

УДК 62-507

А.Т. Барабанов, проф., д-р техн. наук

А.Н. Балабанов

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua

О ПРИМЕНЕНИИ СООТНОШЕНИЯ БАССА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Рассматривается метод построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе соотношения Басса. Стабилизирующее решение определяется как симметрическое решения соответствующего линейного матричного уравнения с условием ранга для матрицы коэффициентов. Предлагается алгоритм решения этого уравнения

1. Исходные положения. В решении задачи линейно-квадратической оптимизации (ЛКО), нашедшей широкое применение в теории и практике проектирования систем автоматического управления, задача построения оптимального управления для стационарных САУ сводится к построению стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати (СР АУР). В настоящей работе рассматривается возможный подход к решению задачи на основе линейного матричного уравнения.

2. Постановка задачи. Пусть система (объект управления) и её критерий качества имеют вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m; \quad (1)$$

$$I^2 = \int_0^\infty [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)]dt, \quad P \geq 0, R > 0. \quad (2)$$

Оптимальное управление, как известно [1], определяет соотношение

$u(t) = -R^{-1}B^T Kx(t)$, где K – СР АУР

$$A^T K + KA + P - KQK = 0, \quad Q = BR^{-1}B^T, \quad (3)$$

т.е. такое, что матрица $A_* = A - QK$ – гурвицева.

3. Построение СР АУР. Существуют различные подходы к построению СР АУР. в частности, методы [1], основанные на свойствах матрицы Гамильтона H $H = \begin{bmatrix} A & -Q \\ -P & -A^T \end{bmatrix}$, $H \in R^{2n \times 2n}$.

Пусть матрица H не имеет собственных чисел, принадлежащих мнимой оси. Тогда, как известно [1], характеристический многочлен $\Delta(s) = \det(sI_{2n} - H)$ матрицы H имеет кососимметрический спектр, т.е. если $\Delta(\lambda) = 0$, то и $\Delta(-\lambda) = 0$. Пусть выполнена факторизация $\Delta(s) = (-1)^n q(s)q(-s)$, где многочлен $q(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ – гурвицев. Тогда для построения СР АУР может быть применено линейное матричное уравнение, известное как соотношение Басса [1]

$$q(H) \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} = 0, \quad q(H) \in R^{2n \times 2n}. \quad (4)$$

Пусть матрица $q(H) = H^n + a_1 H^{n-1} + \dots + a_{n-1} H + a_n I$ представлена в виде $q(H) = U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$.

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} U_{11} + U_{12}K = 0, \\ U_{21} + U_{22}K = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{или } LK + M = 0, \quad L = \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Можно показать, что при условии

$$\text{rank } L = n \quad (7)$$

выполняется также условие $\text{rank}[L \quad M] = n$ и решение системы (6) единственное, симметрическое и определяет СР АУР, т.е. матрица $A_* = A - QK$ гурвицева и $\det(sI_n - A_*) = q(s)$. Будем далее рассматривать уравнение (6) в форме

$$\begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, задача построения СР АУР сводится к построению решения линейного матричного уравнения (8). Отметим, что возможен случай, когда оба уравнения в системе (5) неопределённые (U_{12} и U_{22} – вырождены), но условие (7) выполняется.

Рассмотрим один из возможных вариантов анализа и построения решения уравнения (8). Выполняя элементарные операции над строками матрицы $[L \quad M]$, выполним её приведение по алгоритму Гаусса (или любому его обобщению [2]) к ступенчатой форме. Тогда при условии (7)

приведения матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} G & F \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где $G \in R^{n \times n}$ и является верхне треугольной

невырожденной матрицей, $F, S \in R^{n \times n}$. При условии (7) имеем также $S = 0$, что выражает условие совместности системы (6). Точность выполнения этого условия определяется точностью данных и вычислений.

Итак уравнение (8) при условии (7) принимает вид

$$GX + F = 0. \quad (9)$$

Пусть x^j, f^j – j -е столбцы матриц X, F соответственно, $j=1, 2, \dots, n$. Матричному уравнению (9) соответствует система векторных уравнений

$$Gx^j + f^j = 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Каждое из этих уравнений при условии (7) разрешимо (совместно) и имеет единственное решение. Совокупность всех n решений даёт матрицу X – решение уравнения (8), которое оказывается симметрическим. В итоге имеем $X = K$ – СР АУР (3).

Остаётся заметить, что в силу симметрии матрицы X вычисления можно сократить. При $j=1$ имеем систему в гауссовой форме для вектора $x^1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})^T$ с верхнее треугольной матрицей $G_1 = G$ и вектором $f^1 = (f_{11}, f_{21}, \dots, f_{n1})^T$. На последующих шагах порядок систем (10) с верхне треугольными матрицами G_j последовательно уменьшается ($j=2, 3, \dots, n$) исключением первого, второго, ..., « $j-1$ »-го уравнений. В результате получаем систему, дающую матрицу решение

$$\begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & x_{n-1n-1} & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n-1n} & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Все исключённые уравнения при указанном условии ($\text{rank } L = n$) удовлетворяются «автоматически» при замене $x_{ij} = x_{ji}$, $i=1, 2, \dots, j-1$ – переменными, найденными на предыдущих шагах. Практически из-за накопления ошибки вычислений соответствующие равенства выполняются с точностью до машинного нуля, выбор которого определяется данными и условиями задачи.

4. Применение рассмотренной методики на примере малой размерности.

Пусть САУ вида (1) и функционал (2) заданы матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

По матрице Гамильтона

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

находим многочлены $\Delta(s), q(s)$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s-1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)(s-1)(s+3)(s-3), \quad q(s) = (s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3.$$

Далее, вычисляя матрицу $q(H) = H^2 + 4H + 3I_4$, находим

$$U=q(H)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \\ -5 & -20 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad [L \quad M]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 20 \\ 8 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

Выполняя элементарные операции над строками матрицы $[L \quad M]$, получим уравнения

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ I_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} = 0.$$

Из последнего определяем СР АУР

$$K = X = \begin{pmatrix} \frac{15}{32} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 5 \end{pmatrix}.$$

Исключённому уравнению $8x_{12} - 3x_{22} + 5 = 0$ удовлетворяют $x_{12} = x_{21} = 5$, $x_{22} = 20$.

5. Построение СР АУР в задаче управления летательным аппаратом (ЛА). Предлагаемая методика испытывалась в задаче построения оптимального управления боковым движением при выходе на взлётно-посадочную полосу (ВПП) тяжёлого гражданского самолёта Боинг 747 [3].

Управление состоит в осуществлении последовательных боковых маневров перехода самолёта с одной трассы на другую (рисунок 1) до выхода на осевую линию ВПП.

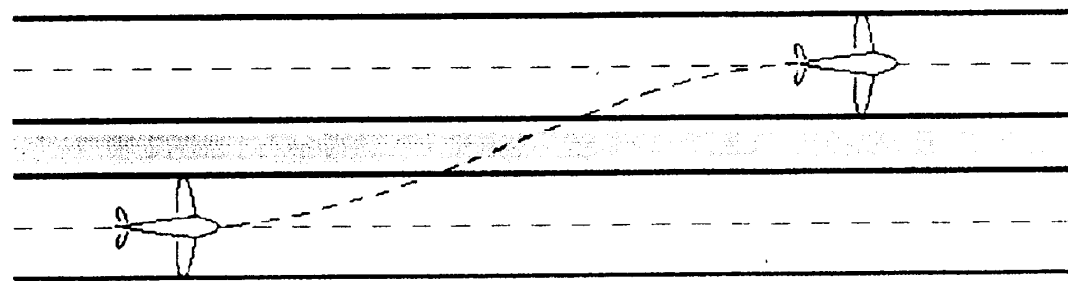


Рисунок 1 – Переход ЛА с одной трассы на другую

Такие S-образные маневры совершаются с помощью элеронов и рулей направления и представляет собой процесс координированного управления боковым движением.

В общем случае процессы в аэромеханике самолета при боковом маневре нелинейны. Во многих задачах, когда переменные малы (движение неинтенсивное), возможно использование линейных уравнений. Будем рассматривать линеаризованную модель вида (1) с численными параметрами представленными в [3]

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0,089 & -2,190 & 0,328 & 0,319 & 0 & 0 \\ 0,076 & -0,217 & -0,166 & 0 & 0 & 0 \\ -0,602 & 0,327 & -0,975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,150 & 1,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,000 & 0 & 0 & 0 & 2,210 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega_y \\ \omega_x \\ \gamma \\ \psi \\ z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,0327 \\ 0,0264 & 0,151 \\ 0,227 & -0,0636 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\gamma} \\ \delta_H \end{pmatrix},$$

здесь $x = (v \quad \omega_y \quad \omega_x \quad \gamma \quad \psi \quad z)^T$ – вектор состояния системы, $u = (\delta_{\gamma} \quad \delta_H)^T$ – вектор управления; γ – угол крена; ψ – угол рыскания; ω_x – угловая скорость вращения вдоль продольной оси; ω_y – угловая скорость вращения в горизонтальной плоскости; v – скорость бокового скольжения; z – (земная координата) боковое перемещение; δ_{γ} – угол отклонения элеронов; δ_H – угол отклонения руля направления.

Уравнения записаны в относительных величинах. За единицы для углов принято 0,01 рад, а для скоростей – 0,305 м/с, соответственно для перемещений 0,305 м.

Закон управления определён в виде обратной связи (3) методом ЛКО. Для решения задачи ЛКО примем

$$P = \begin{bmatrix} 0,7921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,1069 \end{bmatrix},$$

несколько упрощая функционал, введённый в [3].

6. Результаты расчётов. Результаты расчётов дают оценку нормы матрицы разности $\|K_M - K\| < 10^{-12}$, где K_M – решение, полученное применением стандартной функции care Matlab. Здесь под нормой понимается максимальное из абсолютных значений элементов матрицы. Эта оценка позволяет сделать заключение об успешности работы предложенной методики построения СР АУР.

Таким образом данная работа представляет определенный вклад в дальнейшее развитие численных и аналитических методов проблемы построения СР АУР. В дальнейшем возможно развитие результатов с учетом специфики задач стохастического и детерминированного оптимального управления.

Все численные процедуры позволяет реализовать следующая скрипт-программа на языке Matlab

```
%*****НАЧАЛО*****
[A,B,P,R,n,m]= SetValue; %МАТР. СООТВ-Х РАЗМЕРНОСТЕЙ, ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ И КРИТЕРИЯ
H=[A (-B*inv(R)*B'); -P -A']; %МАТРИЦА ГАМИЛЬТОНА Н
pnH= poly(H); %pnH - ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН Н
qs= polyfctr(pnH); U= polyvalM(qs,H); %qs - МНОГОЧЛЕН ФАКТОРИЗАЦИИ, U= qs(H)
[U11,U12,U21,U22]= blocks4(U); L= [U12;U22]; M= -[U11;U21]; %БЛОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ МАТРИЦЫ U
K1= -inv(U12)*U11; K2= -inv(U22)*U21; %РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (5)
K= SME(L,M,1e-10) %ПОИСК СИММЕТРИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ
```

ВИДА (6)

```
Kml= care(A,B,P,R) %НАХОЖДЕНИЕ СР АУР СТАНДАРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ МАТЛАВ
max(max(abs(Kml-K))) %ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ НАЙДЕННЫХ РЕШЕНИЙ
%*****КОНЕЦ*****
```

function [X,key]= SME(A,B,eps_)

%РЕШАЕТ МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИДА $A \cdot X = B$ С СИММЕТРИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ $X = X^T$; A, B - МАТРИЦЫ $m \times n$, $m > n$

```
n= size(A,2);
[ans,U]= lu([A B]);
key=1;
X= zeros(n);
for i= 1:n
    for j=n:-1:1
        s=0;
        for m= (j+1):1:n, s= s+U(j,m)* X(m,i); end;
        X(j,i)= 1/U(j,j) * (U(j,n+i) - s);
    end;
    for j=(i-1):-1:1
        s=0;
        for m= (j+1):1:n, s= s+U(j,m)* X(m,i); end;
        Ks= 1/U(j,j) * (U(j,n+i) - s);
        if abs(Ks - X(i,j)) > eps_
            disp(['УР-Е НЕ ИМ. СИММЕТР-ГО РЕШ-Я ИЛИ ']);
            disp(['РЕШ-Е НЕ ДОСТ-Т ЗАД. ТОЧНОСТИ EPS= ' num2str(eps_)]);
            key=0;
            return;
        end;
        X(j,i)= Ks;
    end;
end;
end; %КОНЕЦ SME
```

Библиографический список

1. Квакернаак Х.: Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван — М.: Мир, 1977. — 650 с.
2. Форсайт Дж.: Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер — М.: Мир, 1980. — 279 с.
3. Брайсон А.Е.: Новые идеи по теории управления. / А.Е. Брайсон //Аэрокосмическая техника 1986. № 8.

Поступила в редакцию 18.07.2007 г.

