

УДК 681.515

Е.А. Шушляпин, проф., д-р.техн.наук

А.Е. Шушляпина

Севастопольский национальный технический университет,

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

pu541@sevcom.net

О.Г. Подольская, ст. преподаватель

Керченский экономико-гуманитарный институт

ул. Пирогова, г. Керчь, 16, Украина

KEGI-TNU@kerch.com.ua

СПОСОБ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Предложен способ приближенного решения в аналитическом виде систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на представлении правых частей дифференциальных уравнений тейлоровскими разложениями по времени и системах линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка для коэффициентов тейлоровских разложений.

Получение аналитических решений систем дифференциальных уравнений, даже приближенных, всегда имело большое значение для практики, поскольку явная зависимость решений от начальных условий и параметров значительно облегчает анализ. Разработан ряд подходов к получению приближенных аналитических решений, опирающихся на их представления в виде рядов. Наряду с известным представлением искомых решений в виде многомерных тейлоровских (или других) разложений по фазовым переменным с неопределенными коэффициентами, которые затем находятся из алгебраических уравнений, предложен, например, метод редукции нелинейной дифференциальной системы к линейной с диагональной матрицей [1], для которой в некоторых случаях можно записать аналитические решения. К сожалению, как первый, так и второй подходы не дают решений с явной зависимостью от начальных условий и параметров, что ограничивает их применение. Такая же ситуация имеет место и в случае других классических методов [2]. Следует отметить, что в известных нам методах поиска приближенных решений ряды (многомерные по фазовым переменным либо одномерные по независимой переменной) использовались именно для представления решений. Предлагается использовать разложения по независимой переменной не решений, а правых частей нормальных нелинейных дифференциальных систем. Оказывается, что в этом случае при определенных предположениях о свойствах функций правых частей уравнений могут

быть получены приближенные аналитические решения, явно зависящие от начальных условий и параметров.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \Phi(t, y), \quad t \in [t_0, t_f], \quad y(t_0) = y^0, \\ y &= (n \times 1), \end{aligned} \quad (1)$$

где вектор-функции Φ предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам достаточное число раз.

Предположим, что процессы в системе таковы, что нелинейные функции правых частей $R_{i0}(t, y(t)) = \Phi_i(t, y(t))$ имеют сходящиеся тейлоровские разложения с достаточно быстро убывающими (с возрастанием номера) коэффициентами

$$\begin{aligned} R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)) &= R_{i0}(t, y(t)) + R_{i1}(t, y(t)) \cdot (\vartheta - t) + \dots + R_{ik}(t, y(t)) \cdot (\vartheta - t)^k + \dots, \\ R_{ik}(t) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\vartheta^k} R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Составим дифференциальные уравнения для $R_{ik}(\vartheta, y(\vartheta))$, получив предварительно из (2) выражения для коэффициентов. Аргументы для сокращения записей покажем только в первом соотношении:

$$\begin{aligned} R_{i1}(\vartheta, y(\vartheta)) &= \frac{dR_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{d\vartheta} = \frac{\partial R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{\partial y} \frac{dy(\vartheta)}{d\vartheta}, \\ R_{i2} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 R_{i0}}{d\vartheta^2} = \frac{1}{2} \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_{i1}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i1}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \\ R_{i3} &= \frac{1}{3!} \frac{d^3 R_{i0}}{d\vartheta^3} = \frac{1}{3!} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^2 R_{i0}}{d\vartheta^2} \right) = \frac{1}{3!} \frac{d}{d\vartheta} (2R_{i2}) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial R_{i2}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i2}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \\ R_{i4} &= \frac{1}{4!} \frac{d^4 R_{i0}}{d\vartheta^4} = \frac{1}{4!} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^3 R_{i0}}{d\vartheta^3} \right) = \frac{1}{4!} \frac{d}{d\vartheta} (3! R_{i3}) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial R_{i3}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i3}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \dots, \\ R_{ik} &= \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i(k-1)}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует система дифференциальных уравнений бесконечного порядка для тейлоровских коэффициентов (вновь аргументы запишем только в первом из них):

$$\begin{aligned}\frac{dR_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{d\vartheta} &= R_{i1}(\vartheta, y(\vartheta)), \\ \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} &= 2R_{i2}, \quad \frac{dR_{i2}}{d\vartheta} = 3R_{i3}, \quad \dots, \quad \frac{dR_{ik_i}}{d\vartheta} = (k_i + 1)R_{i(k_i+1)}, \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Система (4) – незамкнута, поэтому для ее практического использования обнулим правые части k_i -х уравнений для каждого i . Основанием для этого является то, что для сходящихся тейлоровских разложений при $k > k_i$ коэффициенты $R_{ik} \approx 0$. В итоге получится линеаризованная система ограниченного порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)), \\ \frac{dR_{i0}}{d\vartheta} &= R_{i1}, \quad \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} = 2R_{i2}, \quad \frac{dR_{i2}}{d\vartheta} = 3R_{i3}, \quad \dots, \\ \frac{dR_{ik_i}}{d\vartheta} &= 0, \quad \vartheta \in [t, t_f], \\ i &= 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (5)$$

Начальные условия линеаризованной системы получаются из (3) при $\vartheta = t$:

$$\begin{aligned}y_i(t) &= y_i^0, \quad R_{i0}(t) = \Phi(t, y(t)), \\ R_{i1}(t) &= \left. \frac{\partial \Phi_i(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(t, y)}{\partial y} \right|_{y=y(t)} \Phi(t, y(t)), \\ R_{ik}(t) &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}(t)}{\partial t} + \frac{\partial R_{i(k-1)}(t)}{\partial y} \right) \Big|_{y=y(t)} \Phi(t, x(t)), \\ k &= 2, 3, \dots, k_i.\end{aligned}\quad (6)$$

Для системы (5), (6) нетрудно получить аналитическое решение. Начиная с последнего уравнения (5), последовательно получаем:

$$R_{ik_i}(\vartheta) = R_{ik_i}(t),$$

$$R_{i(k_i-1)}(\vartheta) = R_{i(k_i-1)}(t) + k_i \int_t^{\vartheta} R_{ik_i}(\tau) d\tau = R_{i(k_i-1)}(t) + k_i R_{ik_i}(t)(\vartheta - t),$$

$$R_{i(k_i-2)}(\vartheta) = R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) \int_t^{\vartheta} R_{i(k_i-1)}(\tau) d\tau =$$

$$= R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) \int_t^{\vartheta} \left(R_{i(k_i-1)}(t) + k_i R_{ik_i}(t)(\vartheta - t) \right) d\tau =$$

$$= R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t)(\vartheta - t) + (k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\vartheta - t)^2}{2},$$

$$R_{i(k_i-3)}(\vartheta) = R_{i(k_i-3)}(t) + (k_i - 2) \int_t^{\vartheta} R_{i(k_i-2)}(\tau) d\tau =$$

$$= R_{i(k_i-3)}(t) + (k_i - 2) \int_t^{\vartheta} \left(R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t)(\vartheta - t) + (k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\vartheta - t)^2}{2} \right) d\tau =$$

$$= R_{i(k_i-3)}(t) + (k_i - 2) R_{i(k_i-2)}(t)(\vartheta - t) + (k_i - 2)(k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t) \frac{(\vartheta - t)^2}{2} +$$

$$+ (k_i - 2)(k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\vartheta - t)^3}{2 \cdot 3}.$$

Здесь уже видна закономерность и для $R_{i(k_i-k)}(\vartheta)$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} R_{i(k_i-k)}(\vartheta) &= R_{i(k_i-k)}(t) + (k_i - k + 1) R_{i(k_i-k+1)}(t)(\vartheta - t) + \\ &+ (k_i - k + 1)(k_i - k + 2) R_{i(k_i-k+2)}(t) \frac{(\vartheta - t)^2}{2} + \dots + \\ &+ (k_i - k + 1)(k_i - k + 2) \dots k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\vartheta - t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения при $k = k_i$ следует:

$$\begin{aligned} R_{i0}(\vartheta) &= R_{i0}(t) + 1 \cdot R_{i1}(t)(\vartheta - t) + 1 \cdot 2 \cdot R_{i2}(t) \frac{(\vartheta - t)^2}{2} + \dots + (k_i)! R_{ik_i}(t) \frac{(\vartheta - t)^{k_i}}{(k_i)!} = \\ &= R_{i0}(t) + R_{i1}(t)(\vartheta - t) + R_{i2}(t)(\vartheta - t)^2 + \dots + R_{ik_i}(t)(\vartheta - t)^{k_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выполняя последнее интегрирование, получаем с учетом (7) выражение для искоемых переменных

$$y_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t)(\vartheta - t)^{k+1}. \quad (8)$$

Аналитическое решение (8) – приближенное, поэтому определенный интерес представляет оценка его точности. Известна [2] теорема о сравнительной оценке решений двух систем дифференциальных уравнений с непрерывными по времени и состоянию функциями правых частей, т.е. вида (1), (4) (ее решение обозначим $\bar{y}$) и (5) (ее решение обозначим $\tilde{y}$), норма разности которых определяется выражением:

$$\sum_{i=1}^n |\bar{y}_i(\vartheta) - \tilde{y}_i(\vartheta)| \leq \frac{\varepsilon}{L} \left(e^{nL(\vartheta - t)} - 1 \right), \quad (9)$$

где ε – верхняя оценка модуля разности соответствующих правых частей указанных систем $|\bar{\Phi}_i(t) - \tilde{\Phi}_i(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$, представленных в виде функций времени; L – константа Липшица.

Практическое использование (9) применительно к (1), (4) и (5) затруднено наличием двух неопределенных параметров:

$$L = \max_{i, \vartheta} \left\{ \left| \bar{\Phi}_i(\vartheta) - \tilde{\Phi}_i(\vartheta) \right| / \sum_{k=1}^n \left| \bar{y}_k(\vartheta) - \tilde{y}_k(\vartheta) \right| \right\} \quad \text{и}$$

$$\varepsilon = \max_{i, \vartheta} \left| \frac{1}{k_i + 1} R_{i(k_i+1)}(\vartheta) \right|.$$

Из (8) можно получить другую оценку с одним неопределенным параметром и другими полезными свойствами. Вспомним, что при выводе (8) правая часть последнего дифференциального уравнения (5) обнулялась. Теперь же нуль заменим некоторой постоянной ε_i , и повторим вывод (8), обозначив решение системы (5) $\tilde{y}$, а системы с ε_i – $\bar{y}$. Основанием для этого является то, что по теореме о среднем решение последнего дифференциального уравнения системы (4) может быть записано в виде $R_{ik_i}(\vartheta) = R_{ik_i}(t) + \varepsilon_i \cdot (\vartheta - t)$, $\varepsilon_i = (k_i + 1) R_{i(k_i+1)}(\xi_i)$, $\xi_i \in [t, \vartheta]$. С учетом равенства $\bar{y}(t) = \tilde{y}(t)$ (так как начальное состояние систем одно и то же) и следующего из этого равенства $\bar{R}_{ik}(t) = \tilde{R}_{ik}(t) = R_{ik}(t)$ получаем:

$$\bar{y}_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t)(\vartheta - t)^{k+1} + \frac{1}{k_i + 1} \varepsilon_i (\vartheta - t)^{k_i+1}. \quad (10)$$

Искомую оценку получим вычитанием из (10) выражения (8):

$$\bar{y}_i(\vartheta) - \tilde{y}_i(\vartheta) = \frac{1}{k_i + 1} \varepsilon_i (\vartheta - t)^{k_i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Отметим, что оценка (11) в отличие от (9) определена для каждого компонента решения, имеет всего один неизвестный параметр ε_i , и получена в виде равенства.

Для уменьшения k_i в правых частях (1) можно выделить линейную часть, а оставшиеся нелинейные члены представить разложениями вида (2) с соответствующими дифференциальными уравнениями (5). В таком случае можно получить аналитические решения для нелинейных членов R_{i0} , которые определяются по (8). Эти решения представляют собой известные функции времени, параметров и начальных условий. Таким образом, в итоге получится некоторая линейная система с известными внешними воздействиями $R_{i0}(t, y^0)$.

Приведенный способ приближенного решения дифференциальных систем, несмотря на его простоту, нам в литературе не встречался. На основе предлагаемого подхода могут разрабатываться разнообразные аналитические и численные методы анализа и синтеза многомерных нелинейных систем. До настоящего времени данный подход применялся нами в трех задачах: для уточнения оценок матрицы ковариаций в обобщенном методе Дункана, для ускоренного определения терминального управления, для идентификации нелинейных систем.

Остановимся подробнее на последних двух задачах. Вначале рассмотрим терминальную задачу управления

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u(t)$ – $(r \times 1)$ -вектор управляющих воздействий; x^0 – $(n \times 1)$ -вектор начальных условий; J^* – желаемое значение терминального критерия. Известные на всем интервале детерминированные внешние воздействия, по предположению, входят в непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам $(n \times 1)$ -вектор-функцию Φ . Для расчета управления нами предложен метод, названный «методом конечного состояния» (МКС). Метод основан на использовании моделей, где в роли переменных выступают прогнозные значения конечного состояния неуправляемого движения системы как функции времени начала неуправляемого движения. Кроме переменных конечного состояния,

элементами указанных моделей являются нелинейные переходные матрицы, впервые определенные в [3] вместе с переменными конечного состояния для систем вида (1) с дополнительными аддитивно входящими управляющими воздействиями. Расчет МКС-управления производится по соотношениям:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= G^+ \cdot f_J(\bar{x}(t_f, t, x(t))), \quad G^+ = G^T / GG^T, \\
 G &= \left. \frac{\partial J(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \cdot W(t_f, t, x(t)) B(t), \\
 \frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))), \\
 \frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \left. \frac{\partial \Phi(\vartheta, x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(\vartheta, t, x(t))} \cdot W(\vartheta, t, x(t)), \\
 \vartheta \in [t, t_f], \quad W(t, t, x(t)) &= I, \quad \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t), \quad t \in [t_0, t_f],
 \end{aligned} \tag{13}$$

где I - единичная матрица; f_J - правая часть дифференциального уравнения, определяющего желаемую траекторию критериальной функции времени $\bar{J}(t) = J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$. Например, при $f_J = (J^* - \bar{J}(t))/T_u$ имеем соответственно экспоненциальную с постоянной времени T_u траекторию, приближающуюся при $t \rightarrow t_f$ к желаемому значению критерия J^* . В (13) входят элементы модели конечного состояния: вектор переменных конечного состояния $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ и нелинейная переходная матрица $W(\vartheta, t, x(t))$ как функции второго временного аргумента t .

Из (13) видно, что для расчета управления в каждый момент времени t необходимо знать $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и $W(t_f, t, x(t))$, которые согласно (13) могут быть определены многократным (по числу моментов t) численным интегрированием объединенной системы векторно-матричных уравнений на переменном интервале $\vartheta \in [t, t_f]$. Для ускорения процесса расчета $\bar{x}$ и W как раз и можно воспользоваться представлением (8). В [4] данный подход применен для расчета МКС-управления двигателем постоянного тока с последовательным возбуждением. При этом использована математическая модель двигателя в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, а алгоритм расчета МКС-управления в каждый момент времени содержит около семидесяти операций умножения, деления, сложения и вычитания с плавающей запятой. Таким образом, экономия по сравнению с (13), где количество операций намного больше (количество опера-

ций для расчета правых частей системы из (13), умноженное на количество точек дискретизации интервала $\vartheta \in [t, t_f]$, весьма значительная. При этом количество учитываемых членов тейлоровских разложений для всех правых частей взято одинаковым и равным трем.

Вторая из упомянутых выше задач – задача параметрической идентификации элементов модели конечного состояния, входящих в алгоритм МКС-управления (13) – $\bar{x}$ и W . Соответствующая работа, включающая пример и тексты компьютерных программ на языке Matlab, опубликована в трудах третьей международной конференции по идентификации и управлению SICPRO-04 в Институте проблем управления РАН им. В.А.Трапезникова.

Если предположить, что функции правых частей однородной части системы (12) $\Phi_i(t, x(t)) \equiv R_{i0}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ могут быть представлены некоторым классом функций, зависящих от постоянных параметров $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_c$, где n_c – максимальное количество параметров в аппроксимациях каждой из правых частей, то можно ставить задачу определения матрицы A такой, чтобы норма разности между откликами исходной и аппроксимированной систем в пространстве переменных конечного состояния, полученными в результате некоторого ограниченного объема экспериментов над объектом, была минимальной.

В рамках поставленной задачи необходимо следующее: во-первых, указать способ определения отклика в пространстве переменных конечного состояния; во-вторых, конкретизировать (8) с учетом (6) и принятых аппроксимаций. Кроме того, при решении конкретной задачи идентификации возникает в той или иной степени задача планирования эксперимента.

Для определения отклика $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, согласно (13), требуется в некоторый момент t задать или зарегистрировать текущее состояние $x(t)$ и, начиная с момента t , до конечного момента t_f произвести «прогонку» системы при отключенном управлении. Конечное состояние неуправляемого движения системы и является искомым $\bar{x}(t_f, t, x(t))$. Таким образом, в предлагаемом способе идентификации не требуется измерение или вычисление производных фазовых координат, что, как известно, производится со значительными ошибками.

Таким образом, предлагаемый способ приближенного аналитического решения нелинейных дифференциальных систем уже показал свою полезность при разработке новых алгоритмов анализа, синтеза и идентификации систем управления. Видны и другие пути его применения, например,

для задач управления с граничными условиями, параметрической оптимизации, анализе чувствительности.

Библиографический список

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1971. — 576 с.
3. Алексеев В.М. Об одной оценке возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М. Алексеев // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1961. — №2. — С. 28 – 36.
4. Шушляпин Е.А. Модификация метода конечного состояния для синтеза управления реального времени в многомерных нелинейных терминальных системах с дифференцируемыми нелинейностями / Е.А. Шушляпин, А.Е. Шушляпина // Радиоэлектроника, информатика, управление. — 2003. — №1. — С. 166 – 172.

Поступила в редакцию 30.09.2003 г.