

УДК 681.5.015.42

В.В. Захаров

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua

ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В НЕГАУССОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ АСИММЕТРИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Предлагаются детерминированная модель вероятностных моментов до третьего порядка включительно стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы и эффективный способ алгоритмизации численного интегрирования её матричных уравнений.

Введение. Методы анализа и синтеза статистической теории дифференциальных систем в пространстве состояний [1, 2] ориентированы либо на стохастическую модель состояния дифференциальной системы, либо на один из двух вариантов детерминированной модели вероятностных характеристик её вектора состояния. Первый вариант – это модель плотности вероятности вектора состояния (т.е. известное дифференциальное уравнение в частных производных Фоккера – Планка – Колмогорова [1]), второй – дифференциальная модель вероятностных моментов вектора состояния. Методы на основе детерминированных моделей вероятностных моментов составляют наиболее практически значимый раздел статистической теории систем – корреляционную теорию дифференциальных систем.

Дифференциальные модели вероятностных моментов различаются по способу аппроксимации плотности вероятности вектора состояния. Способ аппроксимации в свою очередь обуславливает максимальный порядок учитываемых в модели вероятностных моментов.

Целью статьи является построение детерминированной модели вероятностных моментов до третьего порядка включительно стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы и разработка эффективного способа алгоритмизации численного интегрирования её матричных уравнений.

Стохастическую модель дифференциальной системы в пространстве состояний [1, 2] определим в виде обыкновенного векторного стохастического нелинейного нестационарного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\Xi}(t)\mathbf{v}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \boldsymbol{\Xi}(t)$ – матричные коэффициенты соответствующих размеров, а $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$; $\mathbf{v}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ – соответственно векторные нелинейная функция, детерминированное возмущение и случайный процесс с нулевым средним типа гауссовского белого шума [1, 2]. Далее, при обозначении элементов уравнения (1) и их вероятностных моментов, аргумент t будем опускать.

Дисперсионной дифференциальной моделью (ДДМ) назовём систему уравнений математического ожидания (МО) и дисперсионной матрицы (ДМ) вектора состояния $\mathbf{x}$, соответствующих стохастической модели состояния (1). В [3] рассмотрена проблематика построения более общей дисперсионной дифференциально-разностной модели и получены соответствующие принципиально точные уравнения МО $\mathbf{m} = E\{\mathbf{x}\}$ и ДМ $\mathbf{D} = E\{\mathbf{x}^0[\mathbf{x}^0]^T\}$, где символ E – МО, а верхние индексы T и 0 – транспонирование матрицы и центрирование относительно МО соответственно. Очевидно, что дифференциальный вариант дисперсионной модели определится из [3] как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{m} &= \bar{\boldsymbol{\Phi}} + \boldsymbol{\Xi}\mathbf{v}, \quad \mathbf{m}(t_0) = \mathbf{m}_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{D} &= \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^T, \quad \mathbf{D}(t_0) = \mathbf{D}_0, \quad t \in [t_0, t_F], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{f}} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}]\}$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}][\mathbf{x}^0]^T\}$, $\mathbf{Q} = E\{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T\}$.

Гауссовское [1, 2] приближение плотности вероятности вектора состояния $\mathbf{x}$ модели (1) при корреляционном анализе на основе ДДМ часто на практике оказывается неприемлемым из-за асимметрии распределения вероятностей $\mathbf{x}$ и/или если распределение вероятностей $\mathbf{x}$ является либо островершинным, либо плосковершинным по сравнению с гауссовским. В этом случае естественным выходом представляется негауссовское приближение плотности вероятности на основе её аппроксимации тем или иным способом. Любой выбранный способ негауссовского приближения плотности вероятности однозначно определяет вероятностные моменты высших порядков вектора состояния стохастической модели (1), знание которых в этом случае потребуется для вычисления математических ожиданий $\bar{\mathbf{f}}$ и $\bar{\mathbf{R}}$ в правых частях уравнений ДДМ. Это обуславливает необходимость получения при построении ДДМ в негауссовском приближении дополнительных матричных уравнений вероятностных моментов высших порядков.

В связи с ограничением объёма статьи рассмотрим лишь случай асимметрии плотности вероятности вектора состояния стохастической модели (1) по отношению к гауссовской. Известно [1, 2], что степень асимметрии плотности вероятности случайного скалярного процесса характеризует величина его центрального момента третьего порядка, а многомерного – величины центральных моментов и взаимных моментов третьего порядка его компонентов.

1. Матричное уравнение центральных моментов третьего порядка. Матрицу центральных моментов третьего порядка $\mathbf{M}$ определим как блочную $(n \times n^2)$ - матрицу вида

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{e}_k^T \otimes \mathbf{M}_k\}, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_k^T$ – строка единичной $(n \times n)$ - матрицы $\mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k^T\}$,

$$\mathbf{M}_k = E\{\mathbf{G}\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_2 \otimes x_k^0, \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{x}^0 \otimes [\mathbf{x}^0]^T, \quad (5)$$

а символ $\otimes$ – прямое матричное произведение [4]. Матрица $\mathbf{G}_2$ определена как матрица Грама [4].

Уравнение k - ого $(n \times n)$ - матричного блока $\mathbf{M}_k$ матрицы центральных моментов $\mathbf{M}$ $(n \times 1)$ - вектора состояния $\mathbf{x}$ стохастической модели (1) получим на основе матричного аналога формулы Ито [1], определённого следующим утверждением, приводимым здесь без доказательства.

Утверждение 1. Матричная функция $\mathbf{G}$ вида (5) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G} = \mathbf{G}_x(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{r}^0) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{e}_m^T) \mathbf{G}_{xx}(\mathbf{I}_n \otimes [\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^T])(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{e}_m), \quad (6)$$

где $\mathbf{r}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{f}^0 + \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}$, $(n \times n^2)$ - матрица

$$\mathbf{G}_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^T \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} [g_{ij}]\} \quad (7)$$

и $(n^2 \times n^2)$ - матрица

$$\mathbf{G}_{xx} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^T \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} [g_{ij}]\} \quad (8)$$

– блочные аналоги матриц Якоби и Гессе [1, 2] соответственно; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} [g_{ij}]$ в (7) – $(1 \times n)$ - вектор по определению; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} [g_{ij}]$ в (8) – $(n \times n)$ - матрица Гессе, а $g_{ij} = x_i^0 \otimes x_j^0 \otimes x_k^0$.

Аналитические представления матриц (7) и (8), необходимые для дальнейшего эквивалентного преобразования правой части (6), получим на основе двух дополнительных утверждений и одного следствия. Первое из них и соответствующее следствие определяют важные неочевидные свойства операций произведения и прямого произведения матриц. В случае утверждения это обусловлено необходимостью обобщения известных результатов [4], определяющих алгебру прямого произведения матриц. Второе – определяет представления блочных аналогов матриц Якоби и Гессе для прямого произведения векторных функций. Справедливость этих представлений следует из доказательства соответствующих утверждений для произведений, в общем случае, матричных функций, которые будут приведены в работе, целиком посвящённой этой проблематике.

Утверждение 2. Для любых матриц $\mathbf{M}_{n \times m}$, $\mathbf{M}_{k \times l}$, $\mathbf{M}_{m \times p}$, $\mathbf{M}_{l \times q}$ и любых, определяющих их размеры, целых положительных n, m, l, k, p, q справедливо равенство

$$(\mathbf{M}_{n \times m} \mathbf{M}_{m \times p}) \otimes (\mathbf{M}_{k \times l} \mathbf{M}_{l \times q}) = (\mathbf{M}_{n \times m} \otimes \mathbf{M}_{k \times l}) (\mathbf{M}_{m \times p} \otimes \mathbf{M}_{l \times q}). \quad (9)$$

Доказательство утверждения 2 не вызывает затруднений и аналогично приведённому в [4] для квадратных матриц.

Следствие 2.1. Если в (9) $q = n = m = 1$, то

$$\mathbf{M}_{1 \times p} \otimes (\mathbf{M}_{k \times l} \mathbf{M}_{l \times 1}) = \mathbf{M}_{k \times l} (\mathbf{M}_{1 \times p} \otimes \mathbf{M}_{l \times 1}).$$

Утверждение 3. Пусть $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y})$ и $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y})$ – $(n_{\Phi} \times 1)$ - векторная и $(m_{\Psi} \times 1)$ - векторная функции соответственно $(n_{\Psi} \times 1)$ - векторного аргумента $\mathbf{y}$ и пусть каждая из них дифференцируема по $\mathbf{y}$ хотя бы

один раз. Тогда производные по векторным аргументам $\mathbf{y}^T$ и $\mathbf{y}$ прямого произведения функций $\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}^T$ определяются формулами

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}^T] = \boldsymbol{\Psi}^T \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Phi}] + \boldsymbol{\Phi} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Psi}^T], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}^T] = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Phi}^T \otimes \boldsymbol{\Psi}] \right\}^T, \quad (11)$$

а блочная матрица Гесса – формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} \{\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}^T\} &= \boldsymbol{\Psi}^T \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Phi}] + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Phi}] \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\boldsymbol{\Psi}^T] \right) \mathbf{P}_{m_{\Psi} \times n_y} + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\boldsymbol{\Phi}] \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Psi}^T] \right) + \boldsymbol{\Phi} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} [\boldsymbol{\Psi}^T], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathbf{P}_{m_{\Psi} \times n_y} = \sum_{i=1}^{m_{\Psi}} \{\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{I}_{n_y} \otimes \mathbf{e}_i\}$, а $\mathbf{e}_i$ – единичный $(m_{\Psi} \times 1)$ - вектор [4].

Из (12), с учётом (10) и (11) следует, что матрица Гессе $\mathbf{G}_{\mathbf{xx}}$ матричной функции $\mathbf{G}$ – линейная функция компонентов вектора состояния $\mathbf{x}^0$. Поэтому $E\{\mathbf{G}_{\mathbf{xx}}\} = \mathbf{O}_{n^2}$ и уравнение блока $\mathbf{M}_k$ получается из (6) в силу (4) и соотношения

$$E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{I}_n \otimes [\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}])\} = E\{E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{I}_n \otimes [\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}]) | \mathbf{x}\}\} = E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{I}_n \otimes [\mathbf{C}E\{\boldsymbol{\omega}\}])\} = \mathbf{O}_n,$$

следующего из известной формулы полного математического ожидания функции двух случайных аргументов и равенства $E\{\boldsymbol{\omega}\} = \mathbf{O}$, в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_k = E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Phi}^0)\}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{O}_{n^2}$ и $\mathbf{O}_n$ – нулевые матрицы [4] размеров $(n^2 \times n^2)$ и $(n \times n)$ соответственно, а $\mathbf{O}$ – нулевой вектор [4] соответствующего размера.

Представление градиента в (13) получим на основании (10) и представления $\frac{d}{d\mathbf{x}^T} [x_k^0] = \mathbf{e}_k^T$ в следующем виде

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}} = \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^1 = [\mathbf{x}^0]^T \otimes \mathbf{I}_n \otimes x_k^0 + \mathbf{x}^0 \otimes \mathbf{e}^T \otimes x_k^0$, а $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{G}_2 \otimes \mathbf{e}_k^T$. При этом вектор $\mathbf{e} = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k\}$ можно

рассматривать в качестве $(n^2 \times 1)$ - векторного аналога единичной матрицы $\mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k^T\}$. Тогда, в

силу утверждения 2, первое слагаемое в правой части равенства (13), соответствующее $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^1$ в представлении (14), преобразуется к виду

$$E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^1(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Phi}^0)\} = \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T, \quad (15)$$

где $\mathbf{R}_k = \mathbf{A}\mathbf{M}_k + \mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}_k$, $\bar{\mathbf{R}}_k = E\{\mathbf{f}^0[\mathbf{x}][\mathbf{x}^0]^T x_k^0\}$.

Преобразование второго слагаемого правой части равенства (13), соответствующего $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2$ в представлении (14), основывается на том же утверждении 2 и представлении

$$\mathbf{G}_2 = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes ([\mathbf{x}^0]^T x_i^0)\}. \quad (16)$$

В результате, с учётом равенств

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{G}_2 \otimes \mathbf{e}_k^T = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{e}_k^T)(\mathbf{G}_2 \otimes \mathbf{I}_n)$$

и

$$(\mathbf{G}_2 \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Phi}^0) = \mathbf{G}_2 \otimes \boldsymbol{\Phi}^0,$$

второе слагаемое (16) преобразуется к виду

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Phi}^0) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{e}_k^T)(\mathbf{G}_2 \otimes \boldsymbol{\Phi}^0) = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_k^T \boldsymbol{\Phi}^0 [\mathbf{x}^0]^T x_i^0)\}.$$

Переходя к математическим ожиданиям в представлении второго слагаемого, получаем

$$E\{\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Phi}^0)\} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes [\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_i]\}, \quad (17)$$

где $\mathbf{R}_i = \mathbf{A}\mathbf{M}_i + \mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}_i$, $\bar{\mathbf{R}}_i = E\{\mathbf{f}^0[\mathbf{x}][\mathbf{x}^0]^T x_i^0\}$. Окончательно после подстановки (15), (17) в (13) искомое уравнение матрицы $\mathbf{M}_k$ принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i \otimes [\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_i]\}. \quad (18)$$

Уравнения ДДМ (2) и дополнительное уравнение (3), (18) образуют систему принципиально точных незамкнутых дифференциальных уравнений. Для замыкания системы уравнений необходимо определиться с приемлемым в нашем случае способом приближения плотности вероятности $p(\mathbf{x})$.

2. Аппроксимация плотности вероятности $\tilde{p} \approx p(\mathbf{x})$. В качестве негауссовского приближения плотности вероятности $p(\mathbf{x})$ выберем аппроксимацию $\tilde{p}$ в виде отрезка ортогонального разложения плотности вероятности по многомерным полиномам Эрмита $H_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}^0)$ [1, 2] до третьего порядка включительно с весом p_{ε} вида

$$\tilde{p} = p_{\varepsilon} \left\{ 1 + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} H_{\mathbf{v}} \right\}, \quad (19)$$

где $p_{\varepsilon} = p_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ – гауссовская плотность вероятности; $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ – векторный индекс, а $\mathbf{e}_i$ – единичный

$(n \times 1)$ - вектор; $H_{\mathbf{v}} = H_{v_1 \dots v_i \dots v_n}(\mathbf{x}^0)$ – многомерный полином Эрмита степени v_i относительно

компонента x_i^0 , $i = \overline{1, n}$ векторного аргумента $\mathbf{x}^0$, а $\sigma[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^n v_i$ – степень многомерного полинома

Эрмита; $q_{\mathbf{v}} = m_{\mathbf{v}} / \prod_{i=1}^n (v_i!)$ – квазимомент [1, 2] порядка $\sigma[\mathbf{v}] = 3$, а $m_{\mathbf{v}} = E\{\prod_{i=1}^n [x_i^0]^{v_i}\}$ – центральный момент соответствующего порядка $\sigma[\mathbf{v}]$ – компонент матрицы $\mathbf{M}$.

Преобразуем (19) так, чтобы исключить в представлении полиномы Эрмита. Сначала на основе двух известных [1, 2] свойств

$$H_{\mathbf{v}} p_{\varepsilon} = (-1)^{\sigma[\mathbf{v}]} \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_n^{v_n}} p_{\varepsilon} \quad (20)$$

и

$$\frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_n^{v_n}} p_{\varepsilon} = (-1)^{\sigma[\mathbf{v}]} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \quad (21)$$

гауссовской многомерной плотности вероятности p_{ε} , подставив (21) в (20), получим

$$H_{\mathbf{v}} p_{\varepsilon} = p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}, \quad (22)$$

где $p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} p_{\varepsilon}$. Тогда, с учётом (22), представление (19) примет вид

$$\tilde{p} = p_{\varepsilon} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}. \quad (23)$$

3. Представление $\bar{\mathbf{f}}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$. Базовым для получения представления $\bar{\mathbf{f}}$ является равенство (23). Это представление получим, подставив (23) в соответствующий по определению МО $\bar{\mathbf{f}}$ n -кратный интеграл и поменяв в силу независимости функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ от компонентов $\mathbf{m}$ порядок интегрирования и дифференцирования, в виде

$$\bar{\mathbf{f}} \cong \tilde{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}, \quad (24)$$

где $\bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}$. Полученное представление $\bar{\mathbf{f}}$ – линейная комбинация векторного коэффициента статистической линеаризации [1] в гауссовском приближении $\bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}$ функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ и его частных производных $\bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}$ третьего порядка по компонентам вектора $\mathbf{m}$.

4. Представление $\bar{\mathbf{R}}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$.

Утверждение 4. Для гауссовской плотности вероятности p_{ε} $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}$ с ДМ $\mathbf{D}$ справедливо соотношение

$$[\mathbf{x}^0]^T p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{+i}]} \} \mathbf{D} + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T v_i p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{-i}]} \}, \quad (25)$$

$$\text{где } \mathbf{v}_{+i} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_{-i} = \mathbf{v} - \mathbf{e}_i. \quad (26)$$

Доказательство (25) основывается на рекуррентном соотношении [2] для генерирования многомерных полиномов Эрмита. В наших обозначениях оно примет вид

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}_{+i}} = [\mathbf{x}^0]^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{H}_{\mathbf{v}} - \sum_{j=1}^n \{v_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_j \mathbf{H}_{\mathbf{v}_{-j}} \}, \quad (27)$$

где $\mathbf{H}_0 = 1$, $\mathbf{H}_{0_{+i}} = [\mathbf{x}^0]^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_i$. Соотношение (25) получается в результате суммирования по $i = \overline{1, n}$

умноженных на $\mathbf{e}_i^T \mathbf{D} p_{\varepsilon}$ соотношений (27) и дальнейшего преобразования правой части к виду (25) на основе равенства (22) и следствия 2.1 с учётом следующих из него равенств

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}) \otimes ([\mathbf{x}^0]^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_i) = [\mathbf{x}^0]^T, \quad \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j^T.$$

Следствие 4.1. Если в (25) $\sigma[\mathbf{v}] = 0$, то

$$[\mathbf{x}^0]^T p_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial \mathbf{m}_i} \} \mathbf{D} = \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{D}. \quad (28)$$

Следствие 4.2. Умножив (25) по правилу скалярного произведения векторов [4] на $(n \times 1)$ - вектор $\mathbf{e}_k$, получим

$$x_k^0 p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^n d_{ik} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{+i}]} + v_k p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{-k}]}, \quad (29)$$

где $d_{ik} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{D} \mathbf{e}_k$.

Следствие 4.3. Если в (29) $\sigma[\mathbf{v}] = v_j = 1$, то после умножения (29) на $\mathbf{e}_j^T$ и суммирования по всем $j = \overline{1, n}$, следует

$$x_k^0 \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial \mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}_i} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial \mathbf{m}} + \mathbf{e}_k^T p_{\varepsilon}. \quad (30)$$

Утверждение 5. Для аппроксимации $\tilde{p}$ (23) плотности вероятности $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}$ с ДМ $\mathbf{D}$ справедливо соотношение

$$[\mathbf{x}^0]^T \tilde{p} = \mathbf{f}^P + \mathbf{k}^P \mathbf{D}, \quad (31)$$

где $\mathbf{f}^P = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \otimes [\sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}]\}$ и $\mathbf{k}^P = \partial \tilde{p} / \partial \mathbf{m} - (1 \times n)$ - векторные коэффициенты.

Действительно, в силу (25) и (28) из (23) следует, что

$$[\mathbf{x}^0]^T \tilde{p} = [\mathbf{x}^0]^T p_{\varepsilon} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} [\mathbf{x}^0]^T p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{D} + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} v_i q_{\mathbf{v}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{-i}]} \}. \quad (32)$$

При этом легко увидеть, что все слагаемые суммы в (32), для которых $v_i = 0$, обращаются в нуль. Следовательно, ненулевые слагаемые суммы по переменной $\mathbf{v}$ удовлетворяют дополнительному условию $v_i \geq 1$, т.е. должны быть вида $\mathbf{v}_{+i}$ (26). Поэтому очевидно, что для любого целочисленного $s > 0$ справедливо следующее эквивалентное представление суммы в (32):

$$\sum_{\sigma[\mathbf{v}]=s} \{v_i q_{\mathbf{v}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{-i}]} \} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}_{+i}]=s} \{v_i q_{\mathbf{v}_{+i}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=s-1} \{ (v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \}, \quad (33)$$

и следовательно, что справедливо утверждение 5.

Базовым для получения представления $\bar{\mathbf{R}}$ является утверждение 5, которое основывается на утверждении 4 и важном следствии 4.1. Представление $\bar{\mathbf{R}}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$ получим, подставив (31) в соответствующий МО $\bar{\mathbf{R}}$ по определению n - кратный интеграл и поменяв в силу независимости функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ от компонентов $\mathbf{m}$ порядок интегрирования и дифференцирования, в виде $\bar{\mathbf{R}} \equiv \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{F} + \mathbf{K} \mathbf{D}$, где

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i}} \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \}, \quad (34)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\varepsilon} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} \mathbf{K}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}, \quad \mathbf{K}_{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}, \quad \mathbf{K}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \mathbf{K}_{\varepsilon}. \quad (35)$$

5. Представление $\bar{\mathbf{R}}_k$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$.

Утверждение 6. Для аппроксимации $\tilde{p}$ (23) плотности вероятности $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}$ с МО $\mathbf{m}$ справедливо соотношение

$$x_k^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \tilde{p} = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial \mathbf{m}} \tilde{p} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (v_k + 1) q_{\mathbf{v}_{+k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} + \mathbf{e}_k^T \tilde{p}. \quad (36)$$

Равенство (36) справедливо в силу очевидного из (23) равенства

$$x_k^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \tilde{p} = x_k^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} p_{\varepsilon} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} q_{\mathbf{v}} x_k^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}, \quad (37)$$

следствия 4.3 и очевидного из (29) представления

$$x_k^0 \frac{\partial p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} }{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} (x_k^0 p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}) + \mathbf{e}_k^T p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^n \{d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} }{\partial \mathbf{m}} \} + v_k \frac{\partial p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}_{-k}]} }{\partial \mathbf{m}} + \mathbf{e}_k^T p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}$$

составляющей правой части (37). Тогда после представления первого слагаемого в (37) на основе (30) и преобразования второго с учётом (33) из (37) следует (36).

Утверждение 7. Для аппроксимации $\tilde{p}$ (23) плотности вероятности $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}$ с МО $\mathbf{m}$ и ДМ $\mathbf{D}$ справедливо соотношение

$$x_k^0 [\mathbf{x}^0]^T \tilde{p} = \mathbf{f}_k^P + \mathbf{k}_k^P \mathbf{D}, \quad (38)$$

где $\mathbf{f}_k^P = \sum_{i=1}^n \{d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{f}^P + \mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} (v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i+k}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \},$

$\mathbf{k}_k^P = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{k}^P + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (v_k + 1) q_{\mathbf{v}_{+k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} p_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} + \mathbf{e}_k^T \tilde{p}$. Равенство (38) следует из умноженного на x_k^0 равенства (31) с учётом (36) (утверждение 6) и представления второго слагаемого на основе (29) (следствие 4.2) с учётом (33).

Базовым для получения представления $\bar{\mathbf{R}}_k$ является утверждение 7, которое основывается на утверждении 6 и важном следствии 4.2. Представление $\bar{\mathbf{R}}_k$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$ получим с учётом равенства $\bar{\mathbf{R}}_k = E \{ \mathbf{f}[\mathbf{x}] [\mathbf{x}^0]^T x_k^0 \} - \bar{\mathbf{f}} \mathbf{e}_k^T \mathbf{D}$, подставив (38) в соответствующий МО $\bar{\mathbf{R}}_k$ по определению n - кратный интеграл и поменяв в силу независимости функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ от компонентов $\mathbf{m}$ порядок интегрирования и дифференцирования, в виде

$$\bar{\mathbf{R}}_k \equiv \tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{D}. \quad (39)$$

Матричные коэффициенты $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{K}_k$ линеаризованного относительно $\mathbf{D}$ представления $\tilde{\mathbf{R}}_k$ (39) определяются как

$$\mathbf{F}_k = \sum_{i=1}^n \{d_{ik} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial m_i} + \mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} (v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i+k}} \bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]} \}, \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_k = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_i} + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (v_k + 1) q_{\mathbf{v}_{+k}} \mathbf{K}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}, \quad (41)$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}$, $\mathbf{K}_{\varepsilon}^{[\mathbf{v}]}$ определяют соотношения (24), (34), (35).

6. Метод вычисления $\bar{\Phi}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_k$. Основой алгоритмизации вычисления матричных составляющих правых частей уравнений ДДМ в негауссовском приближении является метод, предложенный в [3] для численного решения матричных уравнений МО и ДМ в гауссовском приближении. Как и в случае гауссовского приближения, метод позволяет построить эффективный алгоритм вычисления матричных правых частей уравнений ДДМ и дополнительных n уравнений (18) блоков матрицы $\mathbf{M}$, исключаяющий матричную операцию умножения. При этом вычисление матричных произведений в правых частях каждого матричного уравнения сводится к многократному вычислению

скалярных представлений соответствующих составляющих правой части линеаризованных уравнений модели состояния (1). Скалярная форма представления составляющих исключает при этом умножение на нулевые компоненты как матриц коэффициентов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ модели состояния (1), так и матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{K}_k$ линеаризованных представлений $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_k$ соответственно. Линеаризация уравнений модели (1) сводится всего лишь к формальной замене каждого из скалярных

компонентов φ её функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ его линеаризованным представлением вида $\varphi = \bar{\varphi} + \sum_{i \in I_\varphi} k_i x_i$, где I_φ –

множество индексов компонентов вектора состояния $\mathbf{x}$, составляющих её векторный аргумент. Формулы для коэффициентов $\bar{\varphi}$ и k_i получаются из представлений матричных коэффициентов с учётом структуры множества I_φ . Из представлений матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{K}_k$ следует, что вид формул коэффициентов $\bar{\varphi}$ и k_i не будет зависеть от типа нелинейной функции φ , а определится лишь размером множества I_φ и порядком решаемого на основе предлагаемого метода матричного уравнения моментов. Поэтому аналитические представления этих коэффициентов для произвольной нелинейной функции φ , к примеру, одного, двух и трёх скалярных аргументов могут быть получены на основе соответствующих представлений $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{K}_k$. При этом аналитические представления для входящих в них частных производных получаются из известных аналитических представлений коэффициентов статистической линеаризации в гауссовском приближении для типовых нелинейностей [1].

7. Упрощение дополнительного уравнения моментов третьего порядка. Несмотря на предложенный эффективный алгоритм вычисления матричных правых частей уравнений ДДМ (2) и дополнительных уравнений (18), вычислительные затраты на численное определение матрицы $\mathbf{M}$ (3) сравнительно велики.

Если $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ модели (1) зависит от всех n компонентов x_j , $j \in \mathfrak{I}_n$ вектора состояния $\mathbf{x}$, из представлений (34), (35), (40), (41) матричных коэффициентов соответственно $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{K}_k$ следует, что для замыкания уравнений ДДМ (2) потребуются компоненты лишь $n(n+1)/2$ столбцов $\mathbf{m}_{kj} = \mathbf{M}_k \mathbf{e}_j$, $k, j \in \mathfrak{I}_n$, $j \geq k$ блоков $\mathbf{M}_k$ (4) матрицы $\mathbf{M}$ (3). В этом случае возможность эквивалентного представления уравнения (3), (18) обуславливается очевидным в силу (4), (5) соотношением

$$\mathbf{M}_k \mathbf{e}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{e}_k, \quad (42)$$

где $k, j \in \mathfrak{I}_n$. Из соотношения (42) и неочевидного, но легко проверяемого равенства $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_i \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k$ следует, что уравнение (3), (18) эквивалентно системе $n(n+1)/2$ векторных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}_{kj} = (\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T) \mathbf{e}_j + \mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k, \quad (43)$$

где $k, j \in \mathfrak{I}_n$ и $j \geq k$. При этом из представлений (34), (35), (40), (41) следует, что вычисление составляющей $\mathbf{R}_k \mathbf{e}_j$ и компонентов $\tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{e}_j$, $\tilde{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{e}_k$ составляющих $\mathbf{R}_k^T \mathbf{e}_j$, $\mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k$ правой части уравнения (43) предполагает знание только компонентов одного столбца $\mathbf{m}_{kj}$, а вычисление компонентов $(\mathbf{A} \mathbf{M}_k)^T \mathbf{e}_j = \mathbf{M}_k \mathbf{A}^T \mathbf{e}_j$ и $(\mathbf{A} \mathbf{M}_j)^T \mathbf{e}_k = \mathbf{M}_j \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k$ тех же составляющих $\mathbf{R}_k^T \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k$ – всех компонентов двух матричных блоков $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_j$.

Систему уравнений (43) можно свести к одному эквивалентному матричному, аналогичному уравнению для матрицы $\mathbf{M}$ (3), (18). Определим матрицу $\hat{\mathbf{M}}$, эквивалентную $n(n+1)/2$ столбцам $\mathbf{m}_{kj}$,

$k, j \in \mathfrak{I}_n$, $j \geq k$ в виде блочной $n \times n(n+1)/2$ -матрицы $\hat{\mathbf{M}} = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{e}_k^T \otimes \hat{\mathbf{M}}_k\}$, где $\hat{\mathbf{M}}_k = \sum_{j=k}^n \{\mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes \mathbf{m}_{kj}\}$, а

$s_{jk} = j - k + 1$. Дифференцируя по t представление $\hat{\mathbf{M}}_k$, в силу (43) и следствия 2.1 получаем

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{M}}_k = (\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T) \hat{\mathbf{P}}_k + \sum_{j=k}^n \mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes (\mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k), \quad (44)$$

где $\hat{\mathbf{P}}_k = \sum_{j=k}^n \{\mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes \mathbf{e}_j\}$. Размеры единичных векторов $\mathbf{e}_{s_{jk}}$ и $\mathbf{e}_j$ в представлении $\hat{\mathbf{P}}_k$ равны

соответственно $n - k + 1$ и n . Матрицы $\hat{\mathbf{P}}_k$, $k \in \mathfrak{I}_n$ – прямоугольные размера $n \times (n - k + 1)$. Назовём их матрицами «перестановок с исключением». Так, $\hat{\mathbf{P}}_k$ в (44) – это матрица перестановок столбцов матрицы $\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T$ с номерами $j \in \mathfrak{I}_n$, $j \geq k$, исключаяющая при этом все столбцы, соответствующие $j < k$.

Матрицы $\hat{\mathbf{P}}_k$, $k \in \mathfrak{I}_n$ можно интерпретировать и как обобщённые прямоугольные матрицы перестановок, и как обобщение определённых в [4] квадратных матриц, ненулевые элементы которых – единичные поддиагонали или наддиагонали.

Для большинства многомерных нелинейных дифференциальных систем $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ модели (1) будет зависеть лишь от небольшого числа компонентов вектора состояния $\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ – функция $\tilde{n} < n$ произвольных компонентов $\mathbf{x}$ с индексами $j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$. Из представлений (34), (35), (40), (41) для матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{K}_k$ следует, что в этом случае для замыкания уравнений ДДМ потребуется знание компонентов лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ столбцов $\mathbf{m}_{kj}$, $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$, $j \geq k$ матриц-решений $\hat{\mathbf{M}}_k$ уравнений (44). Однако это не означает, что в общем случае потребуются лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ дополнительных уравнений вида (43), соответствующих $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$ и $j \geq k$. Дело в том, что вычисление $\mathbf{M}_k \mathbf{A}^T \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{M}_j \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k$ по-прежнему предполагает знание всех компонентов блоков $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_j$. Поэтому для вычисления столбцов $\mathbf{m}_{kj}$, $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$, $j \geq k$ придётся решать все n уравнений (44). Отсюда следует два вывода. Первый состоит в том, что для матрицы $\mathbf{A}$ общего вида упрощение дополнительных уравнений (44) невозможно, даже если $\tilde{n} < n$. Второй заключается в том, что возможность упрощения уравнений (44) в случае $\tilde{n} < n$ определяется только видом матрицы $\mathbf{A}$.

Пусть матрица $\mathbf{A}$ такая, что $\mathbf{A}^T \mathbf{e}_j = \sum_{i \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} a_{ji} \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{A}^T \mathbf{e}_k = \sum_{i \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} a_{ki} \mathbf{e}_i$. Тогда $\mathbf{M}_k \mathbf{A}^T \mathbf{e}_j = \sum_{i \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} a_{ji} \mathbf{m}_{ki}$ и

$\mathbf{M}_j \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k = \sum_{i \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} a_{ki} \mathbf{m}_{ji}$. Если же $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T a_{ii}\}$, то $\mathbf{M}_k \mathbf{A}^T \mathbf{e}_j = a_{jj} \mathbf{m}_{kj}$ и $\mathbf{M}_j \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k = a_{kk} \mathbf{m}_{kj}$. Очевидно, что

в обоих этих случаях для замыкания уравнений ДДМ потребуются лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ дополнительных уравнений вида (43), соответствующих $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$ и $j \geq k$. Причём, во втором случае эти уравнения будут несвязанными.

Упорядочим по возрастанию индексы $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$ и сопоставим с каждым соответствующий номер по порядку $v[k], v[j] \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$. Тогда соответствующие условию $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$, $j \geq k$ $\tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ дополнительных векторных уравнений можно свести к одному эквивалентному матричному, аналогичному полученному для матрицы $\hat{\mathbf{M}}$. Определим матрицу $\tilde{\mathbf{M}}$, эквивалентную $\tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ столбцам $\mathbf{m}_{kj}$, $k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}$, $j \geq k$ в виде блочной $n \times \tilde{n}(\tilde{n}+1)/2$ -матрицы $\tilde{\mathbf{M}} = \sum_{k \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{v[k]}^T \otimes \tilde{\mathbf{M}}_k\}$, где

$\tilde{\mathbf{M}}_k = \sum_{j \geq k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes \mathbf{m}_{kj}\}$, а $s_{jk} = v[j] - v[k] + 1$. Дифференцируя по t представление $\tilde{\mathbf{M}}_k$, в силу (43) и следствия 2.1 получаем

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{M}}_k = (\mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^T) \tilde{\mathbf{P}}_k + \sum_{j \geq k, j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} \mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes (\mathbf{R}_j^T \mathbf{e}_k), \quad (45)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}_k = \sum_{j \geq k, k \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{s_{jk}}^T \otimes \mathbf{e}_j\}$. Размеры единичных векторов $\mathbf{e}_{s_{jk}}$ и $\mathbf{e}_j$ в представлении $\tilde{\mathbf{P}}_k$ равны соответственно $\max_{j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} v[j] - v[k] + 1$ и n . Матрицы $\tilde{\mathbf{P}}_k$ – прямоугольные размера $n \times (\max_{j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} v[j] - v[k] + 1)$ по виду аналогичны матрицам $\hat{\mathbf{P}}_k$, $k \in \mathfrak{I}_n$.

В частном случае, если каждый компонент $\mathbf{f}[\mathbf{x}]$ модели (1) – функция только одного из $\tilde{n} < n$ компонентов $\mathbf{x}$, получаем $k = j$, $s_{kk} = 1$, $\max_{j \in \mathfrak{I}_{\tilde{n}}} v[j] = v[k]$ и в силу равенств $\tilde{\mathbf{M}}_k = \mathbf{m}_{kk}$ и $\tilde{\mathbf{P}}_k = \mathbf{e}_k$ матричное уравнение (45) совпадает с вариантом уравнения (43) для $\mathbf{m}_{kk}$. При этом матричное

уравнение $\tilde{\mathbf{M}}$ распадается на $\tilde{n}$ независимых эквивалентных векторных уравнений $\frac{d}{dt} \mathbf{m}_{kk} = (\mathbf{R}_k + 2 \mathbf{R}_k^T) \mathbf{e}_k, k \in \mathfrak{T}_{\tilde{n}}$.

Заключение. Алгоритмизация корреляционного анализа стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы на основе предложенного метода построения ДДМ представляется эффективным средством численного решения как задач статистического анализа и параметрического синтеза в негауссовском приближении при асимметрии плотности вероятности системы, так и задачи оценки точности корреляционного анализа дифференциальной системы в гауссовском приближении. Более детальное описание предлагаемого метода и результатов исследования всех аспектов проблемы эффективной алгоритмизации вычисления $\overline{\varphi}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_k$, в том числе и формулы определения коэффициентов $\overline{\varphi}$ и k_i для скалярной функции φ одного, двух и трёх скалярных аргументов, будут приведены в следующей статье. Она будет целиком посвящена проблематике эффективной алгоритмизации метода корреляционного анализа дифференциальных систем на основе предложенной ДДМ в негауссовском приближении.

Направление дальнейших исследований естественно связать с продолжением рассмотрения проблематики построения ДДМ в негауссовском приближении, только уже при симметрии плотности вероятности вектора состояния. Известно, что в этом случае все центральные моменты нечётного порядка плотности вероятности обращаются в нуль. Поэтому в качестве дополнительного для замыкания системы уравнений ДДМ естественно определить матричное уравнение центральных моментов четвёртого порядка. По аналогии с рассмотренным случаем асимметрии, при симметрии распределения вероятностей также представляет интерес исследование возможности повышения эффективности применения ДДМ в негауссовском приближении для корреляционного анализа и синтеза за счёт упрощения её дополнительного уравнения.

Библиографический список

1. Пугачёв В.С. Стохастические дифференциальные системы / В.С. Пугачёв, И.Н. Сеницын. — М.: Наука, 1985. — 560 с.
2. Богуславский И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления / И.А. Богуславский. — М.: Наука, 1983. — 400 с.
3. Захаров В.В. Корреляционный анализ нелинейных непрерывно-дискретных систем/ В.В. Захаров, Г.А. Агранович // Вест. СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1997. — Вып. 7. — С. 32 – 36.
4. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.

Поступила в редакцию 14.09.2006 г.