

УДК 621.52

В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук,

А.И. Балакин, ассистент,

О.В. Филипович, канд. техн. наук, доцент,

Е.А. Волошина, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: ps@sevgtu14.sebastopol.ua

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ОЦЕНКИ ЧИСЛА МНОГОКРАТНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Рассматривается повышение точности измерительных систем на основании выбора числа многократных двухпараметрических измерений зависимых величин, минимальное число которых определяется на основе анализа дифференциальной энтропии измеряемых величин.

Повышение точности измерительных систем является необходимым условием улучшения качества продукции.

Известен подход [1], основанный на выборе оптимального числа многократных двухкоординатных измерений независимых величин, позволяющий уменьшить дисперсию их результата. В указанной работе необходимый минимум числа повторных измерений выбирается на основе анализа дифференциальной энтропии измеряемых величин, максимум которой соответствует наиболее неблагоприятному варианту.

Целью данной работы является распространение указанного подхода на двухпараметрические измерения зависимых величин, например измерения шага и среднего диаметра резьбы. Основной сложностью является определение вида двумерной плотности распределения $p(x, y)$ зависимых центрированных случайных величин, имеющих нулевое математическое ожидание ξ_x , ξ_y , являющихся погрешностями измерений по координатам x, y , при известных предельных значениях этих погрешностей $(\pm\alpha)$, $(\pm\beta)$. Кроме этого предполагается, что из статистических исследований известны $\mu_{02}[x, y]$, $\mu_{20}[x, y]$, $\mu_{11}[x, y]$ – центральные моменты случайных величин ξ_x , ξ_y .

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом.

Необходимо определить

$$\max \rightarrow \left\{ H_{\text{оуф.}} = - \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x, y) \cdot \ln p(x, y) \cdot dx \cdot dy \right\}, \quad (1)$$

при условиях:

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x, y) \cdot dx \cdot dy = 1, \quad (2)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \mu_{20}[x, y], \quad (3)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \mu_{02}[x, y], \quad (4)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x y p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \mu_{11}[x, y]. \quad (5)$$

Здесь $\mu_{02}[x, y]$, $\mu_{20}[x, y]$, $\mu_{11}[x, y]$ – центральные моменты второго порядка случайных величин ξ_x , ξ_y , указанные выше.

Выражение для двумерной плотности определяем на основе решения уравнения Эйлера

$$F_{\sum}(x, y) = -p(x, y) \cdot \ln p(x, y) + \lambda_1 p(x, y) + \lambda_2 x y p(x, y) + \lambda_3 x^2 p(x, y) + \lambda_4 y^2 p(x, y),$$

$$\frac{dF_{\sum}(x, y)}{dP(x, y)} = -\ln P(x, y) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2 = 0,$$

$$p(x, y) = e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2}, \quad (6)$$

где λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 – множители Лагранжа.

Подставив выражение (6) в систему ограничений (2) – (5), соответственно получим:

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = 1, \quad (7)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \mu_{20}[x, y], \quad (8)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \mu_{02}[x, y], \quad (9)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x y e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \mu_{11}[x, y]. \quad (10)$$

Разделив, уравнения (7) – (10) на свою правую часть, приведем их к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = 1, \\ &\frac{1}{\mu_{20}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = 1, \\ &\frac{1}{\mu_{02}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = 1, \\ &\frac{1}{\mu_{11}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x y e^{-1+\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = 1. \end{aligned} \right.$$

Вычтя из каждого уравнения первое, получим систему с тремя неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{20}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{02}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{11}[x, y]} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x y \cdot e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_2 x y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2} \cdot dx \cdot dy. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Решая численно систему уравнений (11) – (13), получаем значения λ_2 , λ_3, λ_4 , а величину λ_1 определяем из соотношения (7).

Результаты моделирования величины $p(x, y)$ с использованием (6) при следующих параметрах $\mu_{11}[x, y] = 0,1$, $\sigma_x^2 = 0,2$, $\sigma_y^2 = 0,1$ показаны на рисунке 1.

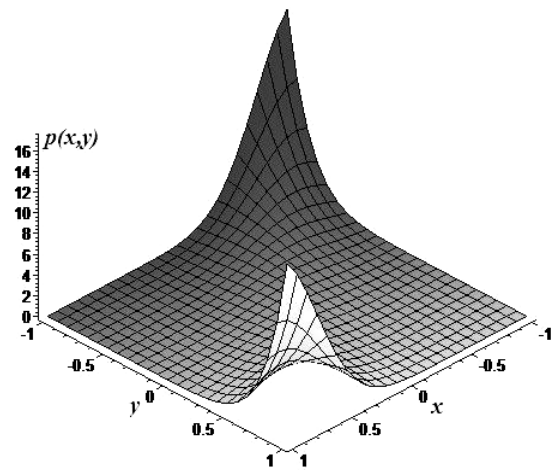


Рисунок 1 – Результаты моделирования величины $p(x, y)$

Вследствие того, что прибор имеет погрешность, при его показаниях, соответствующих предельным или близким к ним значениям измеряемой величины, ограниченной допуском, нельзя достоверно утверждать, что воспроизводимая величина находится в пределах этого допуска. Поэтому, чтобы получить достоверную информацию о том, что измеряемая величина находится в допустимых пределах, необходимо уменьшить поле допуска этой величины на значение удвоенной предельной погрешности прибора. Однако это значительно сужает область допустимых значений, что усложняет в целом технологический процесс. Указанный недостаток можно устранить, повысив точность результата измерения за счёт увеличения числа многократных измерений, которые, как указывалось выше, снижают дисперсию конечного результата.

Число измерений зависит от значения измеряемой величины, находящейся в пределах поля допуска. Во всех случаях поле допуска, как по координате x , так и по координате y следует снизить соответственно на величины δ_x , δ_y , которые намного меньше допустимых погрешностей прибора:

$$\delta_x \ll 2\alpha, \delta_y \ll 2\beta.$$

Величины δ_x , δ_y и вероятности выхода результатов измерений за границу полей допусков P_{Dx} и P_{Dy} задаются разработчиком, исходя из вида и устойчивости технологического процесса и метрологических характеристик средств измерения. По заданным δ_x , δ_y и P_{Dx} и P_{Dy} определяются требуемые значения верности ε_x^2 и ε_y^2 по каждой из координат. В случае независимых переменных x, y в [1] это осуществлялось с использованием метода последовательных приближений следующим образом. Задавались ε_x^2 и ε_y^2 и решалась задача определения максимума функционала (1) при заданных условиях. Необходимо отметить, что ε_x^2 и ε_y^2 подставляются в условия вместо $\sigma_x^2 = \mu_{02}[x, y]$, $\sigma_y^2 = \mu_{20}[x, y]$. Далее по найденным плотностям $p_1(x)$ и $p_2(y)$ определяются вероятности выхода результатов измерений за границы полей допусков и сравниваются с заданными значениями P_{Dx} и P_{Dy} . Если они больше P_{Dx} и P_{Dy} , то ε_x^2 и ε_y^2 уменьшались и вновь решалась поставленная задача. Процесс продолжался до тех пор, пока не выполнялись указанные условия. После того, как ε_x^2 и ε_y^2 были найдены, определялись числа повторных измерений:

$$n_x = \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon_x^2}, \quad n_y = \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_y^2}.$$

В данном случае, при условии зависимости величин ξ_x , ξ_y возникает вопрос, каким будет корреляционный момент между новыми случайными величинами $\bar{\xi}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}$ и $\bar{\xi}_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_{y_j}$, образовавшимися в результате многократных измерений.

Выражение для нового корреляционного момента можно записать в виде:

$$M[\bar{\xi}_x \bar{\xi}_y] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{x_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_{y_j}\right] = \frac{1}{n^2} M\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_{x_i} \xi_{y_j}\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[\xi_{x_i} \xi_{y_j}]. \quad (14)$$

Так как совокупность величины ξ_{x_i} представляет собой совокупность независимых случайных величин, имеющих одинаковые функции распределения, как и совокупность величин ξ_{y_j} , то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[\xi_{x_i} \xi_{y_j}] = n^2 M[\xi_x \xi_y].$$

Тогда выражение (14) можно записать в виде

$$M[\bar{\xi}_x \bar{\xi}_y] = M[\xi_x \xi_y]. \quad (15)$$

Из (15) видно, что в результате проделанной операции центральный корреляционный момент не изменяется.

Таким образом, задача определения минимально необходимого числа измерений решается в соответствии с алгоритмом описанным выше, с учетом того факта что в результате многократных измерений центральный корреляционный момент остается постоянным.

Предложенный метод позволяет выбрать минимальное число повторных измерений, удовлетворяющее требуемому условию точности.

Дальнейшие исследования будут направлены на обобщение предложенного подхода и обоснованного доказательства того факта, что полученный закон совместного распределения двух конечных случайных величин соответствует усеченному двухпараметрическому нормальному закону распределения.

Библиографический список

1. В.Я. Копп. Оптимальная оценка числа измерений приборных систем / В.Я. Копп, А.И. Балакин, А.А. Скидан и др. // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь. — 2006. — Вып. 9. — С. 92 – 98.

Поступила в редакцию 14.02.2007 г.

