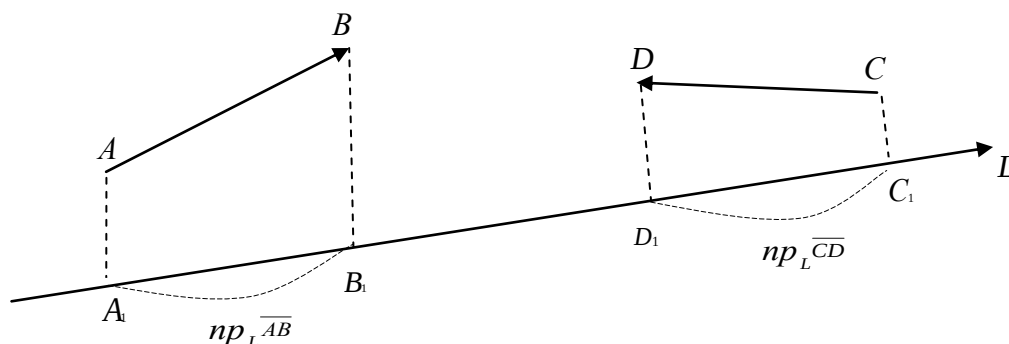


Рис. 41

Определение. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось OL называется длина отрезка A_1B_1 оси, соединяющего проекции начала и конца вектора, взятая со

знаком плюс, если отрезок оси A_1B_1 сонаправлен с осью и со знаком минус, если противоположно направлен.

Проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось OL будем обозначать: $np_L \overline{AB}$ (рис. 41).

$$np_L \overline{AB} = |A_1B_1|, \quad np_L \overline{CD} = -|C_1D_1|.$$

Проекция вектора на ось есть число со знаком.

Совместим начало вектора $\overline{AB}$ с любой точкой оси OL , получим вектор $\overline{A'B'}$, равный данному (рис. 42).

Определение. Углом между вектором $\overline{AB}$ и осью OL называется величина φ наименьшего угла, на который нужно повернуть луч $A'L$ до совмещения с вектором $\overline{A'B'}$, равный данному $\overline{AB}$. Очевидно, что $0 < \varphi \leq \pi$.

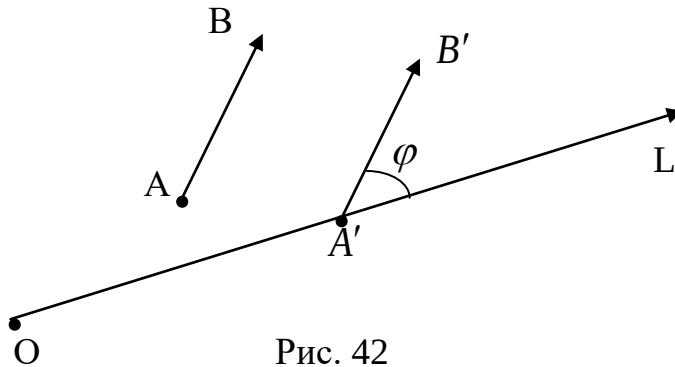


Рис. 42

Теорема 1: Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью.

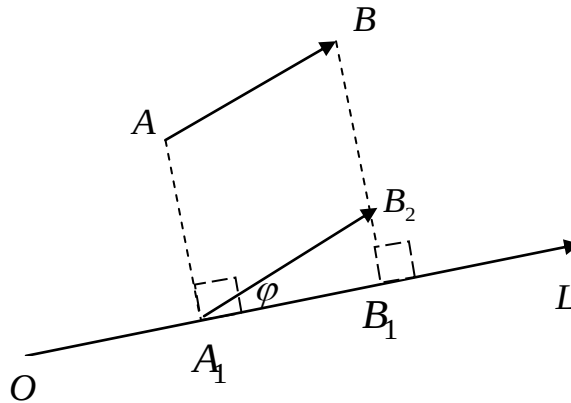


Рис. 43

Доказательство. Пусть $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим рисунок 43.

$$\text{Из } \triangle A_1B_1B_2 : \angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow np_{OL} \overline{AB} = |A_1B_1| = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$$

Пусть $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$. Рисунок 44.

Из $np_{OL} \overline{AB} = -|A_1B_1|$. Из $\triangle A_1B_1A_2 : \angle A_1 = 90^\circ \Rightarrow |A_1B_1| = |\overline{AB}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -|\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$

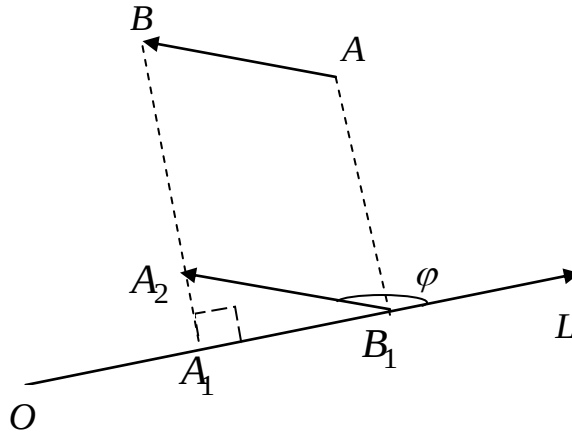


Рис. 44

Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Рисунок 45.

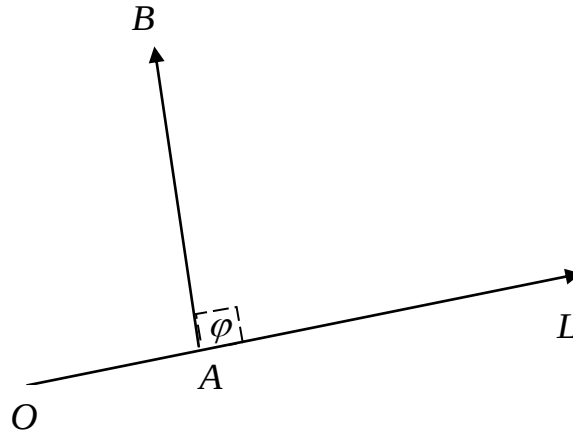


Рис. 45

Здесь $np_{OL} \overline{AB} = 0$, но $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, следовательно, и здесь справедливо

$$np_{OL} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi.$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 2: Проекция от произведения векторов на число равна произведению проекции вектора на это число.

В символьной форме можно записать следующим образом: $np_{OL}(\lambda \bar{a}) = \lambda \cdot np_{OL} \bar{a}$.

Доказательство.

$$\text{При } \lambda > 0 \quad np_{OL}(\lambda \bar{a}) = |\lambda \bar{a}| \cos \varphi = \lambda |\bar{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot np_{OL} \bar{a}.$$

При $\lambda < 0$

$$np_{OL}(\lambda \bar{a}) = |\lambda \bar{a}| \cos(\pi - \varphi) = -|\lambda \bar{a}| \cos \varphi = -|\lambda| |\bar{a}| \cos \varphi = \lambda |\bar{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot np_{OL} \bar{a}.$$

$$\text{При } \lambda = 0 \quad np_{OL}(\lambda \bar{a}) = \lambda \cdot np_{OL} \bar{a} \Rightarrow np_{OL}(0 \bar{a}) = 0 \cdot np_{OL} \bar{a} \Rightarrow 0 = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3: Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось $np_{OL}(\bar{a} + \bar{b} + \dots + \bar{f}) = np_{OL}\bar{a} + np_{OL}\bar{b} + \dots + np_{OL}\bar{f}$.
Рисунок 46.

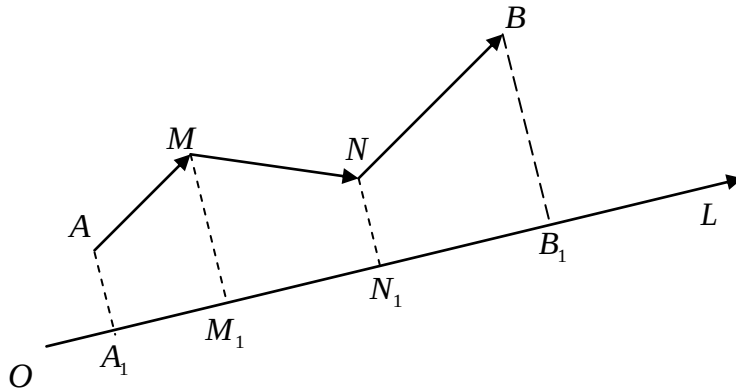


Рис.46.

2.1.2. Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим координатное пространство $OXYZ$. Выделим на координатных осях OX , OY , OZ единичные векторы (орты), обозначим их $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно.

Поместим в это координатное пространство вектор $\bar{a}$, совместив его начало с началом координат $\bar{a} = \overline{OM}$. Найдём проекции вектора $\overline{OM}$ на координатные оси, для чего через конец вектора точку M , проведём плоскости перпендикулярные координатным осям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно M_1 , M_2 , M_3 . Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$ (рис. 47).

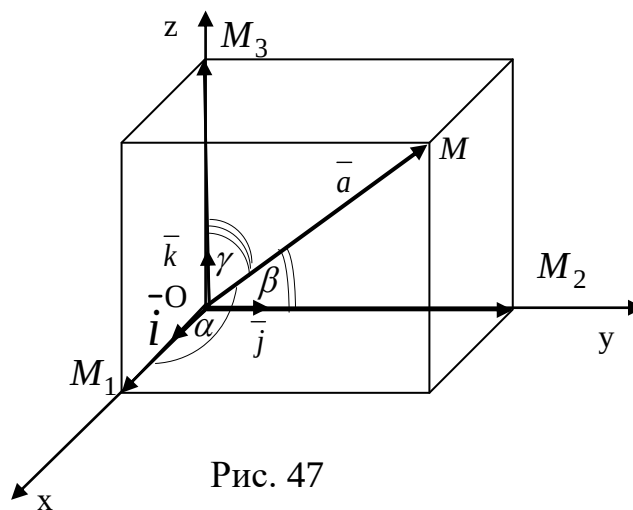


Рис. 47

Тогда $|\overline{OM_1}| = np_{ox}\bar{a}$, $|\overline{OM_2}| = np_{oy}\bar{a}$, $|\overline{OM_3}| = np_{oz}\bar{a}$

Введем три вектора $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$ и сложим их по правилу параллелепипеда, тогда $\overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} = \overline{a}$, но

$$\overline{OM_1} = \vec{i} \cdot |\overline{OM_1}|, \overline{OM_2} = \vec{j} \cdot |\overline{OM_2}|, \overline{OM_3} = \vec{k} \cdot |\overline{OM_3}|.$$

обозначим проекции $np_{ox} \overline{a} = a_x$, $np_{oy} \overline{a} = a_y$, $np_{oz} \overline{a} = a_z$. Тогда

$\overline{OM_1} = \vec{i} \cdot a_x$, $\overline{OM_2} = \vec{j} \cdot a_y$, $\overline{OM_3} = \vec{k} \cdot a_z$ и их сумма

$$\overline{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.1)$$

Формула (2.1.) – разложение вектора $\overline{a}$ по ортам координатных осей.

Здесь числа a_x, a_y, a_z являются проекциями вектора $\overline{a}$ и обозначают координаты вектора $\overline{a}$, то есть $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Векторы $a_x \vec{i}$; $a_y \vec{j}$; $a_z \vec{k}$ называются составляющими или компонентами вектора $\overline{a}$. Так как вектор $\overline{a}$ совпадает с диагональю параллелепипеда с измерениями a_x, a_y, a_z , то его длина равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т.е.

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.2)$$

(2.2.) – формула нахождения длины вектора.

Направление вектора определяются его направляющими косинусами: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, где α, β, γ – углы, образованные вектором $\overline{a}$ с соответствующими координатными осями.

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} \quad (2.3)$$

Формула (2.3.) – формула вычисления направляющих косинусов.

Обоснуем эти формулы. По теореме 1 о проекциях $a_x = |\overline{a}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}$. Остальные доказываются аналогично.

Следствие 1: Из формул (2.3.) следует, что координаты орта вектора $\overline{a}$ совпадают с его направляющими косинусами, то есть $\overline{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Следствие 2: Для любого вектора $\overline{a}$ справедливо:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2.4)$$

Формула (2.4.) – нормирующее равенство.

Вывод: С помощью координат вектора однозначно определяется его длина и направление. Значит, чтобы задать вектор в координатном пространстве достаточно задать его координаты.

2.1.3. Действия над векторами, заданными своими координатами в координатном пространстве

I. Линейные операции

Рассмотрим два вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

Учитывая, что координаты вектора это его проекции на соответствующие оси координат, и используя теоремы о проекциях, имеем:

1. Два ненулевых вектора равны тогда и только тогда, когда их соответствующие или одноимённые координаты равны, то есть

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}, \quad \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0.$$

2. Суммой (разностью) двух векторов является вектор, координаты которого равны сумме (разности) одноимённых координат данных векторов:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

3. Произведение вектора на число есть вектор, координаты которого равны координатам данного вектора, умноженным на это число:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

4. Координаты противоположных векторов противоположны, т.е. если вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то ему противоположный $-\vec{a} = (-a_x, -a_y, -a_z)$.

II. Радиус-вектор точки

В пространстве OXYZ рассмотрим точку $M(x, y, z)$.

Определение: Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ – вектор, соединяющий начало координат с точкой $M(x, y, z)$.

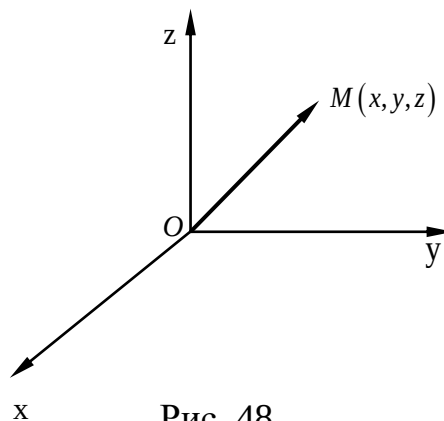


Рис. 48

Так как построение координат вектора и координат точки проходит аналогично, то координаты радиус-вектора $\vec{OM}$ и точки $M(x, y, z)$ совпадают.

Обозначение $\vec{r} = \vec{OM} = (x; y; z) \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

III. Расстояние между точками – длина вектора

В пространстве $OXYZ$ рассмотрим две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Построим соответствующие им радиус-векторы (рис. 49)

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

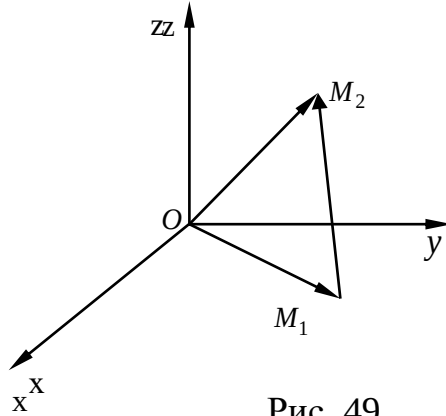


Рис. 49

Правило: Чтобы найти координаты вектора, заданного координатами начала и конца нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала.

Тогда расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ найдём как длину вектора $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

В частности, расстояние от точки $M(x, y, z)$ до начала координат имеет вид: $d = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{R} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение.

$$2\vec{a} = (2; 4; -6), \quad -\vec{b} = (0; -4; -7), \quad 3\vec{c} = (-6; -9; 15).$$

$$\text{Поэтому } \vec{R} = (2 + 0 - 6)\vec{i} - (4 - 4 - 9)\vec{j} + (-6 - 7 + 15)\vec{k} = -4\vec{i} - 9\vec{j} + 2\vec{k}.$$

№ 2. Найти длину и направление вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (0; 1; -5)$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Решение.

Найдём координаты вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = (0 + 2)\vec{i} + (1 - 3)\vec{j} + (-5 + 4)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \text{ или } \vec{c} = (2; -2; -1).$$

Зная координаты $\vec{c}$, его длину и направление, найдём по формулам (2.2) и (2.3):

$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = -\frac{1}{3}.$$

№ 3. Найти координаты точки B , которая является концом вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, если его начало совпадает с точкой $A(3; 1; -2)$.

Решение.

Т.к. у вектора $\vec{a}$ обозначены его начальная A и конечная B точки, то координаты вектора $\vec{a}$ будут:

$$a_x = x_B - x_A; a_y = y_B - y_A; a_z = z_B - z_A,$$

откуда выразим

$$x_B = x_A + a_x; y_B = y_A + a_y; z_B = z_A + a_z,$$

выполним подстановку: $x_B = 3 + 4 = 7; y_B = 1 - 3 = -2; z_B = -2 + 1 = -1$.

В итоге координаты точки B следующие: $B(7; -2; -1)$

№ 4. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OZ углы 30° и 90° соответственно. Найти его угол с осью OY .

Решение.

У любого вектора $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, где α, β и γ — углы, образованные этим вектором с осями координат. Поэтому

$$(\cos 30^\circ)^2 + \cos^2 \beta + (\cos 90^\circ)^2 = 1$$

или

$$\frac{3}{4} + \cos^2 \beta + 0 = 1,$$

откуда получим

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{4}, \cos \beta = \pm \frac{1}{2}, \beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ.$$

№ 5. Построим параллелограмм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$, определить его диагонали и угол между осью OZ и стороной OB (рис. 50).

Решение.

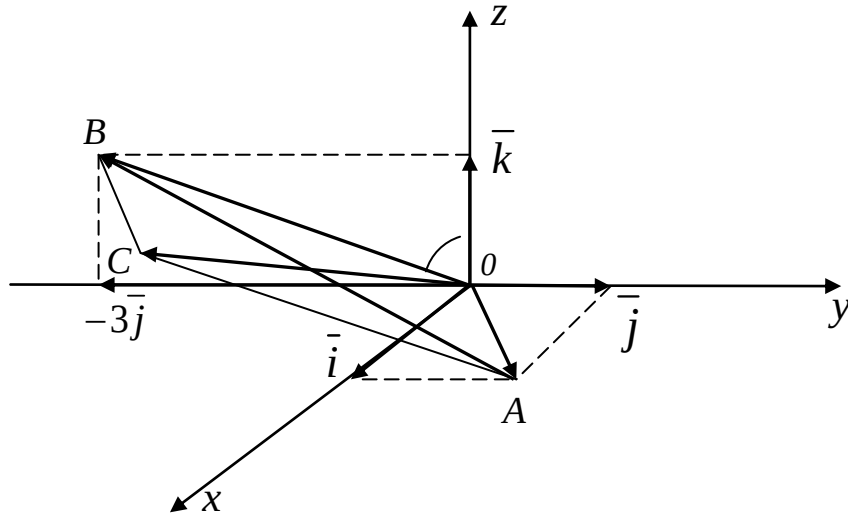


Рис. 50

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}; \quad |\overline{OC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6};$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}; \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$\cos \varphi$ есть третий направляющий косинус ($\cos \gamma$) вектора $\overline{OB}$, поэтому

$$\cos \varphi = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{0+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

в итоге получим

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71^\circ 36'.$$

№ 6. Найти орт вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k}$ и направляющие косинусы определяемого им направления.

Решение.

Орт $\bar{a}^o$ вектора $\bar{a}$ есть единичный вектор, который сонаправлен с вектором $\bar{a}$, поэтому $\bar{a}^o = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Найдем длину вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

В связи с этим

$$\bar{a}^o = \frac{3}{13}\bar{i} + \frac{4}{13}\bar{j} - \frac{12}{13}\bar{k}.$$

Как известно, координаты единичного вектора $\bar{a}^o$ являются его направляющими косинусами. Поэтому в итоге получаем:

$$\cos \alpha = \frac{3}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = -\frac{12}{13}.$$

№ 7. Векторы $\overline{AB} = (8; -3; 0)$ и $\overline{AC} = (-2; 5; 1)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Найти векторы, приложенные к вершинам треугольника и совпадающие с медианами $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CD}$.

Решение.

Чтобы найти координаты векторов $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CD}$, необходимо знать координаты начала и конца этих векторов. Поместим вершину A в начало координат (рис.51), тогда координаты вершин треугольника будут следующие: $A(0;0;0)$, $B(8;-3;0)$ и $C(-2;5;1)$.

Координаты точек M , N и D , найдем по формулам деления отрезка пополам

$$\begin{aligned}x_D &= \frac{0+8}{2} = 4; x_N = \frac{0-2}{2} = -1; x_M = \frac{8-2}{2} = 3; \\y_D &= \frac{0-3}{2} = -1,5; y_N = \frac{0+5}{2} = 2,5; y_M = \frac{-3+5}{2} = 1; \\z_D &= \frac{0-0}{2} = 0; z_N = \frac{0+1}{2} = 0,5; z_M = \frac{0+1}{2} = 0,5.\end{aligned}$$

Таким образом $D(4;-1,5;0)$, $N(-1;2,5;0,5)$ и $M(3;1;0,5)$. Следовательно, $\overline{AM} = 3\bar{i} + \bar{j} + 0,5\bar{k}$ (радиус-вектор точки M),

$$\overline{BN} = (-1-8)\bar{i} + (2,5+3)\bar{j} + (0,5-0)\bar{k} = -9\bar{i} + 5,5\bar{j} + 0,5\bar{k};$$

$$\overline{CD} = (4+2)\bar{i} + (-1,5-5)\bar{j} + (0-1)\bar{k} = 6\bar{i} - 6,5\bar{j} - \bar{k}.$$

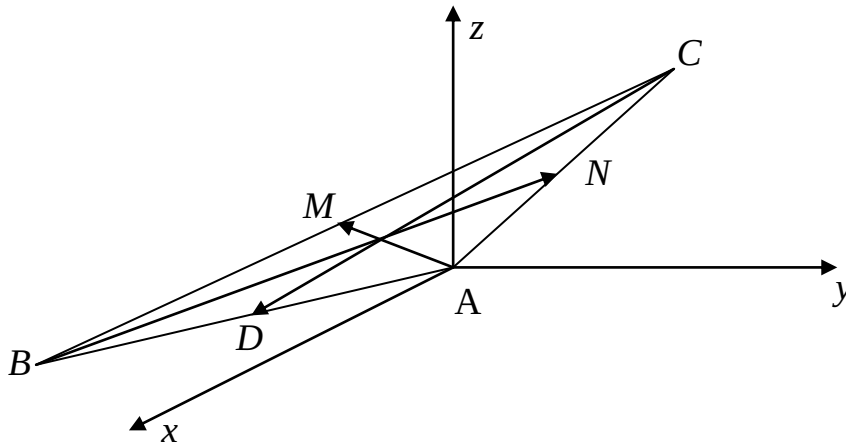


Рис. 51

№ 9. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $C(1;4;2)$, один из его концов в точке $P(-2;2;0)$. Определить координаты точки Q , другого конца стержня.

Решение.

Так как стержень однородный, то его центр тяжести находится в точке $C(1;4;2)$, делящей стержень PQ пополам (рис. 52). Поэтому точка $Q(x;y;z)$ будет лежать на продолжении прямой PC , делящей отрезок PC внешним образом так, что

$$\lambda = -\frac{|PQ|}{|QC|} = -2.$$

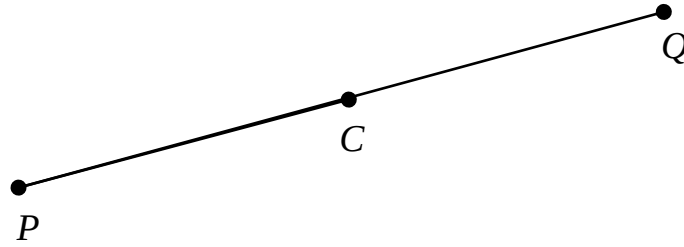


Рис. 52

Но тогда, используя формулы деления отрезка в данном отношении, будем иметь следующее

$$x = \frac{-2 + (-2) \cdot 1}{1 + (-2)} = 4; y = \frac{2 + (-2) \cdot 4}{1 + (-2)} = 6; z = \frac{0 + (-2) \cdot 2}{1 + (-2)} = 4.$$

Таким образом, второй конец стержня находится в точке $Q(4; 6; 4)$.

№ 9. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, приложенные к одной точке. Найти орт биссектрисы угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Выделим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.53) их орты, единичные векторы $\vec{a}^o$ и $\vec{b}^o$

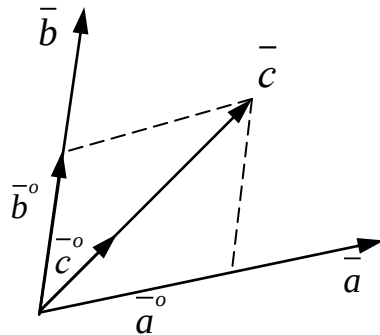


Рис. 53

соответственно, тогда вектор $\vec{c} = \vec{a}^o + \vec{b}^o$ будет направлен по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поскольку параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}^o$ и $\vec{b}^o$ является ромбом, а в ромбе диагонали делят углы при вершинах пополам. Найдем вектор $\vec{c}$. Для этого получим координаты векторов $\vec{a}^o$ и $\vec{b}^o$:

$$\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{4+9+36}}\vec{i} + \frac{-3}{\sqrt{4+9+36}}\vec{j} + \frac{6}{\sqrt{4+9+36}}\vec{k} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k};$$

$$\vec{b}^o = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{1+4+4}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{1+4+4}}\vec{j} + \frac{-2}{\sqrt{1+4+4}}\vec{k} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

В связи с этим, $\vec{c} = (\vec{a}^o + \vec{b}^o) = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{3}\right)\vec{i} + \left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\right)\vec{j} + \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right)\vec{k}$

или $\vec{c} = -\frac{1}{21}\vec{i} + \frac{5}{21}\vec{j} + \frac{4}{21}\vec{k}$.

Найдем орт биссектрисы, т.е. вектор $\vec{c}^o : \vec{c}^o = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$.

Для этого вычислим модуль вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{1}{21} \sqrt{1+25+16} = \frac{\sqrt{42}}{21}.$$

Следовательно,

$$\vec{c}^o = -\frac{1 \cdot 21}{21\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{5 \cdot 21}{21\sqrt{42}}\vec{j} + \frac{4 \cdot 21}{21\sqrt{42}}\vec{k} = -\frac{1}{\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{42}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{k}.$$

2.3. Примеры и задачи для самостоятельного решения

№ 10. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Найти длину и направление вектора $\overline{AB}$.

№ 11. В точке $A(2; 1; -1)$ приложена сила $\vec{R}$, у которой $|\vec{R}| = 7$. Зная две координаты этой силы $R_x = 2$ и $R_y = -3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

№ 12. Вектор $\overline{OM} = \vec{r}$ составляет с осями координат разные острые углы. Определить эти углы.

№ 13. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат острые углы α, β и γ , причем $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = 3$.

№ 14. Найти орт вектора $\vec{a} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

№ 15. Дан орт $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 6$.

№ 16. Даны вершины треугольника $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, -5)$ и $C(2, 4, 2)$. Найти орт медианы $\overline{BM}$.

№ 17. Найти длину и направление вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 5\vec{n} + \vec{p}$, если $\vec{m} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

№ 18. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти направление вектора, противоположного вектору $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

№ 19. Зная одну из вершин треугольника $A(1, -6, 3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\overline{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Найти остальные вершины и вектор $\overline{CA}$.

№ 20. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(6, 4, 4)$. Найти его четвертую вершину D .

№ 21. Даны три вершины параллелограмма $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$. Найти вершину D , длину и направление вектора $\overline{BD}$.

№ 22. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти орты его диагоналей.

№ 23. Векторы $\vec{a} = (2, -1, -2)$ и $\vec{b} = (-3, -2, 6)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{c}| = 5\sqrt{42}$.

№ 24. Три силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину равнодействующей $\vec{R}$, если известно, что $|\vec{F}_1| = 2\text{ Н}$, $|\vec{F}_2| = 10\text{ Н}$ и $|\vec{F}_3| = 11\text{ Н}$.

№ 25. К вершине треножника подвешен груз весом 20 Н . Найти силы, возникающие в ножках треножника, если ножки треножника взаимно перпендикулярны, а веревка, поддерживающая груз, составляет с двумя ножками углы, равные 60° .

№ 26. На оси абсцисс найти точку M , расстояние которой от точки $A(3, -3)$ равно 5.

№ 27. На оси ординат найти точку M , равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

№ 28. Даны вершины треугольника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$, $C(-4, 0, 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A .

№ 29. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$ и $B(6, 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точки деления.

№ 30. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

№ 31. Даны вершины треугольника $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ и $C(-5, 2, -6)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .

№ 32. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

№ 33. Даны вершины треугольника $A(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 2)$ и $C(5, 4, 6)$. Точка L делит отрезок AC в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$, CE - медиана, проведенная из вершины C . Найти координаты точки M пересечения прямых BL и CE .

№ 34. Радиус-вектор точки M составляет с осью OX угол 45° , с осью OY - 60° . Его длина $|\vec{r}| = 6$. Определить координаты точки M , зная, что ее третья координата отрицательная.

№ 35. Может ли вектор составлять с осями координат следующие углы: 1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

№ 36. Вектор составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 120^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$. Какой угол он составляет с осью OY ?

2.4. Ответы

№ 10. $|\vec{AB}| = 7$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = -\frac{6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{3}{7}$.

№ 11. Конец: $B(4, -2, 5)$ и $D(4, -2, -7)$; $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = -\frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \pm \frac{6}{7}$.

№ 12. $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

№ 13. $\vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$.

№ 14. $\vec{a} = -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{3}{7}\vec{k}$.

№ 15. $\vec{a} = (3; -3; 3\sqrt{2})$.

№ 16. $\overline{BM} = \vec{k}$.

№ 17. $|\vec{a}| = \sqrt{170}$, $\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{170}}$, $\cos \beta = \frac{8}{\sqrt{170}}$, $\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{170}}$.

№ 18. $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

№ 19. $B(1, -3, 8)$, $C(5, -1, 7)$, $\overline{CA} = (-4, -5, -4)$.

№ 20. $D(4, 0, 6)$.

№ 21. $D(-1, 1, 1)$, $|\overline{BD}| = 4\sqrt{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \gamma = 0$.

№ 22. $\vec{d}_1 = \frac{3}{\sqrt{98}}\vec{i} - \frac{8}{\sqrt{98}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{98}}\vec{k}$; $\vec{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$.

№ 23. $\vec{c} = 25\vec{i} - 5\vec{j} + 25\vec{k}$.

№ 24. $|\vec{R}| = 15H$.

№ 25. $|\vec{F}_1| = 10H$; $|\vec{F}_2| = 10H$; $|\vec{F}_3| = 10\sqrt{2}H$.

№ 26. $M(7, 0)$ и $M_2(-1, 0)$.

№ 27. $M(0, 1, 0)$.

№ 28. 7.

№ 29. $(4, 0)$ и $(5, 2)$.

№ 30. $(-1, 2, 4)$ и $(8, -4, -2)$.

№ 31. $\frac{3}{4}\sqrt{10}$.

№ 32. $\frac{\sqrt{182}}{3}$.

№ 33. $(\frac{11}{7}, \frac{10}{7}, \frac{18}{7})$.

№ 34. $(3\sqrt{2}, 3, -3\sqrt{2})$.

№ 35. 1) может; 2) не может; 3) может.

№ 36. 60° или 120° .

§3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.1. Основные вопросы теории

3.1.1. Определение и свойства

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Его обозначение: $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{b})$, таким образом:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (3.1)$$

Если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, то скалярное произведение считают равным нулю.

Рассмотрим скалярное произведение ненулевых векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$. Согласно теореме 1 о проекциях $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = np_{\vec{a}} \vec{b}$ (рис. 54).

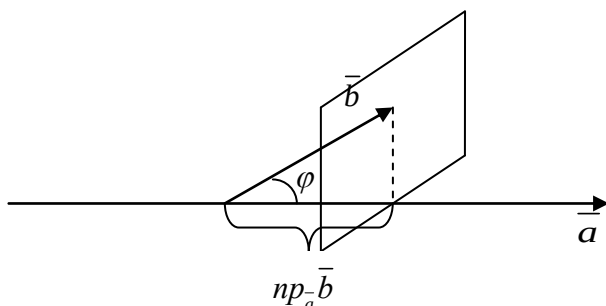


Рис. 54

Поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (3.2)$$

Аналогично,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} \quad (3.3)$$

Вывод. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно длине одного из них на проекцию другого на направление первого.

Иногда равенства (3.2) и (3.3) считают вторым определением скалярного произведения.

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение коммутативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

Действительно, пусть угол от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha$, тогда $(\vec{b} \wedge \vec{a}) = -\alpha$.

Из определения скалярного произведения $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha$ или $\bar{b} \cdot \bar{a} = |\bar{b}||\bar{a}|\cos(-\alpha) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\alpha = \bar{a}\bar{b}$

2. Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов, т.е. для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

Доказательство.

Согласно равенству (3.2)

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}|(np_{\bar{a}}\bar{b} + np_{\bar{a}}\bar{c}) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c},$$

что и требовалось доказать.

3. Скалярное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя, т.е. для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и любого числа λ выполняется равенство:

$$(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

Докажем, в частности, вторую часть этого двойного равенства: $\bar{a}(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$

Применяя равенство (3.2), имеем

$$\bar{a}(\lambda\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}(\lambda\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot \lambda np_{\bar{a}}\bar{b} = \lambda |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

что и требовалось доказать.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т.е для любого вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a} = |\bar{a}|^2.$$

Доказательство.

Используя определение скалярного произведения, имеем $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$, что и требовалось доказать.

5. Теорема. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = 0.$$

Необходимость.

Дано: $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, $\bar{a} \perp \bar{b}$

Доказать: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Доказательство: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Достаточность:

Дано: $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Доказать: $\bar{a} \perp \bar{b}$

Доказательство: по условию $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = 0$, $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, поэтому $\cos \varphi = 0$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е $\bar{a} \perp \bar{b}$. Теорема полностью доказана.

Из нее следует условие ортогональности ненулевых векторов в векторной форме: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

3.1.2. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатном пространстве, тогда $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Найдем их скалярное произведение.

Дистрибутивный и ассоциативный законы скалярного произведения позволяют вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перемножать как многочлены, а именно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

Но в силу ортогональности векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ и на основании свойства о скалярном квадрате $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. В связи с этим, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Вывод. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

3.1.3. Некоторые приложения скалярного произведения

1. Установление ортогональности векторов.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатном пространстве $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, тогда $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ — условие ортогональности двух векторов в координатной форме.

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого.

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (3.4)$$

3. Определение угла между векторами.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (3.5)$$

4. Нахождение работы постоянной силы.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения M в положение N под действием постоянной силы $\vec{F}$, составляющей угол φ с направлением перемещения (рис. 55).

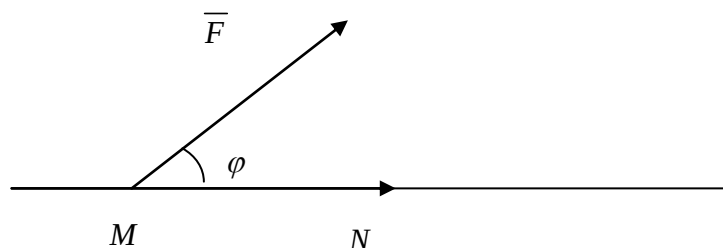


Рис. 55

Тогда работа A силы $\vec{F}$ будет $\bar{A} = |\vec{F}| \cdot |\overline{MN}| \cdot \cos \varphi$, откуда, учитывая определение скалярного произведения $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$, где $\vec{S} = \overline{MN}$ – вектор перемещения.

Вывод. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

3.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, найти $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

Решение.

Используя свойства и определение скалярного произведения, имеем $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{a} - 4\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 3|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{2}{3}\pi - 4|\vec{b}|^2 =$

$$3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 16 = -61.$$

№ 2. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$, вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

Решение.

Из условия, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляют замкнутую ломанную, при этом $\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$ (рис.56).

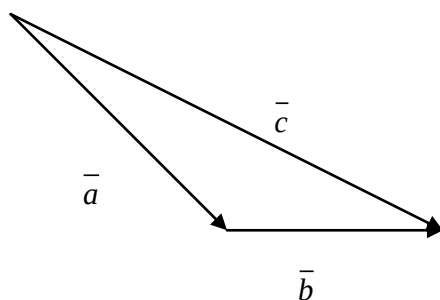


Рис. 56

Но тогда

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{ab} - \overline{b}(\overline{a} + \overline{b}) - (\overline{a} + \overline{b})\overline{a} = \overline{ab} - \overline{ab} - \overline{b}^2 - \overline{a}^2 - \overline{ab} = -|\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 - \overline{ab}.$$

Найдем $\overline{ab}$, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$|\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \quad \text{или} \quad |\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2\overline{ab}, \quad \text{откуда} \quad 2\overline{ab} = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - |\overline{c}|^2, \\ \overline{ab} = \frac{1}{2}|\overline{a}|^2 + \frac{1}{2}|\overline{b}|^2 - \frac{1}{2}|\overline{c}|^2.$$

В связи с этим

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = -\frac{3}{2}|\overline{a}|^2 - \frac{3}{2}|\overline{b}|^2 + \frac{1}{2}|\overline{c}|^2 = -\frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 16 = -15 + 8 = -7$$

№ 3. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{c} = (0; 4; -1)$

Найти: 1) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c}$ 2) $np_{2\overline{b} - \overline{c}} \overline{a}$

Решение.

1. Чтобы найти скалярное произведение векторов $(\overline{a} + \overline{b})$ и $\overline{c}$ в данном случае, необходимо знать координаты этих векторов. Координаты $\overline{c}$ даны, найдем координаты вектора $(\overline{a} + \overline{b})$: $\overline{a} + \overline{b} = (2+1)\overline{i} + (-5-1)\overline{j} + (1+4)\overline{k} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 5\overline{k}$, откуда $\overline{a} + \overline{b} = (3; -6; 5)$.

Используя формулу (3.1), получаем $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = 3 \cdot 0 + (-6) \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -29$.

2. Согласно формуле (3.4) $np_{(2\overline{b} - \overline{c})} \overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot (2\overline{b} - \overline{c})}{|2\overline{b} - \overline{c}|}$.

Чтобы воспользоваться последним равенством, также необходимо знать координаты векторов $\overline{a}$ и $(2\overline{b} - \overline{c})$. Координаты $\overline{a}$ известны, найдем координаты вектора $(2\overline{b} - \overline{c})$: $2\overline{b} - \overline{c} = (2-0)\overline{i} + (-2-4)\overline{j} + (8+1)\overline{k} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 9\overline{k}$, т.е. $2\overline{b} - \overline{c} = (2; -6; 9)$. Таким образом,

$$np_{(2\overline{b} - \overline{c})} \overline{a} = \frac{2 \cdot 2 + (-5) \cdot (-6) + 1 \cdot 9}{\sqrt{4 + 36 + 81}} = \frac{43}{\sqrt{121}} = \frac{43}{11}.$$

№ 4. Даны вершины треугольника $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$ и $C(1, -2, 1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний при вершине B (рис.57).

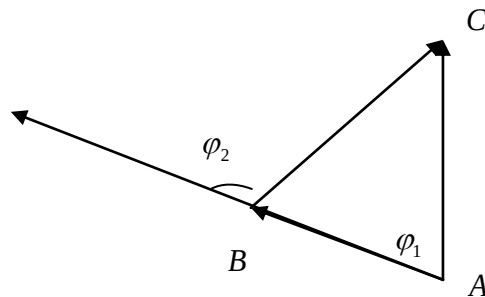


Рис. 57

Внутренний угол φ_1 при вершине A есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC} = -2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$. Отсюда, согласно формуле (3.5),

$$\cos \varphi_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 4}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+16+16}} = \frac{8}{3 \cdot 6} = \frac{4}{9}; \varphi_1 = \arccos \frac{4}{9} \approx 63^\circ 39'.$$

Внешний угол φ_2 при вершине B есть угол между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{AB}$. Найдем вектор $\overline{BC}$ ($\overline{AB}$ уже найден): $\overline{BC} = (1-5)\bar{i} + (-2-1)\bar{j} + (1+1)\bar{k} = -4\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Следовательно,

$$\cos \varphi_2 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{(-4) \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{\sqrt{16+9+4} \cdot 3} = -\frac{1}{3\sqrt{29}},$$

$$\varphi_2 = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{29}}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{3\sqrt{29}} \approx 93^\circ 10'.$$

№ 5. Проверить, могут ли векторы $\bar{a} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$ быть ребрами куба. Найти ребро куба.

Решение.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ могут быть ребрами куба, если они

- 1) имеют одинаковую длину и
- 2) ортогональны

проверим эти условия:

$$1) |\bar{a}| = \sqrt{49+36+36} = 11, |\bar{b}| = \sqrt{36+4+81} = 11$$

$$2) \bar{a} \perp \bar{b}, \text{ если } \bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \bar{a} \cdot \bar{b} = 7 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + (-6) \cdot 9 = 42 + 12 - 54 = 0.$$

Для определения вектора $\bar{c}$, дающего третье ребро куба, вначале воспользуемся ортогональностью вектора $\bar{c}$ векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$
$$\begin{cases} \bar{a} \cdot \bar{c} = 0; \\ \bar{b} \cdot \bar{c} = 0. \end{cases}$$

Или, если $\bar{c}(x; y; z)$,

$$\begin{cases} 7x + 6y - 6z = 0; \\ 6x + 2y + 9z = 0. \end{cases}$$

Полученная система однородная, из двух уравнений с тремя неизвестными. Найдем ее решение. Составим матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ и получаем из нее миноры}$$

$$\delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 66; \quad \delta_y = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -99; \quad \delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -22. \text{ Тогда } x = 66t, \quad y = -99t,$$

$z = -22t$. Выделим решение системы, отвечающее условию $|\bar{c}| = 11$
 $\sqrt{(66t)^2 + (-99t)^2 + (-22t)^2} = 11$ или $(66t)^2 + (-99t)^2 + (-22t)^2 = 121$.

Решаем это уравнение $11^2 \cdot 6^2 \cdot t^2 + 11^2 \cdot 9 \cdot t^2 + 2^2 \cdot 11 \cdot t^2 = 11^2$, откуда $(6^2 + 9^2 + 2^2)t^2 = 1$ или $(36 + 81 + 4)t^2 = 1$, поэтому $t^2 = \frac{1}{121}$ или $t = \pm \frac{1}{11}$, откуда $x = \pm 6$; $y = \pm 9$; $z = \pm 2$.

Таким образом, $\bar{c} = \pm(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k})$.

№ 6. На материальную точку действуют силы $\bar{f}_1 = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{f}_2 = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{f}_3 = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. Найти работу равнодействующей $\bar{R}$ этих сил при перемещении точки из положения $M_1(2, -1, 0)$ в положение $M_2(4, 1, -1)$.

Решение.

Работа A силы $\vec{R}$ при перемещении материальной точки в направлении вектора $\vec{S} = \overline{M_1M_2}$ есть $A = \vec{R} \cdot \vec{S}$. Найдем векторы $\vec{R}$ и $\vec{S}$:

$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = (4-2)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, следовательно, $A = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$ (ед.работы).

3.3. Примеры и задачи для самостоятельного решения

№ 7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}^2$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$.

№ 8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

№ 9. Определить, при каком значении α , векторы $\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2$ будут ортогональны.

№ 10. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

№ 11. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

№ 12. Дан прямоугольник $ABCD$ и вне его произвольная точка M . Доказать равенство: $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$. Вывести отсюда, что $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

№ 13. $ABCD$ - равнобедренная трапеция, $\overline{AB} = \vec{a}$ - основание, $\overline{AD} = \vec{b}$ - боковая сторона, угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$.

№ 14. Даны точки $A(-1, 3, 7)$, $B(2, -1, 5)$ и $C(0, 1, -5)$. Найти $(2\overline{AB} - \overline{CB}) \cdot (2\overline{CB} + \overline{BA})$.

№ 15. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин $A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$ и $D(3, -2, 2)$, взаимно перпендикулярны.

№ 16. В плоскости YOZ найти вектор $\vec{a}$, перпендикулярный вектору $\vec{b} = (12, -3, 4)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

№ 17. Даны три вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -5$, $\vec{x}\vec{b} = -11$, $\vec{x}\vec{c} = 20$.

№ 18. Определить, при каком значении α , векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

№ 19. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ образуют с осью OY тупой угол. Найти его координаты, зная, что, $|\vec{x}| = 14$.

№ 20. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2, 3, -1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$

№ 21. Даны два вектора $\vec{a} = (3, -1, 5)$ и $\vec{b} = (1, 2, -3)$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси OZ и удовлетворяет условиям $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

№ 22. Даны три точки $A(4, 1, 0)$, $B(2, 2, 1)$, $C(6, 3, 1)$. Найти $np_{\overline{AC}} \overline{AB}$.

№ 23. Даны векторы

$\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти $np_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a} + \vec{c})$.

№ 24. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1, 0, 1)$ и $\vec{b} = (0, 2, -1)$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ равна 1.

№ 25. Найти проекцию вектора $\vec{s} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

№ 26. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ на ось, составляющую с координатными осями OX и OZ углы $\alpha = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$, а с осью OY - острый угол β .

№ 27. Даны две толчки $A(3, 4, -2)$ и $B(2, 5, -2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями OX и OY углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 120^\circ$, а с осью OZ - тупой угол γ .

№ 28. Сила, определяемая вектором $\vec{R} = \vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k}$ расположена по трем направлениям, одно из которых задано вектором $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти составляющую силы $\vec{R}$ в направлении вектора $\vec{a}$.

№ 29. Даны векторы $\vec{a} = (2, -4, 4)$ и $\vec{b} = (-3, 2, 3)$. Найти угол между ними.

№ 30. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 3, 1)$, $B(-2, -1, 4)$ и $C(-2, -4, 0)$. Найти внутренний угол при вершине C .

№ 31. Дан треугольник с вершинами $A(-1, 5, 1)$, $B(1, 1, -2)$ и $C(-3, 3, 2)$. Определить его внешний угол при вершине C .

№ 32. Даны вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$. Найти его внутренний угол φ_1 при вершине A и внешний угол φ_2 при вершине B .

№ 33. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$.

№ 34. Вычислить. Какую работу производит сила $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(2, -3, 5)$ в положении $M(3, -2, -1)$.

№ 35. Даны силы $\vec{f}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{f}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении ее точки приложения из начала координат в точку $M(2, -1, -1)$.

№ 36. Даны три силы $\vec{F}_1 = (3, -4, 2)$, $\vec{F}_2 = (2, 3, -5)$ и $\vec{F}_3 = (-3, -2, 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = (-1, -4, 3)$.

3.4. Ответы

№ 7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{a}^2 = 4$, $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 28$.

№ 8. $|\vec{c}| = \sqrt{217} \approx 14,7$.

№ 9. $\pm \frac{3}{5}$.

№ 10. $\arccos \frac{4}{5}$.

№ 11. 5.

№ 13. $\overline{DC} = \frac{|\vec{a}| - |\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$; $\overline{CB} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} - \vec{b}$; $\overline{AC} = \frac{|\vec{a}| - |\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} + \vec{b}$; $\overline{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

№ 14. -524.

№ 16. $\vec{a}_1 = (0; 10, 4; 7, 8)$ $\vec{a}_2 = (0; -10, 4; -7, 8)$.

№ 17. $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

№ 18. $\alpha = -6$.

№ 19. $\vec{x} = (-4, -6, 12)$.

№ 20. $\vec{x} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

№ 21. $\vec{x} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

№ 22. $-\frac{1}{3}$.

№ 23. $\frac{5}{\sqrt{89}} \approx 0,53$.

№ 24. $\vec{x} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$.

№ 25. $\sqrt{3}$.

№ 26. -3.

№ 27. -5.

№ 28. $\vec{R}_a = (-\frac{14}{3}; -\frac{14}{3} - \frac{7}{3})$.

№ 29. $\varphi = \arccos \frac{5}{21} \approx 76^\circ 21'$.

№ 30. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

№ 31. $\varphi = \pi - \arccos \frac{4}{9} \approx 116^\circ 12'$.

№ 32. $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

№ 33. $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63^\circ 20'$.

№ 34. $A = 31$ (ед. работы).

№ 35. $A = 2$ (ед. работы).

№ 36. $A = 13$ (ед. работы).

§4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

4.1. Основные положения теоремы

4.1.1. Определение и свойства

Определение: Три некопланарных вектора, взятые в указанном порядке образуют правую тройку векторов, если кратчайший поворот от первого вектора до совмещения его со вторым вектором виден из конца третьего вектора, совершающимся против часовой стрелки и левой – если по часовой.

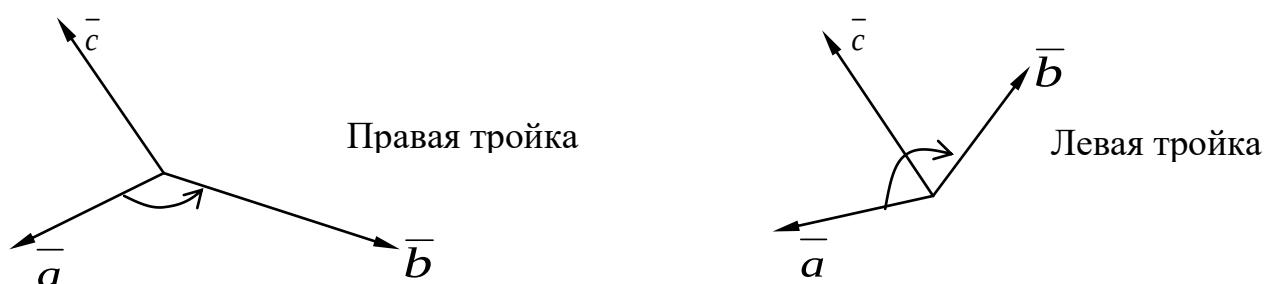


Рис. 58

Определение: Векторное произведение двух ненулевых векторов – третий вектор $\vec{c}$ который:

- 1.) имеет длину равную площади параллелограмма, построенного на перемножениях векторах как на сторонах: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$;
- 2.) перпендикулярен плоскости данных векторов, то есть $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3.) образует с ними правую тройку.

Обозначение векторного произведения: $\vec{a} \times \vec{b}$, или $[\vec{a}\vec{b}]$, или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, то их векторное произведение принимают за нуль-вектор.

В символьной форме можно записать так: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

$$2) \vec{c} \perp \vec{a}; \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка

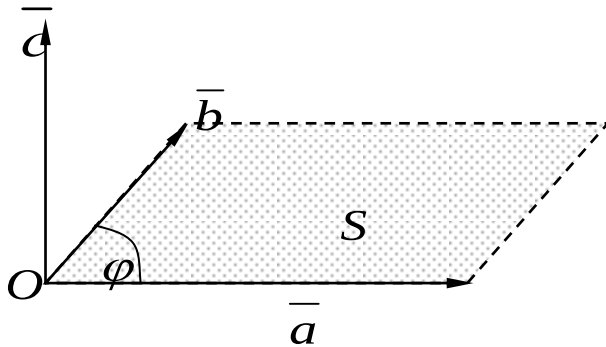


Рис.59.

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение антиперестановочно, то есть $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Действительно, если вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, то вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Если вектор $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$, то $\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}$ образуют также правую тройку, но длины этих векторов равны $|\vec{d}| = |\vec{c}|$ и вектор $\vec{d} \perp \vec{a}, \vec{c}$, а вектор $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$. Но вектора $\vec{c}$ и $\vec{d}$ расположены по разные стороны плоскости векторов $(\vec{a}, \vec{b})$ поэтому $\vec{c} = -\vec{d}$ (рис.60).

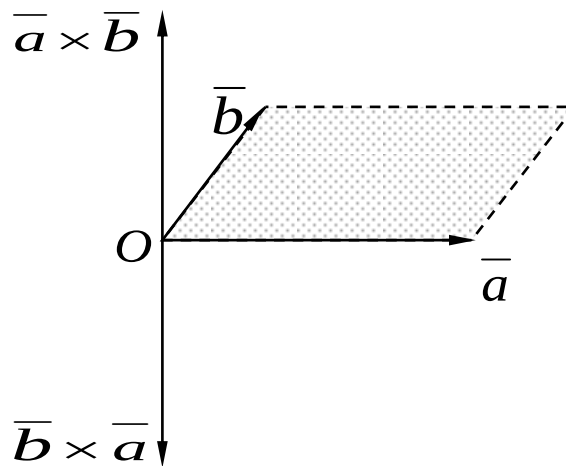


Рис. 60

2. Векторное произведение дистрибутивно, т.е. для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ справедливо $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{d}$.
3. Векторное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и для любого числа λ выполняется равенство $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.
4. Условие коллинеарности векторов.

5. **Теорема:** Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение – нуль - вектор.

В символьной форме можно записать так: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказательство:

Необходимость Дано: $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Доказать: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказательство: так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то угол φ между ними либо равен 0° либо 180° , но тогда по определению векторного произведения: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Достаточность Дано: $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доказать: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Доказательство: так как $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то по определению векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$. Но $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, тогда векторное произведение может быть равно нулю, если $\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, последнее означает, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Теорема полностью доказана. Из нее следует еще один вид условия коллинеарности в векторной форме: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

4.1.2. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Рассмотрим в координатном пространстве два вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Найдем их векторное произведение. Дистрибутивный и ассоциативный законы позволяют векторы перемножать как многочлены.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{k} \times \vec{i}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Но $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ в силу коллинеарности.

Покажем, что $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (рис. 61).

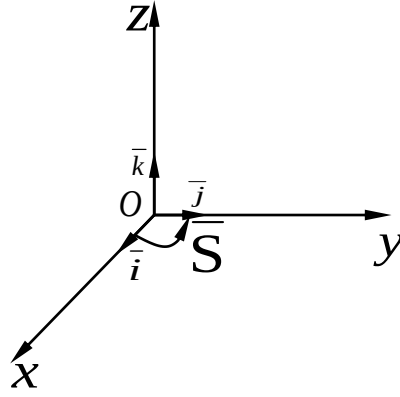


Рис. 61

Рассмотрим векторные произведения ортогональных единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Найдем модуль вектора $\bar{i} \times \bar{j}$.

$$|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \sin(\bar{i} \wedge \bar{j}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$$

Следовательно, $\bar{i} \times \bar{j}$ – единичный вектор, который перпендикулярен вектору $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Такими векторами являются векторы $\bar{k}$ и $(-\bar{k})$. Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – образуют правую тройку, следовательно $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$.

Рассуждая аналогично, получаем следующую таблицу векторного произведения ортогональных единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

В связи с этим,

$$\bar{a} \times \bar{b} = a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i},$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \\ &= \bar{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Формула (4.1) определяет выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

Векторное произведение векторов, заданных своими координатами, равно разложению условного определителя по элементам первой строки, составленного следующим образом:

- 1 строка – орты координат $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;
 2 строка – координаты первого вектора;
 3 строка – координаты второго вектора.

4.1.3. Приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0}.$$

Последнее возможно лишь в случае, когда элементы второй и третьей строки соответственно пропорциональны, поэтому

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (4.2)$$

Условие коллинеарности в координатной форме.

2. Нахождение площади параллелограмма и площади треугольника.

Если параллелограмм построен на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (см. рис. 59), то из определения векторного произведения (пункт 1), следует, что его площадь $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Площадь треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$.

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\bar{a} \times \bar{b}| \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|. \quad (4.3)$$

3. Определение момента силы.

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что моментом силы $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\bar{M}$, который проходит через точку O и:

- 1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B ;
- 2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\bar{M}| = |\overline{OA} \times \bar{F}| = |\bar{F}| \cdot ON = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin \varphi;$$

- 3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$ (рис. 62).

Т.о. момент $\bar{M}$ этой силы относительно точки O определяется формулой

$$\bar{M} = \overline{OA} \times \bar{F}. \quad (4.4)$$

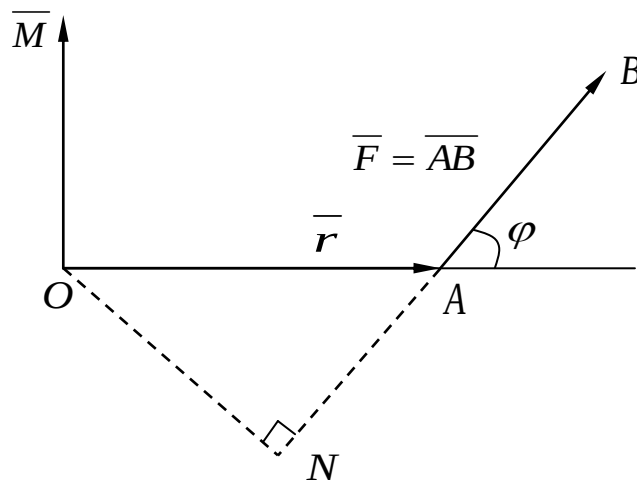


Рис. 62

4. Нахождение линейной скорости вращения.

Линейная скорость $\vec{V}$ точки M твёрдого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (4.5)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и O – некоторая неподвижная точка оси (рис.63).

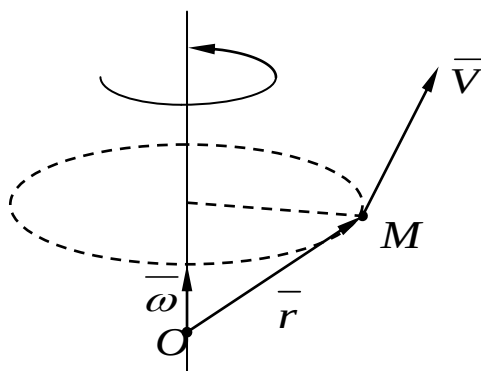


Рис. 63

4.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Найти

$$\left| (6\vec{a} - 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b}) \right|,$$

$$\text{если } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, \varphi = \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right)$$

Решение.

Согласно свойствам векторного произведения

$$(6\bar{a} - 3\bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b}) = 18(\bar{a} \times \bar{a}) + 12(\bar{a} \times \bar{b}) - 9(\bar{b} \times \bar{a}) - 6(\bar{b} \times \bar{b}) - 12(\bar{a} \times \bar{b}) + 9(\bar{a} \times \bar{b}) = 21(\bar{a} - \bar{b})$$

В связи с этим,

$$|(6\bar{a} - 3\bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b})| = 21|\bar{a} \times \bar{b}| = 21 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin |\bar{a}, \bar{b}| = 21 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 157,5.$$

№ 2. Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Найти $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{AB}$.

Решение.

Найдем координаты перемножаемых векторов $(\overline{BC} - 2\overline{CA})$ и $\overline{AB}$:

$$\overline{BC}(3-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} + (1+1)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{k};$$

$$\overline{CA} = -\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k};$$

$$(\overline{BC} - 2\overline{CA}) = (2+2)\bar{i} + (0-6)\bar{j} + (2-2)\bar{k} = 4\bar{i} + 6\bar{j};$$

$$\overline{AB} = (1-2)\bar{i} + (2+1)\bar{j} + (-1-2)\bar{k} = -\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}$$

По формуле (4.1):

$$(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18\bar{i} + 12\bar{j} + 18\bar{k}.$$

№ 3. Доказать, что точки $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$ и $C(2, 3, 0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между точками A и C .

Доказательство.

Достаточно проверить, что векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ расположены на одной прямой, т.е. коллинеарны, и вектор $\overline{AC}$ длиннее вектора $\overline{AB}$. Для этого найдем координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$:

$$\overline{AC} = (2+3)\bar{i} + (3+7)\bar{j} + (0+5)\bar{k} = 5\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k};$$

$$\overline{AB} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k}.$$

Проверим условие коллинеарности векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ (см. равенства (4.2)): $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, следовательно, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны. Найдем и сравним их длины:

$$|\overline{AC}| = \sqrt{25+100+25} = 5\sqrt{1+4+1} = 5\sqrt{6};$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{1+4+1} = 3\sqrt{6},$$

$$\text{отсюда } |\overline{AB}| < |\overline{AC}|,$$

что и требовалось доказать.

№ 4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$.

Решение.

Площадь $\triangle ABC$ равна половине площади параллелограмма, построенного вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 64), но площадь такого параллелограмма можно найти, используя определение векторного произведения, а именно, для век-

тора $\overline{AB} \times \overline{AC}$ равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

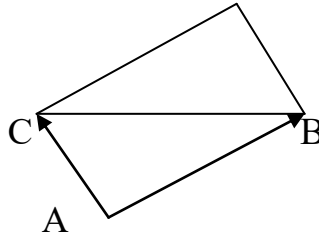


Рис. 64

Найдем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (3-1)\bar{i} + (0-2)\bar{j} + (-3-0)\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k};$$

$$\overline{AC} = (5-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} + (6-0)\bar{k} = 4\bar{i} + 6\bar{k}.$$

Их векторное произведение

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k},$$

$$\text{отсюда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |-12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}| = \frac{1}{2} \cdot 4 |-3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}| = 2\sqrt{9+36+4} = 14 \text{ (кв. ед.)}.$$

№ 5. На векторах $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$ и $\bar{b} = (1; 0; -4)$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную из конца вектора $\bar{b}$, и площадь треугольника, образованного этой высотой и сторонами параллелограмма (рис. 65).

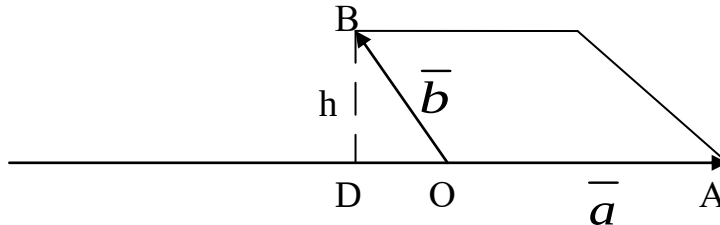


Рис. 65

Решение.

$$1) \quad h = \frac{S_{\square OACB}}{|\overline{OA}|} = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}|}$$

Найдем $|\bar{a} \times \bar{b}|$ и $|\bar{a}|$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 15\bar{j} + \bar{k}$$

$$\text{отсюда } |\bar{a} \times \bar{b}| = |4\bar{i} + 15\bar{j} + \bar{k}| = \sqrt{16 + 225 + 1} = 11\sqrt{2}.$$

Получим $|\bar{a}|$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{4+1+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Следовательно, $h = \frac{11\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{3}}{9}$.

$$2) \quad S_{\square OBD} = \frac{1}{2} |OD| \cdot |BD| = \frac{1}{2} |np_{\bar{a}} \bar{b}| \cdot h = \frac{h}{2} \cdot \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}|},$$

$$\text{поэтому } S_{\square OBD} = \frac{11\sqrt{3}}{9 \cdot 2} \cdot \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (7) \cdot (-4)|}{3\sqrt{6}} = \frac{143\sqrt{2}}{54} \text{ (кв. ед.)}$$

№ 6. Сила $\bar{F} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -2)$. Определить величину и направление момента этой силы относительно точки $B(2, 4, 0)$.

Решение.

Момент $\bar{M}$ силы $\bar{F}$, приложенной к точке A , относительно точки B определяется формулой $\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{F}$.

Найдем вектор $\overline{BA}$:

$$\overline{BA} = (4-2)\bar{i} + (2-4)\bar{j} + (-2-0)\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k},$$

тогда

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = -14\bar{i} - 22\bar{j} + 8\bar{k},$$

Его направление

$$\cos \alpha = -\frac{14}{2\sqrt{186}} = -\frac{7}{\sqrt{186}},$$

$$\cos \beta = \frac{-22}{2\sqrt{186}} = \frac{-11}{\sqrt{186}},$$

$$\cos \gamma = \frac{8}{2\sqrt{186}} = \frac{4}{\sqrt{186}}.$$

4.3 Примеры и задачи для самостоятельного решения

№ 7. Даны $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 15$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 96$. Найти модуль векторного произведения $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

№ 8. Даны $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi$. Вычислить:

$$1) |\bar{a} \times \bar{b}|;$$

$$2) |(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})|;$$

$$3) |(\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} + \bar{b})|.$$

№ 9. Доказать тождество $(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2$.

№ 10. Упростить выражения:

- 1) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$;
- 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;
- 4) $2\vec{i}(\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j}(\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k}(\vec{i} + \vec{j})$.

№ 11. Доказать, что $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ и выяснить геометрический смысл этого тождества.

№ 12. Даны: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $(\vec{a} - 2\vec{b})$ и $(3\vec{a} + 2\vec{b})$.

№ 13. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ связаны условием $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Доказать, что $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. Каков геометрический смысл этого результата?

№ 14. Доказать, что при любых векторах $\vec{a}, \vec{p}, \vec{g}, \vec{r}$ векторы $\vec{a} \times \vec{p}$, $\vec{a} \times \vec{g}$, $\vec{a} \times \vec{r}$ компланарны.

№ 15. Даны $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор $\vec{c}^0$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и такой, что:

- 1) тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - правая;
- 2) тройка $(\vec{b}, \vec{c}^0, \vec{a})$ - левая.

№ 16. Даны векторы $\vec{a} = (3, -1, 2)$ и $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Найти координаты векторов:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b}$;
- 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$;
- 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

№ 17. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Найти векторное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$.

№ 18. Даны векторы $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$ и $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Найти вектор $\vec{e} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

№ 19. Вычислить длину диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (6, 0, 2)$ и $\vec{b} = (1, 5; 2; 1)$.

№ 20. Дан треугольник с вершинами A(1, -2, 8), B(0, 0, 4) и C(6, 2, -0). Вычислить его площадь и длину высоты ВД.

№ 21. Даны вершины треугольника A(1, -1, 2), B(5, -6, 2) и C(1, 3, -1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В.

№ 22. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

№ 23. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(-3, -2, 0), B(3, -3, 1) и C(6, 0, 2). Найти угол между диагоналями и две высоты.

№ 24. Даны векторы $\vec{a} = (1, -4, 5)$, $\vec{b} = (6, 3, -2)$ и $\vec{c} = (1, -2, 2)$. Найти $\vec{i} \cdot \vec{\partial}_a (\vec{b} \times \vec{c})$.

№ 25. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 7,5\vec{k}$ образует угол с осью OZ. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

№ 26. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

№ 27. Зная, что векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны, вычислить коэффициенты α и β .

№ 28. Доказать, что точки A(-1, 2, 3), B(2, -1, 1), C(1, -3, -1) и D(-5, 3, 3) могут служить вершинами трапеции.

№ 29. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ приложена к точке A(2, -1, 1). Найти ее момент относительно начала координат.

№ 30. Даны три силы, приложенные к точке A(2, 1, 2): $\vec{F}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_2 = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти момент их равнодействующей относительно точки B(0, -1, -1).

№ 31. Сила $\vec{P} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ приложена к точке A(4, 2, -3). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки C(2, 4, 0).

№ 32. Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$, образует с ортом тупой угол и $|\vec{x}| = 26$.

№ 33. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он ортогонален векторам $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

№ 34. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

№ 35. Даны три силы $\vec{F}_1 = (2; -1; 3)$; $\vec{F}_2 = (3; 2; -1)$; $\vec{F}_3 = (-4; 1; 3)$, приложенные к точке A(-1, 4, 2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки O(2, 3, 1).

4.4. Ответы

№ 7. 72.

№ 8. 1) $\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{3}$.

№ 10. 1) $2(\vec{k} - \vec{i})$; 2) $\vec{a} \times \vec{c}$; 3) $2(\vec{a} \times \vec{c})$; 4) 3.

№ 12. $50\sqrt{2}$.

№ 15. 1) $\frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b})$; 2) $-\frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b})$.

№ 16. 1) (-3, 5, 7); 2) (-6, 10, 14); 3) (-12, 20, 28).

№ 17. $25\vec{i} + 5\vec{j} + 35\vec{k}$.

№ 18. $\vec{e} = -42\vec{a}$.

$$\text{№ 19. } \bar{d}_1 \frac{1}{2} \sqrt{277} \approx 8,3; \bar{d}_2 = \frac{1}{2} \sqrt{101} \approx 5,02; S_{\square} = 13 (\text{кв.ед.}).$$

$$\text{№ 20. } S_{\square} = 7\sqrt{5} \approx 8,68 (\text{кв.ед.}); |BD| = \frac{2\sqrt{21}}{3} = 3,05.$$

$$\text{№ 21. } h=5.$$

$$\text{№ 22. } \sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21} \approx 0,98; \varphi = 78^{\circ}30'.$$

$$\text{№ 23. } (\overline{AC}, \overline{BD}) = 120^{\circ}; h_1 = \frac{4\sqrt{27}}{\sqrt{38}} \approx 2,7; h_2 = \frac{4\sqrt{27}}{\sqrt{14}} \approx 4,5.$$

$$\text{№ 24. } \frac{58}{\sqrt{17}} \approx 18,6.$$

$$\text{№ 25. } \bar{x} = 24\bar{i} - 32\bar{j} + 30\bar{k}.$$

$$\text{№ 26. } \bar{x} = (1; 0,5; -0,5).$$

$$\text{№ 27. } \alpha = \frac{3}{2}; \beta = \frac{14}{3}.$$

$$\text{№ 29. } \bar{M} = 2\bar{i} + 11\bar{j} + 7\bar{k}.$$

$$\text{№ 30. } \bar{M} = 18\bar{i} - 6\bar{j} - 8\bar{k}$$

$$\text{№ 31. } \bar{M} = 28; \cos \alpha = -\frac{3}{7}; \cos \beta = -\frac{6}{7}; \cos \gamma = \frac{2}{7}.$$

$$\text{№ 32. } \bar{x} = (-6, -24, 8).$$

$$\text{№ 33. } \bar{x} = (7, 5, 1).$$

$$\text{№ 34. } |\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1, \text{ векторы попарно ортогональны.}$$

$$\text{№ 35. } |\bar{M}| = \sqrt{66}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}; \cos \beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}; \cos \gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}.$$

§5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

5.1. Основные вопросы теории

5.1.1. Определение, геометрический смысл, свойства

Определение. Смешанным произведением трех ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется произведение, в котором два первых вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор.

Обозначение смешанного произведения:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}, \text{ или } ([\bar{a}\bar{b}]\bar{c}), \text{ или } ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}).$$

Смешанное произведение – это число, поскольку последняя операция при его составлении – скалярное умножение.

Если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, то смешанное произведение таких векторов принимают равным нулю.

Установим геометрический смысл абсолютной величины смешанного произведения.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарные векторы, образующие правую и левую тройку. Перемножим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторно, получим новый вектор $\vec{d}$ (см. рис. 66), у которого длина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$.

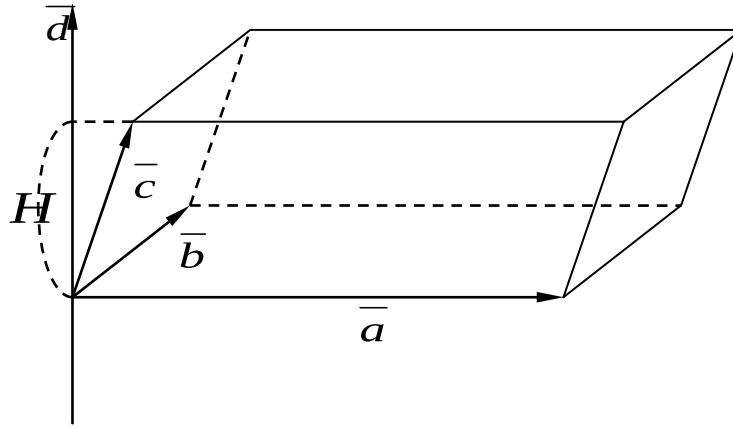


Рис. 66

Умножим $\vec{d}$ скалярно на $\vec{c}$: $\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot n_{\vec{d}} \vec{c} = S \cdot n_{\vec{d}} \vec{c}$.

Но $n_{\vec{d}} \vec{c} = H$ для правой тройки и $n_{\vec{d}} \vec{c} = -H$ для левой, где $H > 0$ и H – высота параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 66).

Таким образом, в обоих случаях $\vec{d} \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H)$, откуда $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$, где $V > 0$ и V – объем параллелепипеда.

Окончательно, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = V$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Абсолютная величина смешанного произведения трех некопланарных векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.

При доказательстве этого положения попутно получили, что если некопланарные векторы образуют правую тройку, их смешанное произведение положительно, если левую, то – отрицательно.

Теорема: Условие компланарности векторов.

Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Необходимость.

Дано: $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{c} \neq 0$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

Доказать: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Доказательство: так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то их можно поместить в одну плоскость (рис. 67).

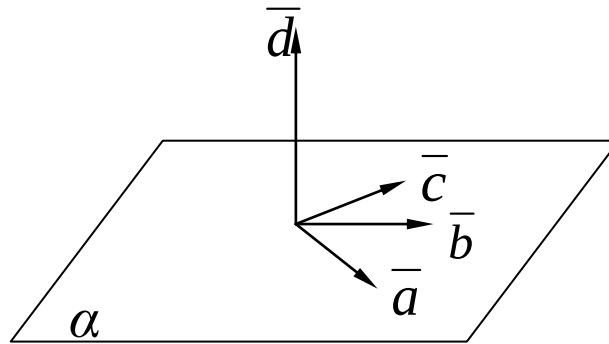


Рис. 67

Но тогда вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ будет ортогонален этой плоскости, следовательно, и вектору $\vec{c}$, лежащему в плоскости.

В связи с этим $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$, откуда $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Достаточность.

Дано: $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{c} \neq 0$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

Доказать: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

Доказательство: если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ и $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$, то последнее означает, что либо $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$, либо $\vec{d} \perp \vec{c}$.

Если $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Если $\vec{d} \perp \vec{c}$, то, учитывая, что $\vec{d} \perp \vec{a}$ и $\vec{d} \perp \vec{b}$ (по определению векторного произведения), имеем, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

Теорема полностью доказана.

Следствие: При перестановке сомножителей в смешанном произведении меняется ориентация векторов и, следовательно, меняется знак смешанного произведения.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}.$$

Определение: *Круговая перестановка* – перестановка векторов, при которой величина их смешанного произведения не меняется.

Круговая перестановка позволяет смешанное произведение обозначать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, так как безразлично, какие два вектора, взятые в установленном порядке, вначале перемножают векторно.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:
 - а) хоть один из векторов равен нулю;
 - б) любые два вектора коллинеарны;
 - в) три вектора компланарны.
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

3. $(\overline{abc}) = (\overline{bca}) = (\overline{cab}) = -(\overline{bac}) = -(\overline{cba}) = -(\overline{acb})$.
4. $\left((\lambda \overline{a_1} + \mu \overline{a_2}) \overline{bc} \right) = \lambda (\overline{a_1 bc}) + \mu (\overline{a_2 bc})$.

5.1.2 Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

В координатном пространстве рассмотрим три вектора

$$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \overline{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \overline{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Найдём их смешанное произведение. Для этого перемножим первые два вектора векторно:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Полученный вектор векторного произведения скалярно умножим на вектор $\overline{c}$, как сумму произведений одноименных координат

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \overline{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Здесь правая часть есть разложение определителя по элементам третьей. Т.о.,

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \overline{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Вывод: Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

5.1.3. Некоторые приложения смешанного произведения

1. Установление компланарности векторов.

$$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ компланарны, если } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \text{ — условие компланарности век-}$$

торов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в координатной форме.

2. Определение взаимной ориентации векторов:

если $\overline{abc} > 0$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку;

если $\overline{abc} < 0$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют левую тройку.

3. Нахождение объемов параллелепипеда, призмы и треугольной пирамиды.

Если параллелепипед, призма и пирамида построены на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 68), то их объемы находят по формулам

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|; \quad (5.2)$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \quad (5.3)$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \quad (5.4)$$

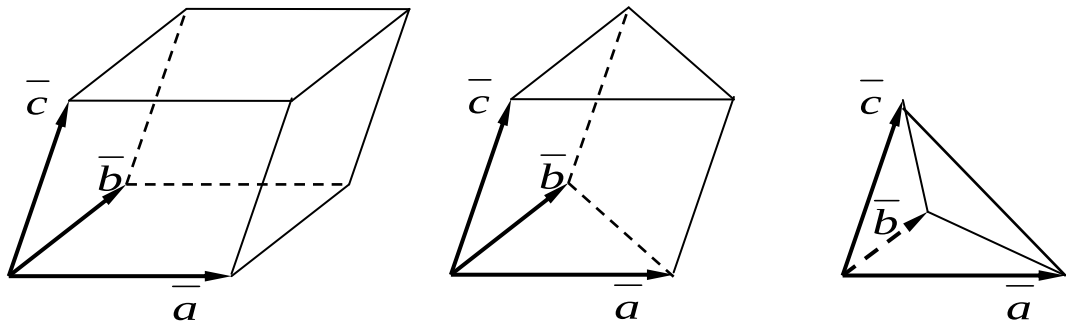


Рис. 68

5.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{k}$; $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Найти смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{d})$.

Решение.

Найдем вектор $(\vec{b} + \vec{d})$:

$$(\vec{b} + \vec{d}) = (1+1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (1+1)\vec{k}.$$

Используя формулу (3.1), находим смешанное произведение трех векторов: $\vec{a}, \vec{c}$ и $(\vec{b} + \vec{d})$:

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 35.$$

№ 2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Какую тройку образуют эти векторы?

Решение.

Взаимная ориентация векторов определяется по знаку смешанного произведения этих векторов. Найдем $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 58 > 0.$$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

№ 3. Доказать, что точки $A(1,0,7)$, $B(-1,-1,2)$, $C(2,-2,2)$ и $D(0,1,9)$ лежат в одной плоскости.

Доказательство.

Достаточно установить, что, например, векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (рис. 69) лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

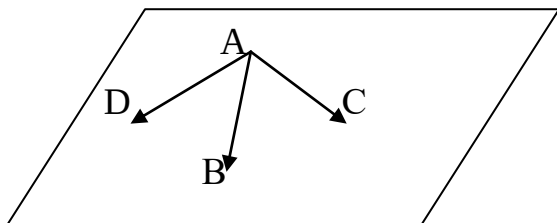


Рис. 69

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (-1-1)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (2-7)\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\overline{AC} = (2-1)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (2-7)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\overline{AD} = (0-1)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (9-7)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Проверим условие компланарности:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ - компланарны и точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

№ 4. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ как на ребрах.

Решение.

Объем данного параллелепипеда будет равен абсолютной величине смешанного произведения: $V = |\overline{abc}|$. Найдем $\overline{abc}$:

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14,$$

отсюда $V = |-14| = 14$ (куб. ед.).

№ 5. Даны вершины тетраэдра $O(-5,-4,8)$, $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$ и $C(6,3,7)$ (рис. 70). Найти длину высоты, опущенной из вершины O на грань ABC.

Решение.

Так как объем тетраэдра OABC есть $V = \frac{1}{3} S \cdot h$, то $h = \frac{3V}{S}$. Найдем объем V тетраэдра OABC и S – площадь $\triangle ABC$. Для этого

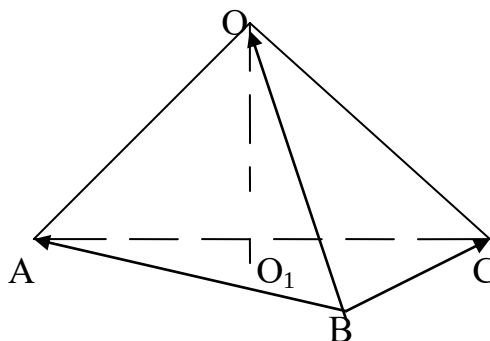


Рис. 70

получим векторы $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ и $\overline{BO}$, на которых построен тетраэдр:

$$\overline{BA} = (2-4)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (1+2)\bar{k} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k};$$

$$\overline{BC} = (6-4)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (7+2)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k};$$

$$\overline{BO} = (-5-4)\bar{i} + (-4-1)\bar{j} + (8+2)\bar{k} = -9\bar{i} - 5\bar{j} + 10\bar{k}.$$

Согласно формуле (5.4)

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{BA} \times \overline{BC}) \cdot \overline{BO}|.$$

Находим $(\overline{BA} \times \overline{BC}) \cdot \overline{BO}$:

$$(\overline{BA} \times \overline{BC}) \cdot \overline{BO} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \\ -9 & -5 & 10 \end{vmatrix} = -308,$$

$$\text{откуда } V = \frac{1}{6} |-308| = \frac{154}{3} \text{ (куб. ед.)},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{BC} \times \overline{BA}|.$$

Найдем векторное произведение $\overline{BC} \times \overline{BA}$:

$$\overline{BC} \times \overline{BA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k},$$

$$\text{отсюда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |-12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}| = \frac{1}{2} \cdot 4 |-3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}| = 2\sqrt{9+36+4} = 14 \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Таким образом, } h = \frac{3 \cdot 154}{3 \cdot 14} = 11 \text{ (ед. дл.)}$$

5.3. Примеры и задачи для самостоятельного решения

№ 6. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\overline{abc}$.

№ 7. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30° . Зная, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\overline{abc}$.

№ 8. Доказать, что при любых $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ векторы $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{c} - \bar{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

№ 9. Доказать тождество: $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c})(4\bar{a} + \bar{b} + 5\bar{c})$.

№ 10. Используя определение смешанного произведения, установить, какой является тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (правой или левой), если:

$$1) \bar{a} = \bar{i} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{j}, \bar{c} = \bar{k};$$

$$2) \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}, \bar{b} = \bar{j}, \bar{c} = \bar{i} + \bar{j};$$

$$3) \bar{a} = \bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i}.$$

№ 11. Установить компланарность векторов $\bar{a} = (2, -1, 2)$, $\bar{b} = (1, 2, -3)$ и $\bar{c} = (3, -4, 7)$.

№ 12. Проверить, лежат ли точки $A(1,3,1)$, $B(2,1,-1)$, $C(-1,2,-2)$ и $D(1,1,1)$ в одной плоскости?

№ 13. При каком значении m векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{k}$ компланарны?

№ 14. Определить ориентацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если:

- 1) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$;
- 2) $\vec{a} = (-2, 1, 5)$, $\vec{b} = (3, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, 4, 2)$;
- 3) $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (5, 2, -3)$, $\vec{c} = (1, 4, -2)$;

№ 15. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$.

№ 16. Определить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2, 4, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, 0)$.

№ 17. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, 1)$, $D(4, 1, 3)$.

№ 18. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

№ 19. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси OY .

№ 20. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.

№ 21. Дана пирамида с вершинами в точках $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$. Найти ее объем, площадь грани ABC и высоту спирали, опущенной на эту грань.

№ 22. Дан параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, построенный на векторах $\vec{AB} = (4, 3, 0)$, $\vec{AA'} = (2, 1, 2)$, $\vec{AA'} = (-3, -2, 5)$. Найти: 1) объем параллелепипеда; 2) площадь грани $ABCD$; 3) длину высоты, проведенной из вершины A' ; 4) угол между ребром AB и диагональю BD .

№ 23. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\vec{AB} = (2, 0, 0)$, $\vec{AC} = (3, 4, 0)$, $\vec{AA'} = (3, 4, 2)$. Найти: 1) его объем; 2) площади всех граней; 3) длину высоты, проведенной из вершины D ; 4) угол между ребрами AB и BC .

№ 24. Дана пирамида с вершинами в точках $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(7, 6, 3)$ и $D(4, -3, -1)$. Найти: 1) длину ребер AB , AC , AD ; 2) площадь грани ABC ; 3) угол между ребрами AD и BC ; 4) объем пирамиды; 5) длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC .

№ 25. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

№ 26. Доказать тождества:

- 1) $(\vec{a} + \vec{c})\vec{b}(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
- 2) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

$$3) (\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{c} + \bar{a}) = 2\bar{a}\bar{b}\bar{c};$$

$$4) \bar{a}\bar{b}(\bar{c} + \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \quad \text{при любых } \alpha \text{ и } \beta.$$

5.4. Ответы

№ 6. 24

№ 7. ± 27 .

№ 10. 1) правая; 2) векторы компланарны; 3) левая.

№ 11. компланарны.

№ 12. не лежат.

$$\text{№ 13. } m = \frac{1}{3}.$$

№ 14. 1) левая; 2) правая; 3) правая.

№ 15. $V = 12$.

№ 16. $V = 12,5$.

№ 17. $V = 3$.

№ 18. $h = 11$.

№ 19. Д (0,8,0) или Д (0,-7,0).

$$\text{№ 21. } V = 14, \quad h = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{№ 22. 1) } V = 12; \text{ 2) } S = 2\sqrt{26}; \text{ 3) } h = \frac{6}{\sqrt{26}}; \text{ 4) } \cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{50}.$$

$$\text{№ 23. 1) } V = \frac{8}{3}; \text{ 2) } S_{ABC} = 4, \quad S_{ACD} = 5, \quad S_{BDA} = 2\sqrt{5}, \quad S_{BCD} = \sqrt{33}; \text{ 3) } h = 2 \quad 4)$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{№ 24. 1) } |AB| = \sqrt{17} \approx 4,12; |AC| = 2\sqrt{13} \approx 7,2; |AD| = 5\sqrt{2} \approx 7. \text{ 2) } S_{ABC} = 14.$$

$$\text{3) } \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{25}}\right) \approx 92^{\circ}15'. \text{ 4) } V = 30. \text{ 5) } h = 6\frac{3}{7}.$$

§ 6. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

6.1. Основные вопросы теории

Определение. Двойным векторным произведение трех ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется четвертый вектор $\bar{d}$ вида $\bar{d} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Двойное векторное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ является вектором, компланарным с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис.71).

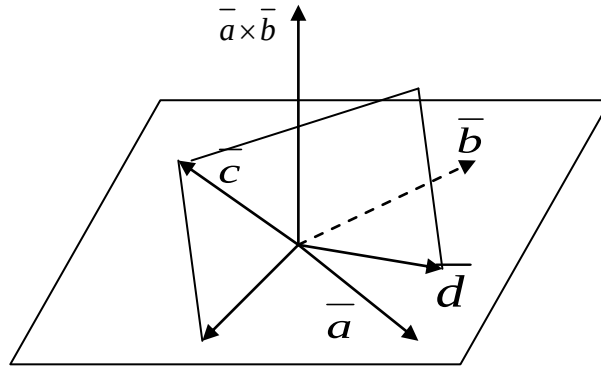


Рис. 71

Находят двойное векторное произведение по формуле

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}). \quad (6.1)$$

Двойное векторное произведение равно второму вектору скобки, умноженному на скалярное произведение двух других, минус первый вектор скобки на скалярное произведение двух других.

Если двойное произведение составлено в виде $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, то его раскрывают по формуле

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}) \quad (6.2)$$

Если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, то двойное векторное произведение полагают равным нуль-вектору.

6.2. Решение типовых примеров и задач

№ 1. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$. Найти направление вектора $\bar{d} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Решение.

Чтобы найти направляющие косинусы вектора $\bar{d}$, необходимо знать его координаты. Получим их, используя формулу (6.1):

$\bar{d} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c})$, а именно:

$$\bar{d} = (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})(2 \cdot 1 + (-3)(-1) + 1 \cdot 4) - (2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k})(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4) = 9(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) - 4(2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}) = \bar{i} + 21\bar{j} - 13\bar{k}$$

но тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+441+169}} = \frac{1}{\sqrt{611}}; \quad \cos \beta = \frac{21}{\sqrt{611}}; \quad \cos \gamma = -\frac{13}{\sqrt{611}}.$$

№ 2. даны векторы $\bar{a} = (1, 2, -2)$, $\bar{b} = (-2, 3, 1)$, $\bar{c} = (2, -2, 2)$, $\bar{m} = (-1, 3, 5)$, $\bar{n} = (1, 0, -2)$ и $\bar{p} = (3, -2, 2)$. Найти $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) - (\bar{m} \times \bar{n}) \times \bar{p}$.

Решение.

По правилу двойного векторного умножения имеем (см. формулы (6.1) и (6.2)):

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b});$$

$$(\overline{m} \times \overline{n}) \times \overline{p} = \overline{n}(\overline{m} \overline{p}) - \overline{m}(\overline{n} \overline{p}),$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) - (\overline{m} \times \overline{n}) \times \overline{p} &= (-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})(1 \cdot 2 + 2(-2) + (-2) \cdot 2) - (2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})(1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1) \\ &\quad - (\vec{i} - 2\vec{k})((-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2) + (-\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k})(1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2) = \\ &= -6(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - 2(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) - (\vec{i} - 2\vec{k}) - (-\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 8\vec{i} - 17\vec{j} - 13\vec{k}. \end{aligned}$$

6.3. Примеры и задачи для самостоятельного решения

№ 3. Даны векторы $\overline{a}=(2,0,-4)$, $\overline{b}=(1,3,5)$ и $\overline{c}=(1,2,1)$. Найти $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$.

№ 4. даны векторы $\overline{e}=(1,2,-3)$, $\overline{m}=(0,1,3)$, $\overline{n}=(1,1,1)$ и $\overline{p}=(2,2,-4)$. Найти $\overline{d}=(\overline{e} \times \overline{m}) \times (\overline{n} + \overline{p})$.

№ 5. Даны векторы $\overline{a}=(1,-1,2)$, $\overline{b}=(3,0,-1)$ и $\overline{c}=(2,2,5)$.

Найти длину и направление вектора $\overline{d}=(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$.

№ 6. даны векторы $\overline{a}=(1,2,1)$, $\overline{b}=(3,-1,3)$ и $\overline{c}=(1,-1,1)$. Найти $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$.

6.4 Ответы

№ 3. $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} = -26\vec{i} - 6\vec{j} + 38\vec{k}$.

№ 4. $\overline{d} = 6\vec{i} + 30\vec{j} + 36\vec{k}$.

№ 5. $|\overline{d}| = \sqrt{986} \approx 31,4$; $\cos \alpha = \frac{29}{\sqrt{986}}$; $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{986}}$; $\cos \gamma = -\frac{12}{\sqrt{986}}$.

№ 6. $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Задание 1.

Даны векторы $\bar{a} = \alpha \cdot \bar{m} + \beta \cdot \bar{n}$ и $\bar{b} = \gamma \cdot \bar{m} + \delta \cdot \bar{n}$, где $|\bar{m}| = k$; $|\bar{n}| = l$; $(\bar{m}, \bar{n}) = \varphi$.

Найти: а) $(\lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{b}) \cdot (\nu \cdot \bar{a} + \tau \cdot \bar{b})$;

б) $\text{pr}_{\bar{b}}(\nu \cdot \bar{a} + \tau \cdot \bar{b})$;

в) $\cos(\bar{a}, \tau \cdot \bar{b})$.

№ 1. $\alpha = -5, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = 6, k = 3, l = 5, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = \frac{1}{3}, \nu = 1, \tau = 2$.

№ 2. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 4, \delta = -1, k = 1, l = 3, \varphi = \pi, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = -2, \tau = 4$.

№ 3. $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = -3, \delta = -1, k = 4, l = 5, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -1, \tau = 5$.

№ 4. $\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = -6, \delta = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -1, \mu = \frac{1}{2}, \nu = 2, \tau = 3$.

№ 5. $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = -4, \delta = 5, k = 2, l = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 5, \tau = 1$.

№ 6. $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = -3, \delta = 4, k = 2, l = 4, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -4, \nu = 2, \tau = 3$.

№ 7. $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4, \delta = -2, k = 2, l = 5, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 1, \mu = -3, \nu = 0, \tau = -\frac{1}{2}$.

№ 8. $\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = 1, \delta = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \pi, \lambda = 1, \mu = -2, \nu = 3, \tau = -4$.

№ 9. $\alpha = -3, \beta = -2, \gamma = 1, \delta = 5, k = 3, l = 6, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = -1, \mu = 2, \nu = 1, \tau = 1$.

№ 10. $\alpha = 5, \beta = -3, \gamma = 4, \delta = 2, k = 4, l = 1, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = 3, \tau = 0$.

№ 11. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 3, \delta = -6, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -\frac{1}{3}, \nu = 1, \tau = 2$.

№ 12. $\alpha = -2, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = 1, k = 3, l = 2, \varphi = \frac{7\pi}{3}, \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = 3, \nu = 1, \tau = 2$.

№ 13. $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = -1, \delta = 2, k = 4, l = 5, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2$.

№ 14. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 5, \delta = 1, k = 2, l = 5, \varphi = 2\pi, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = 2, \tau = 3$.

№ 15. $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 5, \delta = 2, k = 4, l = 7, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = -3, \mu = 2, \nu = 2, \tau = -1$.

№ 16. $\alpha = -5, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 4, k = 5, l = 4, \varphi = \pi, \lambda = -3, \mu = \frac{1}{2}, \nu = -1, \tau = 1$.

№ 17. $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 3, \delta = 4, k = 2, l = 5, \varphi = \frac{\pi}{2}, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = 1, \tau = -2$.

№ 18. $\alpha = 7, \beta = -3, \gamma = 2, \delta = 6, k = 3, l = 4, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = 2, \tau = 1$.

№ 19. $\alpha = 4, \beta = -5, \gamma = -1, \delta = 3, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -5, \nu = 1, \tau = 2$.

№ 20. $\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = -2, \delta = 3, k = 1, l = 6, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \lambda = 4, \mu = 5, \nu = 1, \tau = -2$.

$$\text{№ 21. } \alpha = -5, \beta = -6, \gamma = 2, \delta = 7, k = 2, l = 7, \varphi = \pi, \lambda = -2, \mu = 2, \nu = 1, \tau = 3.$$

$$\text{№ 22. } \alpha = -7, \beta = 2, \gamma = 4, \delta = 6, k = 2, l = 9, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1, \tau = 3.$$

$$\text{№ 23. } \alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -6, \delta = 2, k = 2, l = 9, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = 1, \tau = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{№ 24. } \alpha = -5, \beta = -7, \gamma = -3, \delta = 2, k = 2, l = 11, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = -1, \tau = 2.$$

$$\text{№ 25. } \alpha = 5, \beta = -8, \gamma = -2, \delta = 3, k = 4, l = 3, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2.$$

$$\text{№ 26. } \alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 1, \delta = 7, k = 4, l = 6, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = 3, \nu = 3, \tau = -2.$$

$$\text{№ 27. } \alpha = -3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = -6, k = 4, l = 5, \varphi = \pi, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -3, \tau = -1.$$

$$\text{№ 28. } \alpha = 6, \beta = -7, \gamma = -1, \delta = -3, k = 2, l = 6, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -2, \nu = 1, \tau = 4.$$

$$\text{№ 29. } \alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -2, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = 3, \tau = 2.$$

$$\text{№ 30. } \alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 6, k = 4, l = 7, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = 3, \tau = 2.$$

Задание 2.

По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:

а) модуль и направление вектора $\vec{a}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

$$\text{№ 1. } A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), \vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{CB}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 2. } A(4, 3, -2), B(-3, -1, 4), C(2, 2, 1), \vec{a} = -5\vec{AC} + 2\vec{BC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{BC}.$$

$$\text{№ 3. } A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), \vec{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BA}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 4. } A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \vec{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BA}, \vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 5. } A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 4), \vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AB}.$$

$$\text{№ 6. } A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), \vec{a} = 3\vec{AC} - 7\vec{BC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 7. } A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), \vec{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}, \vec{b} = \vec{AC}, \vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AB}.$$

$$\text{№ 8. } A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), \vec{a} = 3\vec{AC} - 4\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{CB}.$$

$$\text{№ 9. } A(3, 4, -4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), \vec{a} = 5\vec{CB} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 10. } A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), \vec{a} = -3\vec{AB} + 4\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AB}.$$

$$\text{№ 11. } A(-2, -3, -4), B(2, -4, 0), C(1, 4, 5), \vec{a} = 4\vec{AC} - 8\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}.$$

$$\text{№ 12. } A(-2, -3, -2), B(1, 4, 2), C(1, -3, 3), \vec{a} = 2\vec{AC} - 4\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 13. } A(5, 6, 1), B(-2, 4, -1), C(3, -3, 3), \vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AB}.$$

$$\text{№ 14. } A(10, 6, 3), B(-2, 4, 5), C(3, -4, -6), \vec{a} = 5\vec{AC} - 2\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

$$\text{№ 15. } A(3, 2, 4), B(-2, 1, 3), C(2, -2, -1), \vec{a} = 4\vec{BC} - 3\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BA}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{BC}.$$

$$\text{№ 16. } A(-2, 3, -4), B(3, -1, 2), C(4, 2, 4), \vec{a} = 7\vec{AC} + 4\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{CB}.$$

№ 17. $A(4, 5, 3), B(-4, 2, 3), C(5, -6, -2), \vec{a} = 9\vec{AB} - 4\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AB}.$

№ 18. $A(2, 4, 6), B(-3, 5, 1), C(4, -5, -4), \vec{a} = -6\vec{BC} + 2\vec{BA}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{CA}, \vec{d} = \vec{BA}.$

№ 19. $A(-4, -2, -5), B(3, 7, 2), C(4, 6, -3), \vec{a} = 9\vec{BA} + 3\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{BC}.$

№ 20. $A(5, 4, 4), B(-5, 2, 3), C(4, 2, -5), \vec{a} = 11\vec{AC} - 6\vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 21. $A(3, 4, 6), B(-4, 6, 4), C(5, -2, -3), \vec{a} = 7\vec{BC} + 4\vec{CA}, \vec{b} = \vec{BA}, \vec{c} = \vec{CA}, \vec{d} = \vec{BC}.$

№ 22. $A(-5, -2, -6), B(3, 4, 5), C(2, -5, 4), \vec{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}.$

№ 23. $A(3, 4, 1), B(5, -2, 6), C(4, 2, -7), \vec{a} = -7\vec{AC} + 5\vec{AB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 24. $A(4, 3, 2), B(-4, -3, 5), C(6, 4, -3), \vec{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 25. $A(-5, 4, 3), B(4, 5, 2), C(2, 7, -4), \vec{a} = 3\vec{BC} + 2\vec{AB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{CA}, \vec{d} = \vec{AB}.$

№ 26. $A(6, 4, 5), B(-7, 1, 8), C(2, -2, -7), \vec{a} = 5\vec{BC} - 2\vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 27. $A(6, 5, -4), B(-5, -2, 2), C(3, 3, 2), \vec{a} = 6\vec{AB} - 3\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{CB}.$

№ 28. $A(-3, -5, 6), B(3, 5, 8 - 4), C(2, 6, 4), \vec{a} = 4\vec{AC} - 5\vec{BA}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 29. $A(3, 5, 4), B(4, 2, -3), C(-2, 4, 7), \vec{a} = 3\vec{BA} - 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}.$

№ 30. $A(4, 6, 7), B(2, -4, 1), C(-3, -4, 2), \vec{a} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AB}.$

Задание 3.

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов и установить их ориентацию;

б) найти модуль векторного произведения;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

№ 1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k};$

а) $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c};$ б) $3\vec{a}, 2\vec{c};$ в) $\vec{b}, -4\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}.$

№ 2. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 21\vec{k};$

а) $5\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c};$ б) $4\vec{b}, 2\vec{c};$ в) $\vec{a}, \vec{c};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}.$

№ 3. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k};$

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$ б) $3\vec{a}, -7\vec{b};$ в) $\vec{c}, -2\vec{a};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $3\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}.$

№ 4. $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k};$

а) $\vec{a}, -2\vec{b}, -7\vec{c};$ б) $4\vec{b}, 3\vec{c};$ в) $2\vec{a}, -7\vec{c};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $2\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}.$

№ 5. $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{j} + 5\vec{k};$

а) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c};$ б) $2\vec{b}, \vec{a};$ в) $\vec{a}, -4\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{b};$ д) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}.$

№ 6. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k};$

а) $\vec{a}, -3\vec{b}, 2\vec{c};$ б) $5\vec{a}, 3\vec{c};$ в) $-2\vec{a}, 4\vec{b};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $5\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}.$

№ 7. $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k};$

a) $7\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $3\vec{a}$, $5\vec{c}$; в) $2\vec{b}$, $4\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $7\vec{a}$, $2\vec{b}$, $5\vec{c}$.

№ 8. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

a) $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $\vec{c}$; б) $4\vec{a}$, $3\vec{b}$; в) $\vec{b}$, $-4\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-4\vec{c}$.

№ 9. $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;

a) $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $7\vec{a}$, $-3\vec{c}$; в) $2\vec{b}$, $3\vec{a}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $7\vec{a}$, $2\vec{b}$, $-3\vec{c}$.

№ 10. $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 8\vec{k}$;

a) $2\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $3\vec{b}$, $-9\vec{c}$; в) $3\vec{a}$, $-5\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{b}$; д) $3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $9\vec{c}$.

№ 11. $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$;

a) $\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $-2\vec{b}$, $4\vec{c}$; в) $-3\vec{a}$, $6\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $6\vec{c}$.

№ 12. $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$;

a) $-2\vec{a}$, $\vec{b}$, $-2\vec{c}$; б) $4\vec{b}$, $7\vec{c}$; в) $5\vec{a}$, $-3\vec{b}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $-2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $7\vec{c}$.

№ 13. $\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$;

a) $2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$; б) $-3\vec{b}$, $11\vec{c}$; в) $8\vec{a}$, $-6\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $8\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $11\vec{c}$.

№ 14. $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$;

a) $5\vec{a}$, $7\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $-4\vec{b}$, $11\vec{a}$; в) $3\vec{a}$, $-7\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{b}$; д) $3\vec{a}$, $7\vec{b}$, $-2\vec{c}$.

№ 15. $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$;

a) $5\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $-7\vec{a}$, $4\vec{c}$; в) $3\vec{a}$, $9\vec{b}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $3\vec{a}$, $-9\vec{b}$, $4\vec{c}$.

№ 16. $\vec{a} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k}$;

a) $4\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $5\vec{c}$; б) $-7\vec{a}$, $9\vec{c}$; в) $3\vec{b}$, $-8\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $4\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $9\vec{c}$.

№ 17. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$;

a) $7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $-\vec{c}$; б) $-5\vec{a}$, $4\vec{b}$; в) $3\vec{b}$, $-8\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $-\vec{c}$.

№ 18. $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 15\vec{j} + 21\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$;

a) $2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $-6\vec{a}$, $4\vec{c}$; в) $5\vec{b}$, $7\vec{a}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $4\vec{c}$.

№ 19. $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$;

a) $\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $-8\vec{b}$, $5\vec{c}$; в) $-9\vec{a}$, $7\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{b}$; д) $\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $5\vec{c}$.

№ 20. $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}$;

a) $-2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $5\vec{c}$; б) $-6\vec{b}$, $7\vec{c}$; в) $9\vec{a}$, $4\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $-2\vec{a}$, $7\vec{b}$, $4\vec{c}$.

№ 21. $\vec{a} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$;

a) $-3\vec{a}$, $6\vec{b}$, $-\vec{c}$; б) $5\vec{b}$, $3\vec{c}$; в) $7\vec{a}$, $-4\vec{b}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $7\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $3\vec{c}$.

№ 22. $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$;

a) $3\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $2\vec{c}$; б) $2\vec{b}$, $6\vec{c}$; в) $-4\vec{a}$, $-5\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $-4\vec{a}$, $2\vec{b}$, $6\vec{c}$.

№ 23. $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$;

a) $6\vec{a}$, $3\vec{b}$, $8\vec{c}$; б) $-7\vec{b}$, $6\vec{a}$; в) $-5\vec{a}$, $4\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{b}$; д) $-5\vec{a}$, $3\vec{b}$, $4\vec{c}$.

№ 24. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$;

a) $4\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $-2\vec{c}$; б) $6\vec{a}$, $-4\vec{c}$; в) $-2\vec{a}$, $5\vec{b}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $6\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $-2\vec{c}$.

№ 25. $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$;

а) $2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $-9\vec{a}$, $4\vec{c}$; в) $5\vec{b}$, $-6\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $2\vec{a}$, $5\vec{b}$, $-6\vec{c}$.

№ 26. $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$;

а) $-2\vec{a}$, $\vec{b}$, $7\vec{c}$; б) $5\vec{a}$, $-2\vec{c}$; в) $3\vec{b}$, $\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $-2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $7\vec{c}$.

№ 27. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$;

а) $-3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$; б) $6\vec{b}$, $3\vec{c}$; в) $\vec{a}$, $4\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $-3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$.

№ 28. $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$;

а) $7\vec{b}$, $-2\vec{c}$; б) $-5\vec{a}$, $4\vec{b}$; в) $8\vec{c}$, $-3\vec{a}$; г) $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) $-3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $8\vec{c}$.

№ 29. $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

а) $3\vec{a}$, $-5\vec{b}$, $-4\vec{c}$; б) $6\vec{b}$, $2\vec{c}$; в) $-2\vec{a}$, $8\vec{c}$; г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $3\vec{a}$, $6\vec{b}$, $-4\vec{c}$.

№ 30. $\vec{a} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$;

а) $5\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-4\vec{c}$; б) $4\vec{b}$, $\vec{a}$; в) $7\vec{a}$, $-2\vec{c}$; г) $\vec{a}$, $\vec{b}$; д) $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-2\vec{c}$.

Задание 4.

Сила $\vec{F}$ приложена к точке $\vec{A}$. Вычислить:

а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $\vec{B}$;

б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки $\vec{B}$.

№ 1. $\vec{F} = (5, -3, 9)$, $A(3, 4, -6)$, $B(2, 6, 5)$.

№ 2. $\vec{F} = (-3, 1, -9)$, $A(6, -3, 5)$, $B(9, 5, -7)$.

№ 3. $\vec{F} = (2, 19, -4)$, $A(5, 3, 4)$, $B(6, -4, -1)$.

№ 4. $\vec{F} = (-4, 5, -7)$, $A(4, -2, 3)$, $B(7, 0, -3)$.

№ 5. $\vec{F} = (4, 11, -6)$, $A(3, 5, 1)$, $B(4, -2, -3)$.

№ 6. $\vec{F} = (3, -5, 7)$, $A(2, 3, -53)$, $B(0, 4, 3)$.

№ 7. $\vec{F} = (5, 4, 11)$, $A(6, 1, -5)$, $B(4, 2, -6)$.

№ 8. $\vec{F} = (-9, 5, 7)$, $A(1, 6, -3)$, $B(4, -3, 5)$.

№ 9. $\vec{F} = (6, 5, -7)$, $A(7, -6, 4)$, $B(4, 9, -6)$.

№ 10. $\vec{F} = (-5, 4, 4)$, $A(3, 7, -5)$, $B(2, -4, 1)$.

№ 11. $\vec{F} = (4, 7, -3)$, $A(5, -4, 2)$, $B(8, 5, -4)$.

№ 12. $\vec{F} = (3, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $B(2, 4, 0)$.

Даны три силы: $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, приложенные к точке $\vec{A}$. Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $\vec{B}$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки $\vec{B}$.

№ 13. $\vec{P} = (9, -3, 4)$, $\vec{Q} = (5, 6, -2)$, $\vec{R} = (-4, -2, 7)$, $\vec{A}(-5, 4, -2)$, $\vec{B}(4, 6, -5)$.

№ 14. $\vec{P} = (5, -2, 3)$, $\vec{Q} = (4, 5, -3)$, $\vec{R} = (-1, -3, 6)$, $\vec{A}(7, 1, -5)$, $\vec{B}(2, -3, -6)$.

№ 15. $\vec{P} = (3, -5, 4)$, $\vec{Q} = (5, 6, -3)$, $\vec{R} = (-7, -1, 8)$, $\vec{A}(-3, 5, 9)$, $\vec{B}(5, 6, -3)$.

- № 16. $\bar{P} = (-10, 6, 5)$, $\bar{Q} = (4, -9, 7)$, $\bar{R} = (5, 3, -3)$, $\bar{A}(4, -5, 9)$, $\bar{B}(4, 7, -5)$.
 № 17. $\bar{P} = (5, -3, 1)$, $\bar{Q} = (4, 2, -6)$, $\bar{R} = (-5, -3, 7)$, $\bar{A}(-5, 3, 7)$, $\bar{B}(3, 8, -5)$.
 № 18. $\bar{P} = (-5, 8, 4)$, $\bar{Q} = (6, -7, 3)$, $\bar{R} = (3, 1, -5)$, $\bar{A}(2, -4, 7)$, $\bar{B}(0, 7, 4)$.
 № 19. $\bar{P} = (7, -5, 2)$, $\bar{Q} = (3, 4, -8)$, $\bar{R} = (-2, -4, 3)$, $\bar{A}(-3, 2, 0)$, $\bar{B}(6, 4, -3)$.
 № 20. $\bar{P} = (3, -4, 2)$, $\bar{Q} = (2, 3, -5)$, $\bar{R} = (-3, -2, 4)$, $\bar{A}(5, 3, -7)$, $\bar{B}(4, -1, -4)$.
 № 21. $\bar{P} = (4, -2, -5)$, $\bar{Q} = (5, 1, -3)$, $\bar{R} = (-6, 2, 5)$, $\bar{A}(-3, 2, -6)$, $\bar{B}(4, 5, -3)$.
 № 22. $\bar{P} = (7, 3, -4)$, $\bar{Q} = (9, -4, 2)$, $\bar{R} = (-6, 1, 4)$, $\bar{A}(-7, 2, 5)$, $\bar{B}(4, -2, 11)$.
 № 23. $\bar{P} = (9, -4, 4)$, $\bar{Q} = (-4, 6, -3)$, $\bar{R} = (3, 4, 2)$, $\bar{A}(5, -4, 3)$, $\bar{B}(4, -5, 9)$.
 № 24. $\bar{P} = (6, -4, 5)$, $\bar{Q} = (-4, 7, 8)$, $\bar{R} = (5, 1, -3)$, $\bar{A}(-5, -4, 2)$, $\bar{B}(7, -3, 6)$.
 № 25. $\bar{P} = (5, 5, -6)$, $\bar{Q} = (7, -6, 6)$, $\bar{R} = (-4, 3, 4)$, $\bar{A}(-9, 4, 7)$, $\bar{B}(8, -1, 7)$.
 № 26. $\bar{P} = (7, -6, 2)$, $\bar{Q} = (-6, 2, -1)$, $\bar{R} = (1, 6, 4)$, $\bar{A}(3, -6, 1)$, $\bar{B}(6, -2, 7)$.
 № 27. $\bar{P} = (4, -2, 3)$, $\bar{Q} = (-2, 5, 6)$, $\bar{R} = (7, 3, -1)$, $\bar{A}(-3, -2, 5)$, $\bar{B}(9, -5, 4)$.
 № 28. $\bar{P} = (7, 3, -4)$, $\bar{Q} = (3, -2, 2)$, $\bar{R} = (-5, 4, 3)$, $\bar{A}(-5, 0, 4)$, $\bar{B}(4, -3, 5)$.
 № 29. $\bar{P} = (3, -2, 4)$, $\bar{Q} = (-4, 4, -3)$, $\bar{R} = (3, 4, 2)$, $\bar{A}(1, -4, 3)$, $\bar{B}(4, 0, -2)$.
 № 30. $\bar{P} = (2, -1, -3)$, $\bar{Q} = (3, 2, -1)$, $\bar{R} = (-4, 1, 3)$, $\bar{A}(-1, 4, -2)$, $\bar{B}(2, 3, -1)$.

Задание 5.

Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D . Вычислить:

- а) площадь указанной грани;
 б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды;
 в) объем пирамиды $ABCD$;
 г) высоту пирамиды.

- № 1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D .
 № 2. $A(-7, -5, 6)$, $B(3, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B .
 № 3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .
 № 4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$; а) ABD ; б) $l = AC$, B и D .
 № 5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .
 № 6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .
 № 7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD ; б) $l = AD$, B и C .
 № 8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .
 № 9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .
 № 10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$; а) BCD ; б) $l = AD$, B и C .
 № 11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2, -4, 5)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .
 № 12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$; а) ABD ; б) $l = AB$, C и D .
 № 13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .
 № 14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .
 № 15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .

- № 16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD ; б) $l = AD$, B и C .
- № 17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .
- № 18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .
- № 19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$; а) BCD ; б) $l = AD$, B и C .
- № 20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .
- № 21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$; а) ABD ; б) $l = AB$, C и D .
- № 22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$, $D(2, 1, 4)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .
- № 23. $A(-6, -3, -5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$, $D(4, -2, 9)$; а) ACD , б) $l = DC$, A и D .
- № 24. $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$, $D(7, -9, 1)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .
- № 25. $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$, $D(4, 6, -5)$; а) ACD ; б) $l = AD$, B и C .
- № 26. $A(4, 3, 1)$, $B(2, 7, 5)$, $C(-4, -2, 4)$, $D(2, -3, -5)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D .
- № 27. $A(-9, -7, 4)$, $B(-4, 3, -1)$, $C(5, -4, 2)$, $D(3, 4, 4)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B .
- № 28. $A(3, 5, 3)$, $B(-3, 2, 8)$, $C(-3, -2, 6)$, $D(7, 8, -2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .
- № 29. $A(4, 2, 3)$, $B(-5, -4, 2)$, $C(5, 7, -4)$, $D(6, 4, -7)$; а) ABD ; б) $l = AD$, B и C .
- № 30. $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$, $D(6, -4, 1)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
2. *Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. – М.: Высшая школа, 1971.
3. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972. – Т. II.
4. *Бурмистров Б.Н., Секаева Л.Р.* Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: учеб. пособие / Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева. – Казань: Изд-во Казан. гос.ун-та, 2008г. – 81 с.
5. *Гулиев Р.Б., Арефьев А.В.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебное пособие. – СПб.: Университет при МПА ЕврАзЭС, 2021. – 142 с.
6. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Часть IV. – Харьков: ХГУ, 1966.
8. *Ксендзенко, Л.С.* Элементы векторной алгебры в статике : учебно-методическое пособие для студентов инженерных специальностей вузов. В 2-х ч. Ч. 1 / Л.С. Ксендзенко, Л.А. Бойко ; ДВФУ, Школа естественных наук. – Владивосток : Издательство ДВФУ, 2021. – 50 с.
9. *Лантев Г.Ф.* Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
10. *Минорский, В.П.* Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.П. Минорский. – М.: Наука, 2004. – 360 с.
11. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: учебник: В 2-х частях. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – Москва: Айрис-Пресс, 2015. – 252 с.
12. *Шафаревич И.Р., Ремизов А.О.* Линейная алгебра и геометрия. – М.: Физматлит, 2009. – 512 с.
13. *Шерстнева А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г., Имас О.Н.* Лекции по высшей алгебре. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 88 с.
14. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.

Учебное издание

**Чернявская Светлана Алексеевна
Царёв Валентин Геннадьевич**

**Э Л Е М Е Н Т Ы
ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Изд. № 32/2026. Объем 5 п.л. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,9.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»