

УДК 681.5

О.Г. Подольская, ст. преподаватель

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, 99053, Украина

E-mail: pu541@sevcom.net

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О МАКСИМИЗАЦИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Выполнен сравнительный анализ применения метода конечного состояния (МКС) и принципа максимума Понтрягина для решения экономической задачи максимизации потребления. Показано, что терминальное МКС-управление практически не отличается от оптимального управления.

В практике оптимизации задача терминального управления занимает особое место, так как единственной целью управления ставится соблюдение заданных граничных условий управляемой системы и дополнительных требований к фазовой траектории не предъявляется. Для решения терминальных задач разработан ряд методов, наиболее известным из которых является метод на основе использования необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Применяются и другие подходы, например [1 – 3]. В [2, 3] предложен терминальный «метод конечного состояния» для систем с различными видами математических моделей.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ результатов применения метода конечного состояния и оптимального управления, полученного на основе использования принципа максимума. В качестве объекта применения методов рассмотрена экономическая задача максимизации потребления [4].

В [4] рассматривается задача максимизации потребления за счет оптимального коэффициента капитализации $\alpha(t)$ на заданном интервале времени $[0, t_f]$ с критерием оптимальности

$$J(\alpha(\cdot)) = \int_0^{t_f} (1 - \alpha(t)) F(K, L) dt \rightarrow \max \quad (1)$$

и моделью объекта управления:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \alpha F(K, L) - \beta K, \quad K(0) = K^0. \quad (2)$$

В задаче (1), (2) $K(t)$ – накопленный за время t капитал; $F(K, L)$ – производственная функция; $L(t)$ – изменение численности работников во времени (предполагается константой); $\alpha \in [0, 1]$ – коэффициент капитализации (управляющее воздействие); β – доля выбытия капитала; K^0 – начальный капитал.

Метод конечного состояния предназначен для расчета управления в терминальной задаче

$$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \quad \frac{dx}{dt} = \Phi(t, x) + B(t, x(t)) \cdot u(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0, \quad (3)$$

где x, u – соответственно n - и r - мерные векторы состояния и управления; x^0 – известный вектор начальных условий; Φ – нелинейная дифференцируемая вектор-функция; B – $(n \times r)$ - матрица коэффициентов при r - мерном векторе управления $u(t)$; J – целевая функция критерия; J^* – желаемое достижимое значение критерия.

МКС-управление рассчитывается по следующему алгоритму:

$$u(t) = G^+ f_J, \quad G^+ = \frac{G^T}{GG^T}, \quad G = \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)_{x=y(t_f, t, x(t))} W(t_f, t, x(t)) B(t, x(t)),$$
$$f_J = \frac{J^* - J(y(t_f, t, x(t)))}{T_u}, \quad (4)$$
$$\vartheta \in [t, t_f], \quad y(t, t, x(t)) = x(t), \quad W(t, t, x(t)) = I.$$

Здесь y – вектор переменных конечного состояния (ПКС); W – нелинейная переходная матрица, зависящие от двух временных ϑ, t и пространственного аргумента $x(t)$.

ПКС и переходная матрица определяются совместной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=y(\vartheta, t, x(t))} \cdot W(\vartheta, t, x(t)),$$
$$\frac{dy(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \Phi(\vartheta, t), \quad (5)$$
$$\vartheta \in [t, t_f], \quad W(t, t, x(t)) = I, \quad y(t, t, x(t)) = x(t).$$

В алгоритме (4) имеется регулировочный параметр $T_u \ll t_f$, который позволяет управлять скоростью приближения так называемой критериальной функции времени t $J(y(t_f, t, x(t)))$ к заданному значению критерия J^* , а также в определенной степени регулировать амплитуду управляющего воздействия.

Для применения метода конечного состояния к решению поставленной задачи приведем систему (1), (2) к терминальному виду. Для этого продифференцируем (1) по t . В результате получим дополнительное дифференциальное уравнение для величины потребления как функции времени, которую обозначим $J(t)$. В итоге получаем задачу оптимального управления в форме Майера

$$J = x_1(t_f) \rightarrow \max,$$
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (1 - \alpha(t)) \cdot F(x_2(t), L(t)),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \alpha(t) \cdot F(x_2(t), L(t)) - b \cdot x_2(t), \quad (6)$$
$$t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0, \quad \alpha \in [0, 1],$$

где x^0 – известный вектор начальных условий; символами $x_1(t)$, $x_2(t)$ обозначены соответственно $J(t)$ и $K(t)$, $F(x_2(t), L(t)) = a_0 \cdot x_2^{a_1} \cdot L^{a_2}$.

Сравнивая задачи (3) и (6), видим, что (3) удовлетворяет всем требованиям задачи (6) за исключением того, что (6) – задача достижения максимального значения критерия, а (3) – задача приведения критерия к заданному значению. Отказ от требования оптимальности позволяет рассчитать управление более простым способом, в частности, методом конечного состояния. Для максимизации же критерия задачу (3) можно решать многократно, постепенно увеличивая значение J^* до тех пор, пока оно не выйдет на границу области достижимости. В методе конечного состояния указанная область обнаруживается по отклонению фактического и теоретического поведения критериальной функции $J(y(t_f, t, x(t)))$. При заданном в (4) выражении для функции f_J теоретическое поведение критериальной функции соответствует экспоненте с показателем $-(t - t_0)/T_u$, а фактическое значение в момент t в соответствии с (4), (5) рассчитывается предварительным интегрированием однородной системы на интервале $[t, t_f]$ с начальным условием $y(t, t, x(t)) = x(t)$ и подстановкой полученного конечного значения $y(t_f, t, x(t))$ в выражение для целевой функции критерия J .

Для расчета МКС-управления по алгоритму (4), (5) взяты следующие параметры системы (6) [4]: $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,2$; $a_0 = 1,002$; $a_1 = 0,5382$; $a_2 = 0,4618$; $L = 1,3$; $t_0 = 0$; $t_f = 10$; $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = 2$; $T_u = 0,1$; $J^* = 16$. Интегрирование дифференциальных уравнений системы (6) производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом $h = 0,1$.

Расчеты производились с помощью специализированного пакета, в котором реализован метод конечного состояния для расчета МКС-управлений. В указанном пакете реализован алгоритм (4), (5), а также амплитудные ограничения на управляющие воздействия. Амплитудные ограничения для коэффициента капитализации взяты такие же, как в постановке задачи (6), т.е. 0 (нижнее ограничение) и 1 (верхнее ограничение). Ниже показаны графики зависимостей координат $x_1(t)$ (текущего потребления), $x_2(t)$ (накопленного капитала) и МКС-управления $\alpha(t)$ (коэффициента капитализации).

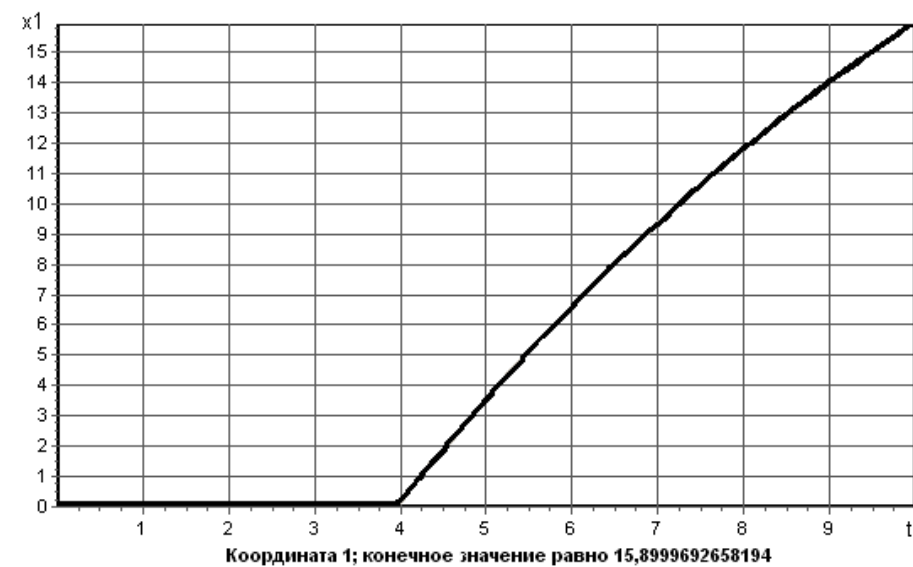


Рисунок 1 – Зависимость текущего потребления от времени для случая МКС-управления

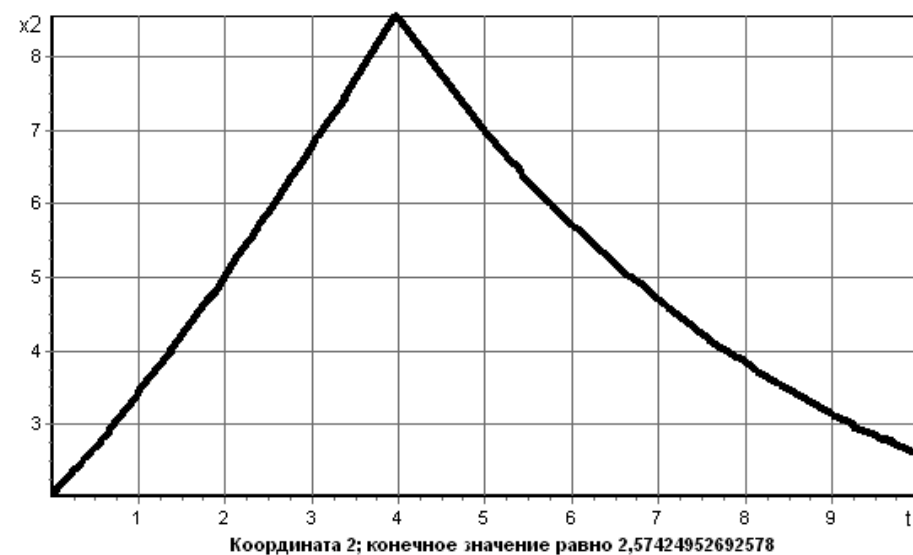


Рисунок 2 – Зависимость накопленного капитала от времени для случая МКС-управления

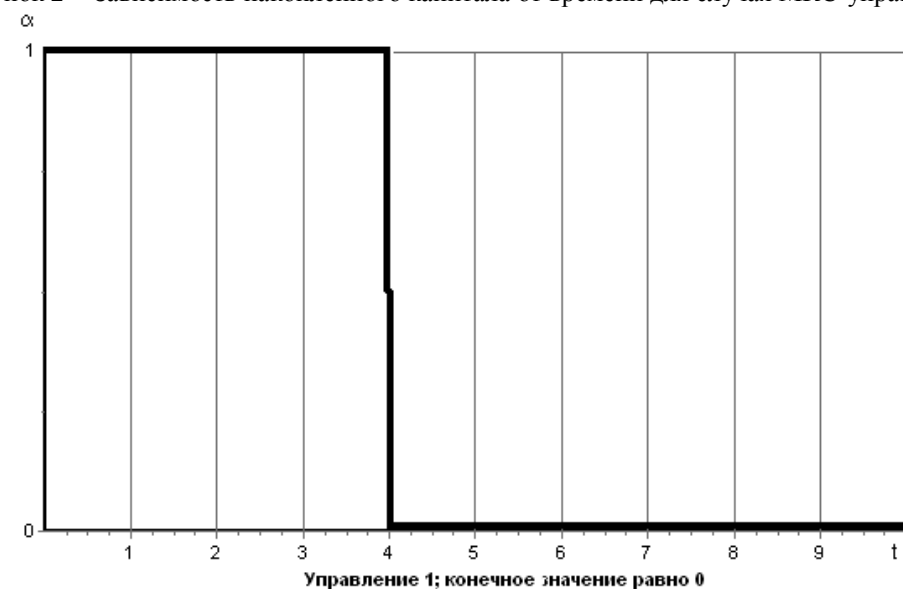


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента капитализации от времени для случая МКС-управления

На рисунке 4 изображен рабочий лист Mathcad, где реализован алгоритм расчета оптимального управления на основе использования принципа максимума [4] и приведены графики для оптимальных зависимостей от времени координат системы и управляющего воздействия. Отметим, что на рабочем листе координата $x_0(t)$ соответствует накопленному к моменту t капиталу, $x_1(t)$ – сопряженная переменная, входящая в гамильтониан и используемая для расчета оптимального управления.

$$\begin{aligned}
 a_0 &:= 1.002 & a_1 &:= 0.5382 & a_2 &:= 0.4618 & L &:= 1.3 \\
 Y(K, L) &:= a_0 \cdot K^{a_1} \cdot L^{a_2} & \alpha &:= 0.3 & \beta &:= 0.2 \\
 \text{Ham}(K, L, p) &:= (1 - \alpha) \cdot Y(K, L) + p \cdot (\alpha \cdot Y(K, L) - \beta \cdot K) \\
 \alpha_{\max}(K, p) &:= \text{if} \left[(a_0 \cdot a_1 \cdot K^{a_1-1} \cdot L^{a_2}) \cdot (p - 1) \geq 0, 1, 0 \right] \\
 f(K, p) &:= \alpha_{\max}(K, p) \cdot Y(K, L) - \beta \cdot K \\
 f_s(K, p) &:= - \left[(1 - \alpha_{\max}(K, p)) \cdot (a_0 \cdot a_1 \cdot K^{a_1-1} \cdot L^{a_2}) \right] - p \cdot (\alpha_{\max}(K, p) \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot K^{a_1-1} \cdot L^{a_2} - \beta) \\
 f_{\max}(t, x) &:= \begin{pmatrix} f(x_0, x_1) \\ f_s(x_0, x_1) \end{pmatrix} & f_{\max} \left[1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.41 \end{pmatrix} \\
 x_0 &:= 2 & x_{k0} &:= 3 & f_1(t_1, v) &:= \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} & t_1 &:= 0 & t_2 &:= 10 \\
 f_2(t_2, x) &:= x_1 - 0 & a &:= \text{sbval}(x, t_1, t_2, f_{\max}, f_1, f_2) & N &:= 100 & i &:= 0..N \\
 x_1 &:= a_0 & y^{(0)} &:= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} & z &:= \text{rkfixed}(y, 0, 10, N, f_{\max}) \\
 \alpha_{1i} &:= \alpha_{\max} \left[\left(z^{(1)} \right)_i, \left(z^{(2)} \right)_i \right] \\
 K_{10} &:= x_0 & K_{1i+1} &:= K_{1i} + (\alpha_{1i} \cdot Y(K_{1i}, L) - \beta \cdot K_{1i}) \cdot \frac{t_2}{N} \\
 s_{1i} &:= (1 - \alpha_{1i}) \cdot Y(K_{1i}, L) & I &:= \sum_i s_{1i} \cdot \frac{t_2}{N} & I &= 16.09
 \end{aligned}$$

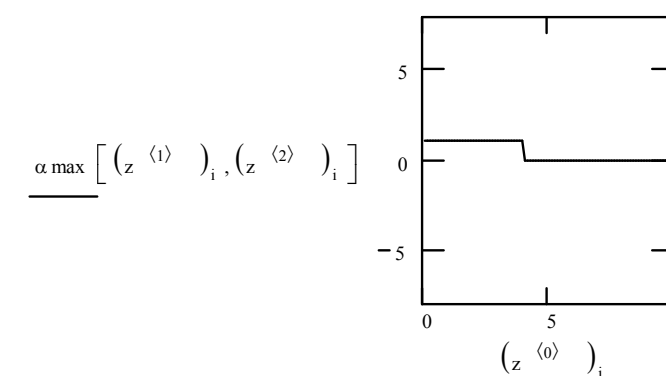
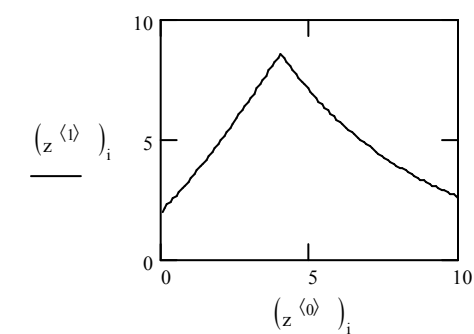


Рисунок 4 – Рабочий лист Mathcad

Анализ приведенных зависимостей показывает, что накопленный капитал и управляющие воздействия, полученные двумя методами, практически совпадают. Так, оптимальное значение критерия, полученное в Mathcad-программе (16,09) отличается от соответствующего значения, полученного с помощью МКС-управления (15,9) на 1,12 %, что укладывается в пределы методических и вычислительных погрешностей.

Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют в пользу эффективности метода конечного состояния. В общем случае для расчета оптимального управления с помощью принципа максимума требуется решать краевую задачу для сопряженных переменных, что является трудоемкой вычислительной задачей. В методе же конечного состояния для расчета управления решается задача Коши, для которой имеется много достаточно точных численных методов. С учетом выполненных ранее исследований применения метода конечного состояния (для задач управления нелинейными экономическими, социальными и другими системами) можно утверждать, что указанный метод является эффективным и перспективным средством решения нелинейных задач управления в различных областях.

Одной из задач исследования в данном направлении является решение задачи максимизации потребления в непрерывно-дискретной постановке, когда коэффициент капитализации, в соответствии с реальной практикой, изменяется дискретно во времени (например, один раз в год, в соответствии с решением собрания акционеров). В этом случае применение принципа максимума весьма затруднительно, а для решения задачи может быть использован метод конечного состояния для непрерывно-дискретных систем [3].

Библиографический список

1. Батенко А.П. Системы терминального управления / А.П. Батенко. — М.: Радио и связь, 1984. — 160 с.
2. Шушляпин Е.А. Синтез линейных и нелинейных систем управления конечным положением на основе моделей конечного состояния / Е.А. Шушляпин // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 3. — С. 10 – 16.
3. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными непрерывно-дискретными системами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, О.Г. Подольская // Труды IV Международной конференции SICPRO'05. — М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2005. С. 1495 – 1513.
4. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учебн. пособие. / В.А. Охорзин. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 144 с.

Поступила в редакцию 16.03.2007 г.