

УДК 236.24

**С.А. Конева**

*Севастопольский национальный технический университет*

*Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053*

*E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua*

## **ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ ЕМКОСТИ СТЕНОК ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА**

*Построена модель системы автоматического регулирования конвективного теплообмена. Определено изображение температуры теплоносителя на выходе теплообменного аппарата в виде некоторой трансцендентной многозначной функции, что позволяет решить задачу построения переходного процесса частотным методом.*

Рассматривается система автоматического регулирования температуры теплоносителя. Теплообмен происходит в цилиндрическом теплообменном аппарате (ТОА), по внутренним трубам которого протекает тепловыделяющее вещество (ТВ), а в межтрубном пространстве – теплопринимающий теплоноситель (ТН). Теплопередача происходит за счет конвекции и рассматривается с учетом влияния тепловой емкости стенок аппарата.

Регулирование осуществляется с целью получения заданной температуры теплоносителя на выходе теплообменника и происходит за счет изменения подачи тепловыделяющего вещества.

Исследования и проектирование систем автоматического регулирования (САР) температуры на выходе ТОА опираются на построение математических моделей процесса конвективного теплообмена и САР ТОА в целом. Поскольку процессы конвективного теплообмена описываются уравнениями в частных производных, то применение таких моделей сталкивается со значительными трудностями. Преобразование Лапласа для анализа моделей САР пространственно-одномерных ТОА позволяет получить описание САР в терминах передаточных функций. Однако передаточные функции рассматриваемых объекта управления и замкнутой системы не принадлежат классу рациональных и даже мероморфных функций, что не позволяет применить классические методы анализа устойчивости и качества САР. В сложившихся в настоящее время подходах к проектированию САР ТОА выход из положения находят в достаточно сильных упрощениях передаточных функций системы, чтобы «вписаться» в класс моделей систем с запаздыванием [1]. В настоящей работе рассматривается возможность анализа качества САР ТОА без подобных упрощений, т.е. с сохранением принципиально важных особенностей математического описания системы.

**Постановка задачи.** Пусть  $T_1(x,t)$   $T_2(x,t)$  – температура ТВ и ТН;  $x$  – относительная координата ( $0 \leq x \leq 1$ );  $t$  – время;  $T_1(0,t)$   $T_2(0,t)$  – температура ТВ и ТН на входе;  $T_1(1,t)$   $T_2(1,t)$  – температура ТВ и ТН на выходе ТОА;  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  – расход ТВ и ТН соответственно.

Возмущающими воздействиями являются расход  $G_2(t)$  и температура ТН  $T_2(0,t)$  на входе, управляющим воздействием – расход ТВ  $G_1(t)$ .

При равномерной по длине аппарата теплоотдаче уравнения динамики теплообмена имеют вид [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} + a_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_2 [T_C(x,t) - T_1(x,t)] - a_3 G_1(t); \\ c_0 \frac{\partial T_C(x,t)}{\partial t} = c_1 [T_2(x,t) - T_C(x,t)] + c_2 [T_1(x,t) - T_C(x,t)]; \\ \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} + b_1 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = b_2 [T_C(x,t) - T_2(x,t)] + b_3 [T_{C.H}(x,t) - T_2(x,t)] + b_4 G_2(t); \\ g_1 \frac{\partial T_{C.H}(x,t)}{\partial t} = g_2 [T_2(x,t) - T_{C.H}(x,t)] \end{array} \right. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия принимаются в виде:

$$T_1(x,0) = 0; \quad T_2(x,0) = 0; \quad T_1(0,t) = T_{10}(t); \quad T_2(0,t) = T_{20}(t).$$

После исключения  $T_C(x,t)$ ,  $T_{C.H}(x,t)$  преобразованием Лапласа по  $x$  и  $t$  с учетом начальных и граничных условий получим для изображений переменных системы (1) как функций  $s, p$  уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} [s + A_1(p)] T_1(s, p) = T_1(0, p) + A_2(p) T_2(s, p) - a_3 G_1(p); \\ [s + B_1(p)] T_2(s, p) = T_2(0, p) + B_2(p) T_1(s, p) + b_4 G_2(p), \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $A_1(p) = a_1 p + a_2 - \frac{a_2 c_2 c}{vp + 1}$ ;  $A_2(p) = \frac{a_2 c_1 c}{vp + 1}$ ;  $v = \frac{c_0}{c_1 + c_2}$ ;  $v_1 = \frac{g_1}{g_2}$ ;

$$B_1(p) = b_1 p + b_2 - \frac{b_2 c_1 c}{vp + 1} + b_3 - \frac{b_3}{v_1 p + 1}; \quad B_2(p) = \frac{c_2 b_2 c}{vp + 1}; \quad c = \frac{1}{c_1 + c_2}.$$

Решая систему (2) относительно  $T_1(s, p)$  или  $T_2(s, p)$ , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(s, p) T_1(s, p) = A_2(p) T_{20}(p) + [s + B_1(p)] T_{10}(p) + b_4 A_2(p) G_2(p) - a_3 [s + B_1(p)] G_1(p); \\ \Delta(s, p) T_2(s, p) = [s + A_1(p)] T_{20}(p) + B_2(p) T_{10}(p) - a_3 B_2(p) G_1(p) + b_4 [s + A_1(p)] G_2(p), \end{array} \right. \quad (3)$$

где

$$\Delta(s, p) = [s + A_1(p)][s + B_1(p)] - A_2(p) B_2(p) = s^2 + [A_1(p) - B_1(p)]s + A_1(p) B_1(p) - A_2(p) B_2(p)$$

– главный определитель системы (2).

Выражения (3) определяют изображения температур  $T_1(s, p)$ ,  $T_2(s, p)$  в виде рациональных функций переменных  $s, p$ . Фиксируя одну из переменных, можно найти оригинал как изображение рациональной функции

другой переменной. Принципиально имеем два выбора в построении оригиналов  $T_1(x, t)$  и  $T_2(x, t)$  – обратных преобразований Лапласа.

В данной задаче теплообмена основной интерес представляет процесс изменения температуры теплоносителя на выходе ТОА. Поэтому выберем в качестве первого обратного преобразования построение оригинала  $T_2(x, p)$  по переменной  $s$  изображения  $T_2(s, p)$ . Полагая  $x = 1$ , в соответствии с представлением

$$T_2(s, p) = \frac{B_2(p)}{\Delta(s, p)} T_1(0, p) + \frac{[s + A_1(p)]}{\Delta(s, p)} T_2(0, p) - \frac{B_2(p)a_3}{\Delta(s, p) \cdot s} G_1(p) + \frac{b_4[s + A_1(p)]}{\Delta(s, p) \cdot s} G_2(p)$$

получаем выражения для компонент оригинала  $T_2(1, p)$  от соответствующих воздействий:

$$\begin{cases} T_2(1, p) = \left[ \frac{s_1(p) + A_1(p)}{s_1(p) - s_2(p)} e^{s_1(p)} + \frac{s_2(p) + A_1(p)}{s_2(p) - s_1(p)} e^{s_2(p)} \right] T_2(0, p); \\ T_2(1, p) = B_2(p) \left[ \frac{e^{s_1(p)}}{s_1(p) - s_2(p)} + \frac{e^{s_2(p)}}{s_2(p) - s_1(p)} \right] T_1(0, p); \\ T_2(1, p) = - \left\{ \frac{B_2(p)a_3 e^{s_1(p)}}{s_1(p)[s_1(p) - s_2(p)]} + \frac{B_2(p)a_3 e^{s_2(p)}}{s_2(p)[s_2(p) - s_1(p)]} + \frac{B_2(p)a_3}{s_1(p)s_2(p)} \right\} G_1(p); \\ T_2(1, p) = \left\{ \frac{b_4[s_1(p) + A_1(p)] e^{s_1(p)}}{s_1(p)[s_1(p) - s_2(p)]} + \frac{b_4[s_2(p) + A_1(p)] e^{s_2(p)}}{s_2(p)[s_2(p) - s_1(p)]} + \frac{b_4 A_1(p)}{s_1(p)s_2(p)} \right\} G_2(p). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $s_1(p), s_2(p)$  – корни многочлена  $\Delta(s, p)$  (см. ниже).

Поставим задачу получить на основе изображений (4) модель замкнутой САР конвективного теплообмена и определить общий подход к анализу качества САР частотными методами.

**Решение задачи.** Перейдем к построению модели замкнутой САР конвективного теплообмена. Без потери общности рассматриваемого метода (в силу принципа суперпозиции) будем рассматривать динамику САР, определяемую задающим воздействием на входе замкнутой системы с отрицательной единичной обратной связью. Определяя ошибку управления как  $\varepsilon(t) = T_3(t) - T_2(1, t)$  ( $T_3(t)$  – заданная температура на выходе ТОА), получаем структурную схему САР (рисунок 1).

В соответствии с (4) передаточная функция объекта относительно управляющего воздействия  $G_1(p)$  имеет вид:

$$W_O(p) = - \frac{b_2 c_2 c a_3}{vp + 1} \left\{ \frac{e^{s_1(p)}}{s_1(p)[s_1(p) - s_2(p)]} + \frac{e^{s_2(p)}}{s_2(p)[s_2(p) - s_1(p)]} + \frac{1}{s_1(p)s_2(p)} \right\}.$$

Передаточную функцию регулятора будем рассматривать в виде

$$W_p(p) = \frac{k_p(\tau_2 p + 1)}{\tau_1 p + 1},$$

где  $k_p$  – коэффициент усиления регулятора;  $\tau_1, \tau_2$  – постоянные времени.

Определяя теперь передаточную функцию прямой цепи как

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = - \frac{k_p(\tau_2 p + 1)b_2 c_2 c a_3}{(\tau_1 p + 1)(vp + 1)} \left[ \frac{e^{s_1(p)}s_2(p) - e^{s_2(p)}s_1(p) + s_1(p) - s_2(p)}{s_1(p)s_2(p)[s_1(p) - s_2(p)]} \right], \quad (5)$$

а передаточную функцию замкнутой системы как

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{-k_p(\tau_2 p + 1)b_2 c_2 c a_3 [e^{s_1(p)}s_2(p) - e^{s_2(p)}s_1(p) + s_1(p) - s_2(p)]}{(\tau_1 p + 1)(vp + 1)s_1(p)s_2(p)[s_1(p) - s_2(p)] - k_p b_2 c_2 c a_3 [e^{s_1(p)}s_2(p) - e^{s_2(p)}s_1(p) + s_1(p) - s_2(p)]}, \quad (6)$$

для изображения выхода системы  $T_2(1, p)$  получаем

$$T_2(1, p) = \Phi(p)T_3(p) \quad (7)$$

с соотношениями (5), (6) для  $\Phi(p)$ .

Полученное вход-выходное соотношение САР ТОА с представлением передаточной функции замкнутой системы (6) открывает возможности анализа качества системы. Как известно, основными характеристиками качества САР являются прямые показатели качества: время регулирования процесса  $t_B$ , перерегулирование  $\sigma\%$ , колебательность (апериодичность), а в целом характеристики "стандартного" переходного процесса. В качестве такового традиционно выбирается единичная переходная функция, изображение которой в нашем случае находится из (6), (7) при  $T_3(p) = 1/p$ . Таким

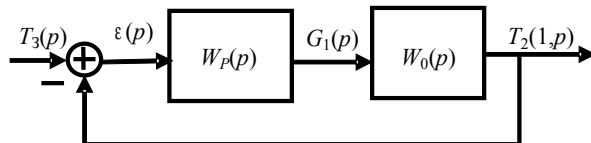


Рисунок 1 – Структурная схема САР теплообмена

образом, основная задача в проблеме анализа качества САР ТОА состоит в построении единичной переходной функции.

Нетривиальность задачи вытекает из сложной природы  $\Phi(p)$  как аналитической функции переменной  $p$ . Она не является рациональной функцией и имеет сложный характер особенностей. В частности, особенности неоднозначного характера (точки разветвления) определяются функциями  $s_1(p)$ ,  $s_2(p)$ , которые к тому же дают и существенно особые точки  $-\frac{1}{v}$ ,  $-\frac{1}{v_1}$ . Передаточная функция замкнутой системы  $\Phi(p)$ , имеет бесконечное число полюсов, анализ распределения которых является весьма сложной задачей. Здесь задача анализа особых точек не рассматривается. Отметим только, что при определенных условиях (по существу они являются условиями устойчивости) все особые точки изображения (6) располагаются в левой полуплоскости. В этом случае справедлива вещественная форма интеграла обращения для единичной переходной функции

$$T_2(1, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (8)$$

где  $P(\omega) = \operatorname{Re} \Phi(j\omega)$  – вещественная частотная характеристика замкнутой системы. Приведем основные соотношения для ее расчета. Пусть

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega).$$

Тогда нетрудно получить

$$P(\omega) = \frac{(u(\omega) + u(\omega)^2 + v(\omega)^2)}{(1 + u(\omega))^2 + v(\omega)^2}; \quad (9)$$

$$u(\omega) = \frac{k_p B(D(\omega) - \tau_2 F(\omega))(M(\omega) + \tau_1 N(\omega)) + (F(\omega) + \tau_2 D(\omega))(N(\omega) + \tau_1 M(\omega))}{(\tau_1^2 \omega^2 + 1)(M(\omega)^2 + N(\omega)^2)}; \quad (10)$$

$$v(\omega) = j \frac{k_p B(M(\omega) - \tau_1 N(\omega))(F(\omega) + \tau_2 D(\omega)) - (N(\omega) + \tau_1 M(\omega))(D(\omega) - \tau_2 F(\omega))}{(\tau_1^2 \omega^2 + 1)(M(\omega)^2 + N(\omega)^2)},$$

где

$$\begin{aligned} M(\omega) + jN(\omega) &= s_1(j\omega)s_2(j\omega)[s_1(j\omega) - s_2(j\omega)](j\omega v + 1); \\ D(\omega) + jF(\omega) &= e^{s_1(\omega)}s_2(j\omega) - e^{s_2(\omega)}s_1(j\omega) + s_1(j\omega) - s_2(j\omega). \end{aligned} \quad (11)$$

В выражениях (11) корни  $s_{1,2}(p)$  многочлена  $\Delta(s, p)$  запишем в виде

$$s_{1,2}(p) = \frac{1}{(v_1 p + 1)(v p + 1)} [-\delta(p) \pm \sqrt{g(p)}], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\delta(p) &= (v_1 p + 1)\alpha(p) + \beta(p) = (v_1 p + 1)(\alpha_0 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2) + (\beta_0 p^3 + \beta_1 p^2 + \beta_2 p + \beta_3); \\ g(p) &= \delta(p)^2 + \sigma(p)(v_1 p + 1); \quad \sigma(p) = -4\alpha(p)\beta(p) + r(v_1 p + 1); \\ r &= a_2 b_2 c_2 c_1 c^2.\end{aligned}$$

С учетом принятых выше обозначений можно записать:

$$s_{1,2}(p) = \frac{1}{(v_1 p + 1)(vp + 1)} \left\{ -[(v_1 p + 1)\alpha(p) + \beta(p)] \pm \sqrt{[(v_1 p + 1)\alpha(p) - \beta(p)]^2 + r(v_1 p + 1)^2} \right\}. \quad (13)$$

После построения частотной характеристики  $P(\omega)$  по указанным соотношениям переходный процесс может быть построен по (8). Вычисление несобственного интеграла при фиксированном  $t$  можно выполнить применением общих квадратурных методов, в частности, в современном программном обеспечении. В этом случае вычисления выполняются многократно для заданной последовательности моментов времени  $t_1, t_2 \dots$ . В то же время, весьма интересно применить хорошо зарекомендовавший себя в проектировании систем управления метод трапецеидальных частотных характеристик [2], позволяющий получить переходную функцию суммированием “стандартных” элементарных процессов.

Для иллюстрации разработанной на основе полученных частотных представлений методики обратимся к примеру.

*Пример.* Пусть  $v=2,231$ ;  $v_1=0,322$ ;  $b_1=0,512$ ;  $b_2=2,49$ ;  $b_3=2,32$ ;  $a_1=0,324$ ;  $a_2=0,207$ ;  $a_3=0,528$ ,  $\tau_1=1,5$ ,  $\tau_2=0,15$ ;  $c=1,29$ ;  $c_1=0,368$ ;  $c_2=0,407$ ;  $k_p=30$ .

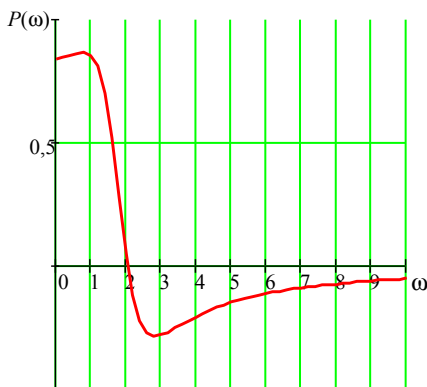


Рисунок 2 – График вещественной частотной характеристики замкнутой

По выражениям (9)-(13) строим вещественную частотную характеристику замкнутой системы (рисунок 2). Полученная вещественная частотная характеристика, с достаточной степенью точности может быть представле-

на суммой четырех трапецеидальных. Определив для трапецеидальных компонент соответствующие  $h$ -функции и просуммировав их, получим кривую переходного процесса.

На рисунке 3 кривая 1 представляет собой результаты расчета переходной характеристики при аппроксимации графика (рисунок 2) суммой четырех трапецеидальных характеристик. На этом же рисунке изображена кривая 2 – результат применения точного (квадратурного) метода вычисления переходной функции (8) с использованием интегрированной среды Mathcad-2000. Сравнение результатов говорит об удовлетворительной точности метода трапеций.

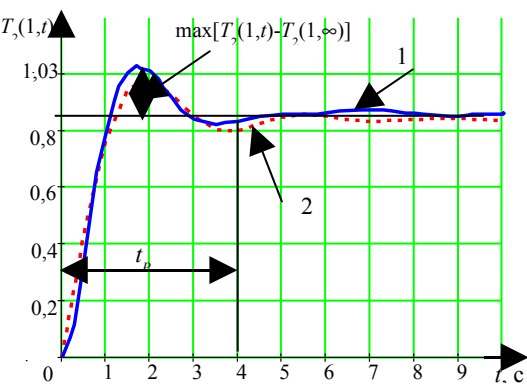


Рисунок 3 – Графики переходного процесса

Предложенный метод анализа САР теплообмена (системы с распределенными параметрами) сравним с методом анализа обыкновенных систем с сосредоточенными параметрами.

Построение переходной характеристики системы предложенным методом значительно проще прямого численного интегрирования уравнения (1) совместно с обыкновенным дифференциальным уравнением регулятора и позволяет выполнить эффективный анализ прямых показателей качества САР ТОА, а именно, времени регулирования  $t_p$ , перерегулирования

$$\sigma \% = \frac{\max[T_2(1,t) - T_2(1,\infty)]}{T_2(1,\infty)} 100\%,$$

а также характера процесса.

**Заключение.** Предложенный метод частотного анализа САР процесса конвективного теплообмена в ТОА с учетом тепловой емкости его стенок сравним по эффективности с аналогичным методом анализа обыкновенных систем, что определяет перспективность его применения при проектировании ТОА.

***Библиографический список***

1. Сыромятников В.Ф. Наладка автоматики судовых энергетических установок / В.Ф. Сыромятников. — Л.: Судостроение, 1980. — 352 с.
2. Солодовников В.В. Теория автоматического регулирования / В.В. Солодовников. — М.: Машиностроение, 1967. — 763 с.

***Поступила в редакцию 08.04.2003 г.***