

УДК 621.52

**В.Я. Копи, профессор, д-р техн. наук,**

**А.А. Скидан, доцент,**

**А.И. Балакин, ассистент,**

**О.В. Филипович, доцент, канд. техн. наук**

*Севастопольский национальный технический университет*

*ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053*

*E-mail: ps@sevntu.com.ua*

*Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности*

*Севастополь, Украина, 99033*

## **АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ В МАШИНО-ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

*На основе доказанной теоремы о максимуме дифференциальной энтропии случайной величины, ограниченной конечными пределами, при заданных ее математическом ожидании и дисперсии, предложен подход к выбору закона распределения погрешности средства измерения.*

Повышение точности измерительных приборных систем является необходимым компонентом улучшения качества продукции [1].

При оценке точностных характеристик измерительных приборов из паспортных данных известно значение предельной погрешности ( $\pm\beta$ ) во всём диапазоне измерения.

Предлагается для повышения точности использовать многократные измерения. Кратность измерений влияет на дисперсию результата, оставляя неизменными предельные погрешности. Вопрос заключается в оптимальном выборе минимально необходимого числа многократных измерений для обеспечения требуемой точности. При этом доверительная вероятность качества измерения определяется на основе плотности распределения погрешности средств измерения, которая пользователю неизвестна, а, если и определяется эмпирически, то со значительными отклонениями от истинного вида.

В данной статье предлагается ввести дополнительную информацию, но не о плотности, а о дисперсии погрешности средств измерений и, исходя из последней, определять плотность распределения, как обеспечивающую максимальную энтропию погрешности. Отметим, что при  $n$ -кратных измерениях дисперсия результата уменьшается в  $n$  раз.

Целью данной статьи является повышение точности технических измерений в машино-приборостроении на основе использования дополнительной информации при многократных измерениях.

Из литературы известны виды плотностей распределений, обеспечивающие максимум дифференциальной энтропии случайной величины, ограниченной конечными пределами, и случайной величины, не имеющей ограничения на пределы, но с заданной дисперсией [2]. Однако из сказанного выше следует, что необходимо определить вид плотности распределения случайной величины, имеющей конечные пределы при заданной ее дисперсии и, в общем случае, математическом ожидании.

Как известно из [3], погрешность измерения можно свести к аддитивной даже при наличии мультипликативной составляющей, если речь идет об измерении в конкретной точке и представить воспроизводящую величину  $z$  как сумму воспроизводимой величины  $u$  и некоторой помехи  $\xi$   $z = u + \xi$ , причём полагать, что помеха не зависит от  $z$ .

В этом случае условная дифференциальная энтропия случайной величины  $z$  равна безусловной энтропии помехи  $\xi$  [2], что позволяет получить граничную оценку необходимого числа измерений.

Число измерений зависит от значения измеряемой величины, находящейся в пределах поля допуска  $\delta$ . Величина  $\delta$  и вероятность выхода результата измерения за границу поля допуска  $P_d$  задаются разработчиком, исходя из вида и устойчивости технологического процесса и метрологических характеристик средств измерения. По заданным  $\delta$  и  $P_d$  определяется требуемое значение верности  $\epsilon^2$ . Это осуществляется с использованием метода последовательных приближений следующим образом. Задаётся  $\epsilon^2$  и решается рассматриваемая ниже задача определения вида плотности распределения случайной величины, которой является погрешность прибора. Вид плотности распределения выбирается из условия обеспечения максимума дифференциальной энтропии указанной случайной величины, дисперсия которой равна  $\epsilon^2$ . Далее по найденной плотности  $p(x)$  определяется вероятность выхода результата измерения за границу поля допуска и сравнивается с заданным значением  $P_d$ . Если оно больше  $P_d$ , то  $\epsilon^2$  уменьшается и вновь решается указанная задача. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено указанное условие. После того, как  $\epsilon^2$  найдено, определяется число многократных измерений  $n = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$ , где  $\sigma^2$  — дисперсия средства измерений.

Отдельно отметим способ многократных измерений, предложенный в статье. До сих пор полагалось, что число  $n$  многократных измерений является целым. Однако оно может быть и вещественным.

Обеспечивается это следующим образом. Если производится измерение партии  $N$  деталей, то какая-то часть  $N_1$  из них может измеряться  $n_1$  раз, а какая-то часть  $N_2$   $n_2$  раз. Тогда на партию из  $N$  деталей приходится  $n_\Sigma = n_1 + n_2$  измерений. При этом число многократных измерений, приходящихся на одну деталь, равное  $n = n_\Sigma / N$  может быть вещественным. Доверительная вероятность качества измерений в этом случае практически не изменит своего значения. Предлагаемый способ получения вещественных значений  $n$  позволяет значительно повысить производительность по сравнению с традиционным, оперирующим с целыми значениями  $n$ . Так, например, если из условий требуемой точности достаточно обеспечить число многократных измерений  $n = 1,2$  вместо  $n = 2$ , то время измерений уменьшится на 40 %.

Рассмотрим теперь метод определения указанной выше плотности распределения  $p(x)$ , который базируется на теореме о максимуме дифференциальной энтропии случайной величины, ограниченной конечными пределами, при заданных ее математическом ожидании и дисперсии.

Теорема. Если случайная величина ограничена конечными пределами  $[a, b]$ , то при заданных ее математическом ожидании  $m_3$  и дисперсии  $\epsilon^2$  максимальную дифференциальную энтропию обеспечивает композиционный закон распределения этой случайной величины вида:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ p(x) = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; & \epsilon^2 < \frac{(b-a)^2}{12}; \text{ при } \lambda_2 < 0; a \leq x \leq b; \\ p(x) = \frac{1}{b-a}; & \epsilon^2 = \frac{(b-a)^2}{12}; \text{ при } \lambda_2 = 0; a \leq x \leq b; \\ p(x) = M e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; & \epsilon^2 > \frac{(b-a)^2}{12}; \text{ при } \lambda_2 > 0; a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (1)$$

При этом если дисперсия  $\epsilon^2 > \frac{(b-a)^2}{12}$ , закон распределения является двумодальным, если дисперсия  $\epsilon^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$  — равномерным, а если дисперсия  $\epsilon^2 < \frac{(b-a)^2}{12}$  — усеченным нормальным законом, образующимся из не усеченного, математическое ожидание  $m$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  которого определяются из выражений

$$m_3 = m + \frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 = \sigma^2 & \left\{ 1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (a-m)e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b-m)e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} + \\ & + 2m \frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] + m^2 + m_3^2, \end{aligned} \quad (3)$$

а максимальное значение дифференциальной энтропии равно

$$H_{\text{диф max}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (a+m)e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b+m)e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} + \frac{m^2}{\sigma^2} - \frac{m m_3}{\sigma^2} - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы определим вид плотности распределения рассматриваемой случайной величины, доставляющей максимум функционалу

$$\max_{p(x)} \rightarrow \left\{ H_{\text{диф}}(x) = - \int_a^b p(x) \cdot \ln p(x) dx \right\}, \quad (4)$$

при ограничениях:

$$\int_a^b p(x) dx = 1; \quad (5)$$

$$\int_a^b xp(x)dx = m_x ; \quad (6)$$

$$\int_a^b (x - m_x)^2 p(x)dx = \varepsilon^2 . \quad (7)$$

Рассматриваемая задача является вариационной с закрепленными концами и интегральными (изопериметрическими) ограничениями. Составляя уравнение Эйлера для функционала (4) при ограничениях (5) — (7), получаем

$$-\ln p(x) - 1 + \lambda'_1 + \lambda_2(x - m_x)^2 + \lambda'_3 x = 0 .$$

Введя обозначения  $\lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda_2 m_x^2$ ;  $\lambda_3 = \lambda'_3 - 2\lambda_2 m_x$ , запишем последнее выражение в следующем виде:

$$-\ln p(x) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x = 0 .$$

Из него находим вид плотности распределения  $p(x)$ :

$$p(x) = e^{\lambda_2 x^2 + \lambda_3 x + \lambda_1 - 1} = e^{\lambda_1 - 1} \cdot e^{\lambda_2 x^2 + \lambda_3 x} = e^{\lambda_1 - 1} \cdot e^{-\frac{\lambda_3^2}{2\lambda_2}} \cdot e^{\lambda_2(x + \frac{\lambda_3}{2\lambda_2})^2} . \quad (8)$$

Константы  $e^{\lambda_1 - 1}$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  определяются из системы (4) — (6) при подстановке в нее выражения (8).

Проведя замену переменных

$$\frac{\lambda_3}{2\lambda_2} = k = -m ; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} ; \quad e^{\lambda_1 - 1} \cdot e^{-\frac{\lambda_3^2}{2\lambda_2}} = M ,$$

получим выражения для плотности распределения в виде:

$$p(x) = M e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} , \quad (9)$$

что соответствует четвертому выражению в (1).

Если  $\varepsilon^2 < \frac{(b-a)^2}{12}$  в соответствии с интегралом Эйлера-Пуассона и с учетом усечения закона распределения, имеем

$$M = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} , \quad (10)$$

$$\text{где } C = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx} . \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9), получаем выражения для плотности распределения в следующем виде

$$p(x) = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} , \quad (12)$$

что соответствует второму выражению в (1).

Таким образом, доказано, что получается усеченный нормальный закон, а его математическое ожидание  $m_x$  и дисперсия  $D_x$  на основании (12) определяются из следующих выражений:

$$m_x = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m + \frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] ;$$

$$D_x = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b (x - m_x)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \left\{ 1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (a-m) e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b-m) e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} +$$

$$+ 2m \frac{C\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] + m^2 + m_x^2 .$$

При подстановке в данные выражения  $m_x = m_3$ ,  $D_x = \varepsilon^2$  получаем формулы (2), (3).

Считая, что закон распределения соответствует (12) и (8), оставляя постоянным математическое ожидание ( $m = \text{const}$ ) не усеченного нормального закона, устремим его дисперсию к бесконечности:

$\sigma^2 \rightarrow \infty$ . При этом, так как  $\lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ , то  $\lambda_2 \rightarrow 0$ . Учитывая, что  $m = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}$ , можно утверждать, что и  $\lambda_3 \rightarrow 0$ , потому, что иначе условие  $m = \text{const}$  выполнено не будет. В этом случае  $p(x) = M = e^{\lambda_1 - 1}$ .

Так как  $\int_a^b p(x) dx = \int_a^b e^{\lambda_1 - 1} dx = 1$ , то

$$M = e^{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a},$$

что соответствует равномерному закону распределения и третьему выражению в (1). Что и требовалось доказать.

Подставляя полученные выражения для  $p(x)$  в формулу дифференциальной энтропии после интегрирования получим ее максимальное значение:

$$\begin{aligned} H_{\text{диф. max}} &= - \int_a^b \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln \left[ \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (a+m) e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b+m) e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} + \frac{m^2}{\sigma^2} - \frac{m m_3}{\sigma^2} - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Следствие. В частном случае, если центрированная случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание, ограничена пределами  $[-a, a]$ , то при заданной ее дисперсии  $\varepsilon^2$ , величина которой меньше значения  $\varepsilon^2 < \frac{a^2}{3}$ , максимальную дифференциальную энтропию обеспечивает усеченный нормальный закон распределения этой случайной величины, полученный из не усеченного, среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  которого определяется из выражения:

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right], \quad (13)$$

а максимальное значение дифференциальной энтропии равно:

$$H_{\text{диф. max.}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

С учетом (11) выражение (13) примет вид:

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{2a}{\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right]. \quad (14)$$

Выражения (1), (2) могут быть положены в основу алгоритма вычисления параметров  $m$  и  $\sigma$  для не центрированной случайной величины, ограниченной конечными пределами. Сам алгоритм представляет собой двумерный поиск и не вызывает сложностей. В случае центрированной случайной величины, ограниченной конечными пределами, алгоритм основан на выражении (14) и представляет собой одномерный поиск.

Моделирование производилось на основе приведенной теоремы для не центрированных случайных величин с использованием выражений (2), (3) и (11). Результаты моделирования для случайной величины с ненулевым математическим ожиданием и значениями, лежащими в пределах  $[-1, 1]$ , изображены на рисунке 1.

Значения констант для кривых, приведенных на рисунке 1, равны: кривая 1 —  $e^{\lambda_1 - 1} = 1,011$ ;  $\lambda_2 = -4,743$ ;  $\lambda_3 = 1,958$ ; кривая 2 —  $e^{\lambda_1 - 1} = 0,701$ ;  $\lambda_2 = -1,613$ ;  $\lambda_3 = 0,954$ ; кривая 3 —  $e^{\lambda_1 - 1} = 0,487$ ;  $\lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = 0$ ; кривая 4 —  $e^{\lambda_1 - 1} = 0,323$ ;  $\lambda_2 = +1,013$ ;  $\lambda_3 = 0,4775$ ; кривая 5 —  $e^{\lambda_1 - 1} = 0,1032$ ;  $\lambda_2 = +3,158$ ;  $\lambda_3 = 0,3207$ .

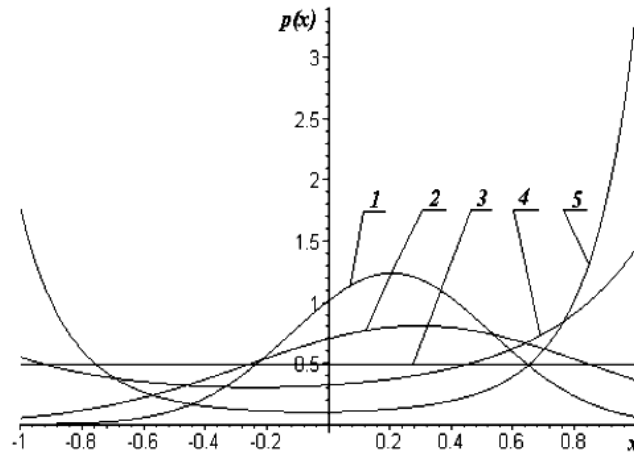


Рисунок 1 — Вид плотностей распределения при математическом ожидании  $m_3 = 0,2$  в зависимости от значений дисперсии:

1 —  $\epsilon^2 = 0,1$ ; 2 —  $\epsilon^2 = 0,2$ ; 3 —  $\epsilon^2 = 0,333$ ; 4 —  $\epsilon^2 = 0,4$ ; 5 —  $\epsilon^2 = 0,6$

Следует иметь в виду, что энтропия случайной величины ограниченной конечными пределами увеличивается с ростом дисперсии от 0 до максимального значения при дисперсии равной  $\epsilon^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ , а далее уменьшается. При этом физический смысл энтропии при значениях дисперсии  $\epsilon^2 < \frac{(b-a)^2}{12}$  и  $\epsilon^2 > \frac{(b-a)^2}{12}$  разный. В первом случае она характеризует вероятность попадания случайной величины в окрестность математического ожидания (для усеченного нормального закона), а во втором — в окрестность ограничивающих пределов (для двумодального закона). Этот факт необходимо иметь в виду при анализе погрешности средства измерения.

Остановимся на использовании четвертого выражения в (1), соответствующего двумодальному распределению. Указанное распределение соответствует наличию люфтов, например, в механической части приборов [1]. При этом измерительный закончик случайным образом в зависимости, например, от погрешности формы измеряемого изделия, стремится занять одно из устойчивых положений, что приводит к двумодальности распределения погрешности. Данная ситуация наиболее часто встречается в приборах, имеющих значительный срок службы. Преимущество многократных измерений заключается еще и в том, что они позволяют этот недостаток устранить и, следовательно, продлить срок службы приборов.

Предлагаемый подход к выбору минимально необходимого числа многократных измерений, рассмотренный в выше, основан на определении закона распределения погрешностей измерений, обеспечивающего их максимальную энтропию как при одно-, так и при многократных измерениях. Основным параметром, определяющим доверительную вероятность измерений, при этом является дисперсия, значение которой в зависимости от  $n$  измерений уменьшается в  $n$  раз, причем это число может быть вещественным.

Ниже рассматривается несколько иной подход, в основу которого положен анализ законов распределения суммы случайных величин, ограниченных конечными пределами. Предлагается, как и ранее, определять вид закона распределения, обеспечивающего максимальную энтропию при однократном измерении, а при многократных определять искомый закон на его основе. При этом погрешности при каждом из измерений считаются одинаковыми, независимыми случайными величинами, имеющими закон распределения, обеспечивающий их максимальную энтропию, а плотность распределения погрешности  $n$ -кратных измерений определяется как совместная для их суммы с последующим масштабным преобразованием.

Известно, что совместная плотность  $p^{2(*)}(x)$  суммы двух одинаковых, независимых случайных величин, в том числе и ограниченных конечными пределами, определяется выражением

$$p^{2(*)}(x) = p(x) * p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-t) \cdot p(t) dt = \int_a^b p(x-t) \cdot p(t) dt,$$

где  $*$  — символ, обозначающий свертку;  $p(x)$  — плотность распределения каждой из случайных величин;  $a$  и  $b$  — ограничивающие пределы.

При определении свертки двух одинаковых, независимых случайных величин, ограниченных конечными пределами, есть некоторые особенности, связанные с определением пределов интегрирования.

Подробно останавливаться на данном вопросе не будем, а приведем только выражения для определения сверток второго и третьего порядков, необходимые для практических расчетов, предполагая, что случайные величины ограничены пределами  $[-a, a]$ .

Свертка второго порядка случайных величин с плотностями  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , где

$$p_1(x) = p_2(x) = \begin{cases} p(x), & x \in [-a, a]; \\ 0, & x \notin [-a, a], \end{cases} \quad (15)$$

имеет вид:

$$p^{(*)2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2a, 2a]; \\ \int_{-a}^{x+a} p(x-t) \cdot p(t) dt, & -2a < x < 0; \\ \int_{x-a}^a p(x-t) \cdot p(t) dt, & -2a < x < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Свертка третьего порядка случайных величин с плотностями  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , где  $p_1(x)$  определяется по формуле (15), а

$$p_2(x) = p^{2(*)}(x-s) = \begin{cases} 0, & x-s \notin [-2a, 2a]; \\ \int_{-a}^{x-s+a} p^{2(*)}(x-s-t) \cdot p(t) dt, & -2a < x-s < 0 \Leftrightarrow x < s < x+2a; \\ \int_{x-s-a}^a p^{2(*)}(x-s-t) \cdot p(t) dt, & 0 < x-s < 2a \Leftrightarrow x-2a < s < x, \end{cases} \quad (17)$$

имеет вид:

$$p^{(*)3} = \int p(s) ds \cdot p^{(*)2}(x-s) ds = \begin{cases} 0, & x \notin [-3a, 3a]; \\ \int_{-a}^{x+2a} p(s) ds \int_{-a}^{x-s+a} p(x-s-t) \cdot p(t) dt, & -3a < x < -a; \\ \int_{-a}^x p(s) ds \int_{x-s-a}^a p(x-s-t) \cdot p(t) dt + \\ + \int_x^a p(s) ds \int_{-a}^{x-s+a} p(x-s-t) \cdot p(t) dt, & -a < x < a; \\ \int_{x-2a}^a p(s) ds \int_{x-s-a}^a p(x-s-t) \cdot p(t) dt, & -a < x < a. \end{cases} \quad (18)$$

Преобразование, выполняемое для определения плотности распределения  $p_c(x)$  среднего значения после  $n$  многократных измерений производится в соответствии с формулой  $p_c(x) = n \cdot p(nx)$ , причем значение дисперсии, математического ожидания и пределов при этом уменьшается в  $n$  раз.

Исследования проводились для нормированных случайных величин, значения которых лежат в пределах  $[-1, 1]$ . Введением относительных параметров  $\sigma_o = \sigma/a$  и  $m_o = m/a$  результаты распространяются на группу законов с такими же  $\sigma_o$  и  $m_o$ . Исходные функции и результаты моделирования плотностей распределений с использованием формул (15) — (18) представлены на рисунках (2) — (4).

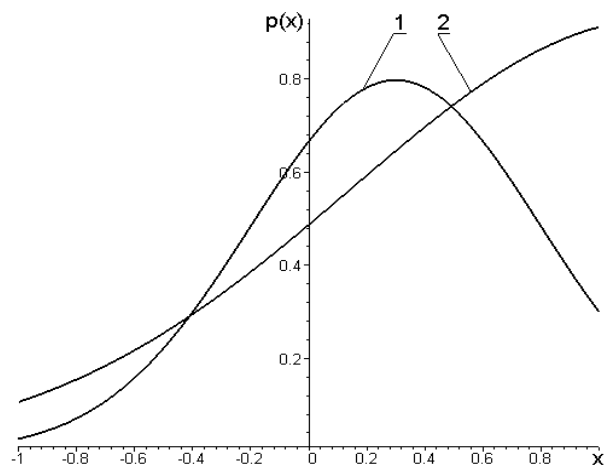


Рисунок 2 — Виды исходных плотностей с параметрами  $\sigma^2 = 0,25$ ,  $m = 0,3$  для законов: 1 — нормального; 2 — усеченного

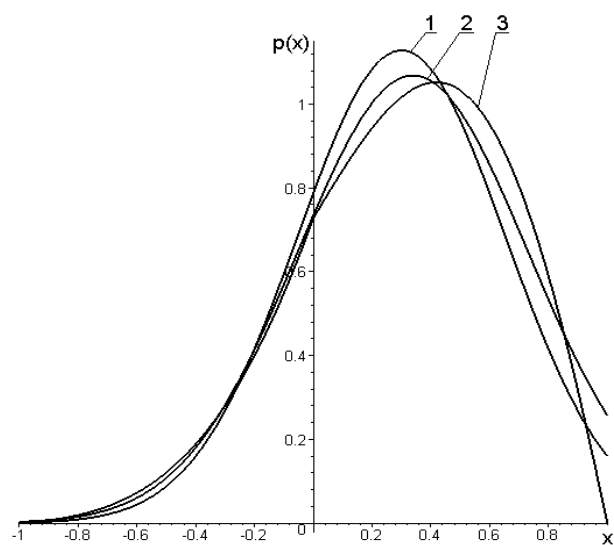


Рисунок 3 — Виды преобразованных плотностей с результирующими параметрами  $\sigma^2 = 0,125$ ,  $m = 0,3$ : 1 — преобразованная свертка двух нормальных законов; 2 — усеченный нормальный закон с указанными параметрами; 3 — преобразованная свертка двух усеченных нормальных законов

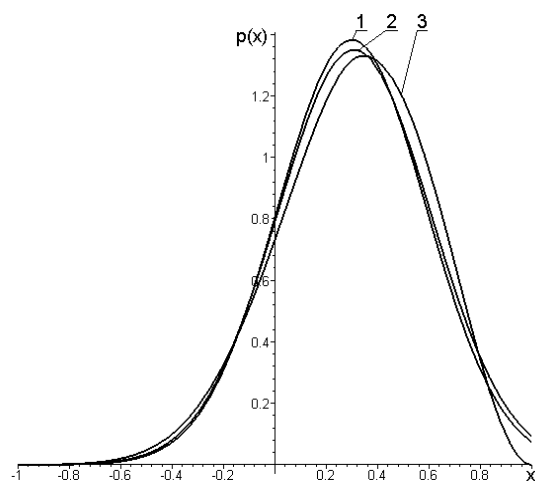


Рисунок 4 — Виды преобразованных плотностей с результирующими параметрами

$\sigma^2 = 0,0833$ ,  $m = 0,3$ : 1 — преобразованная свертка трех нормальных законов;

2 — усеченный нормальный закон с указанными параметрами;

3 — преобразованная свертка трех усеченных нормальных законов

Проводя сравнительный анализ полученных законов распределения, можно сделать вывод, что при значительном различии исходных законов распределения, соответствующих однократным измерениям, с увеличением их числа  $n$  различие преобразованных законов резко падает. В основном это зависит от изменения дисперсии: при ее уменьшении кривые сближаются. При относительных дисперсиях результата многократных измерений  $\sigma_o \leq 0,1$  можно применять методику, рассмотренную в первой части статьи, в основе которой лежит использование закона распределения, обеспечивающего максимальную энтропию при заданных математическом ожидании и дисперсии. Такая ситуация соответствует подавляющему большинству случаев, при этом использование вещественной кратности происходит естественным образом.

Необходимо отметить важную особенность второго подхода к моделированию и самих многократных измерений. Во всех случаях уже после первой свертки, что соответствует суммированию двух независимых случайных величин при двукратных измерениях, даже если плотности их распределения в граничных точках не равны нулю, значения результирующей плотности в указанных точках равны нулю. Сказанное относится и к равномерному и к двумодальному распределениям. При последующих свертках эти значения не изменяются.

В случае использования сверток плотностей случайных величин применение вещественной кратности происходит сложнее. Предположим, что используются преобразования состоящие в определении сверток порядка  $n$  и  $n+1$ , причем при числе  $n+1$  уже получается требуемое качество, а при  $n$  еще нет. Требуется определить сколько изделий  $N_1$  из партии, содержащей  $N$  изделий нужно измерить  $n$  раз, а сколько  $n+1$

раз. Для этого можно воспользоваться выражением  $\frac{N_1}{N} P_{\delta}^{(*)n} + \frac{N - N_1}{N} P_{\delta}^{(*)n+1} > P_{\delta}$ , где  $P_{\delta}^{(*)n}$  и  $P_{\delta}^{(*)n+1}$  — доверительные вероятности верности измерений при их числе равном  $n$  и  $n+1$  соответственно;  $P_{\delta}$  — заданная доверительная вероятность качества измерений.

Предложенный метод позволяет обоснованно выбирать вид закона распределения погрешности средства измерения.

В дальнейшем предполагается рассмотреть модель многопараметрических измерений.

#### **Библиографический список**

1. Коротков В.П. Основы метрологии и точности механизмов приборов / В.П. Коротков, Б.А. Тайц. — М.: Машиностроение, 1961. — 400 с.
2. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации / В.И. Дмитриев. — М.: Высш. шк., 1989. — 320с.
3. Копп В.Я. Анализ информационно-точностных свойств измерительных приборов вариационным методом / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.В. Цуканов // Оптимизация производственных процессов: сб. научн. тр. — Севастополь, 2002. — № 5. — С. 9 — 17.

*Поступила в редакцию 12.05.2008 г.*