

УДК 681.511

В.С. Кудашев, аспирант,

Ф.Д. Пряшников, д-р техн. наук, проф.,

Е.Н. Ларионова, ст. преподаватель

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

dee@sevgtu.sebastopol.ua

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предлагается метод решения полиномиальных уравнений с двумя неизвестными и их систем для определения границ областей устойчивости и заданного качества систем автоматического управления. Рассматривается пример решения уравнений.

Необходимость разработки методов решения полиномиальных уравнений обоснована тем, что к таким уравнениям приводятся уравнения границ областей устойчивости и заданного качества линейных непрерывных систем автоматического управления при полиномиальной зависимости коэффициентов передаточной функции системы от ее варьируемых параметров.

Цель данной работы – предложить методы решения полиномиальных уравнений и систем полиномиальных уравнений с двумя неизвестными.

Наиболее легко с коэффициентами передаточных функций можно связать косвенные показатели качества (запасы устойчивости, колебательность и т.п.) систем автоматического управления [1]. При этом используются частотные характеристики системы. Для непрерывных линейных систем автоматического управления эти уравнения приводятся к полиномиальному виду.

Если в коэффициенты передаточной функции входит всего один варьируемый параметр то, в случае линейного вхождения задачу определения границ областей устойчивости можно свести к задаче определения вещественных решений полиномиального уравнения с одной неизвестной. Однако, если варьируемый параметр входит не линейно, а полиномиально, или определяются границы областей заданного качества, то в уравнение или в систему уравнений входят полиномиально уже два параметра: частота и варьируемый параметр. Возникает необходимость в методах решения полиномиального уравнения с двумя неизвестными.

Существуют следующие основные методы решения систем двух полиномиальных уравнений с двумя неизвестными [2]:

1) вычисление определителя Сильвестра (нахождение результата двух уравнений);

2) вычисление наибольшего общего делителя двух многочленов с полиномиальными коэффициентами.

Оба этих метода сводят задачу нахождения решения системы полиномиальных уравнений к определению вещественных решений полиномиального уравнения с одной неизвестной.

Основной недостаток при нахождении результата – плохая обусловленность решения и быстрое увеличение времени расчетов с ростом степени полиномов. Использование методов Гаусса и Жордана при нахождении определителя приводит к необходимости в манипулировании с дробно-рациональными выражениями вместо полиномиальных. При этом плохая обусловленность решения остается, так как в результате получается тот же самый многочлен, что и при разложении по строке или столбцу.

При использовании наибольшего общего делителя двух многочленов с полиномиальными коэффициентами основным недостатком является быстрый рост степени результирующего многочлена, а также появление множества лишних решений, что требует дополнительной проверки.

Если требуется решить полиномиальное уравнение с двумя неизвестными, то необходимо перебирать значения одной неизвестной, решая полиномиальное уравнение относительно другой неизвестной. Достоинство – простота метода, недостаток - большое время вычислений и отсутствие гарантированности определения всех границ областей устойчивости и заданного качества ввиду переборного характера метода.

Предлагается метод решения полиномиальных уравнений и систем полиномиальных уравнений с двумя неизвестными. Метод имеет следующие преимущества:

1) не требуется сведения задачи к решению полиномиального уравнения с одной неизвестной более высокой степени;

2) исходные уравнения не преобразовываются;

3) имеет место единый механизм определения решения как для отдельных уравнений, так и для их систем;

4) не требуется отделение корней.

Как было показано в [3], вещественные решения полиномиального уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

с одной неизвестной могут быть найдены, если исходный полином

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

представляется в виде

$$f(x) = u(x) - v(x),$$

где

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n_u} u_i x^i, \quad v(x) = \sum_{i=0}^{n_v} v_i x^i,$$

причем $u_i \geq 0, i = 0, \dots, n_u, v_i \geq 0, i = 0, \dots, n_v$.

При этом, если $a_i > 0, i = 0, \dots, n$, то $u_i = a_i$, а, если $a_i < 0, i = 0, \dots, n$, то $v_i = -a_i$. В остальных случаях $u_i = 0, v_i = 0$.

Решения уравнения (1) определяются следующим образом:

- 1) отрезок неопределенности делится пополам;
- 2) для каждого из полученных отрезков проверяется достаточное условие отсутствия корней, выполнение которого позволяет исключить отрезок из дальнейшего рассмотрения;
- 3) если величина отрезка стала достаточно малой, то он с определенной степенью точности принимается за точку, которая считается решением в случае выполнения условия малости модуля $f(x)$;
- 4) действия повторяются с пункта 2 до тех пор, пока не будут получены все решения.

Для одного уравнения с одной неизвестной достаточным условием отсутствия корней на отрезке $[a; b]$ является следующее:

$$\begin{cases} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} (b-a) + u(a) > v(b), \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=a} (b-a) + v(a) > u(b). \end{cases} \quad (2)$$

Геометрическая интерпретация условия (2) показана на рисунке 1.

Здесь, для определенности, $u(a) > v(a)$, $k(x) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a}$. Отсутствие корней на отрезке уравнения (1) интерпретируется как отсутствие пересечений функций $u(x)$ и $v(x)$ на этом отрезке. Так как обе функции имеют неотрицательные коэффициенты, то они на отрезке $[a; b]$ располагаются не ниже касательной, проведенной в точке $x = a$, и не выше хорды, соединяющей точки кривой, представляемой каждой из функций, при $x = a$ и $x = b$. Поэтому функции $u(x)$ и $v(x)$ не имеют пересечений, если при $u(a) > v(a)$ и $k(a) = u(a)$ выполняется условие $k(b) > v(b)$. Случай $v(a) > u(a)$ имеет аналогичную геометрическую интерпретацию.

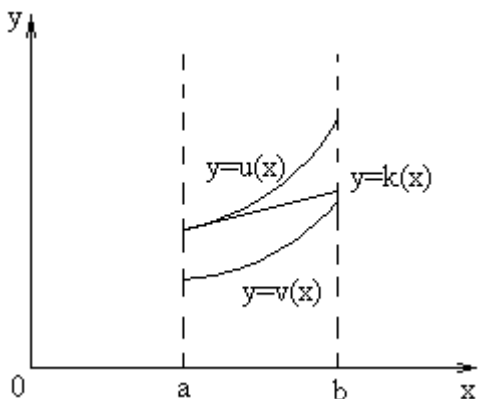


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация условия (2)

Процесс определения вещественных решений полиномиальных уравнений с двумя неизвестными является обобщением определения вещественных корней полиномиального уравнения с одной неизвестной.

Пусть на плоскости варьируемых параметров XOY задан прямоугольник $x \in (x_1; x_2)$, $y \in (y_1; y_2)$, причем $x_2 > x_1 > 0$, $y_2 > y_1 > 0$. Необходимо в этом прямоугольнике определить корни уравнения

$$f(x, y) = 0, \quad (3)$$

где

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} x^i y^j.$$

Функция $f(x, y)$ представляется в виде $f(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$, где

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{Nu} \sum_{j=0}^{Mu} a_{ij} x^i y^j, \quad v(x, y) = \sum_{i=0}^{Nv} \sum_{j=0}^{Mv} b_{ij} x^i y^j, \quad \text{причем } a_{ij} \geq 0, \quad b_{ij} \geq 0.$$

Вводятся следующие функции:

$$u_{y1}(x) = u(x, y_1); \quad u_{y2}(x) = u(x, y_2);$$

$$v_{y1}(x) = v(x, y_1); \quad v_{y2}(x) = v(x, y_2);$$

$$u_{x1}(y) = u(x_1, y); \quad u_{x2}(y) = u(x_2, y);$$

$$v_{x1}(y) = v(x_1, y); \quad v_{x2}(y) = v(x_2, y).$$

Достаточным условием отсутствия корней уравнения (3) в прямоугольнике на основании (2) условия является следующее:

$$\begin{cases} u_{y1}(x_1) > v_{y2}(x_1), \\ u_{y1}(x_1) + \frac{du_{y1}}{dx} \Big|_{x=x_1} (x_2 - x_1) > v_{y2}(x_2), \\ v_{y1}(x_1) > u_{y2}(x_1), \\ v_{y1}(x_1) + \frac{dv_{y1}}{dx} \Big|_{x=x_1} (x_2 - x_1) > u_{y2}(x_2). \end{cases} \quad (4)$$

Если условие (4) не выполняется, то проверяется следующее условие:

$$\begin{cases} u_{x1}(y_1) > v_{x2}(y_1), \\ u_{x1}(y_1) + \frac{du_{x1}}{dy} \Big|_{y=y_1} (y_2 - y_1) > v_{x2}(y_2), \\ v_{x1}(y_1) > u_{x2}(y_1), \\ v_{x1}(y_1) + \frac{dv_{x1}}{dy} \Big|_{y=y_1} (y_2 - y_1) > u_{x2}(y_2). \end{cases} \quad (5)$$

Выполнение хотя бы одного из условий (4) или (5) свидетельствует об отсутствии корней уравнения $f(x, y) = 0$ в прямоугольнике $x \in (x_1; x_2)$, $y \in (y_1; y_2)$. Если ни одно из условий не выполняется, то исходный прямоугольник делится на два меньших, в каждом из которых проверяется достаточное условие отсутствия корней (4) или (5). Деление производится до тех пор, пока не будут отброшены все прямоугольники, не содержащие корней по (4) или (5), либо размеры прямоугольников не станут такими, что их можно принять с некоторой точностью за точки, которые могут являться корнями, что проверяется по значению модуля $f(x, y)$.

Для решения системы

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

достаточное условие отсутствия корней в прямоугольнике проверяется для каждого уравнения. Достаточным условием отсутствия вещественных корней системы в прямоугольнике является отсутствие вещественных корней у каждого уравнения системы в этом прямоугольнике. Далее происходит деление до тех пор, пока не будут определены точки, являющиеся корнями системы (6).

Геометрическая интерпретация условия (4) показана на рисунке 2 для случая $u_{y1}(x_1) > v_{y2}(x_1)$. Здесь $k(x) = \frac{du_{y1}}{dx} \Big|_{x=x_1}$. Заштрихованные области – это проекции поверхностей $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на плоскость XOZ . Поскольку коэффициенты членов $u(x, y)$ и $v(x, y)$ неотрицательны, то проекции заключены между кривыми, являющимися проекциями поверхностей при

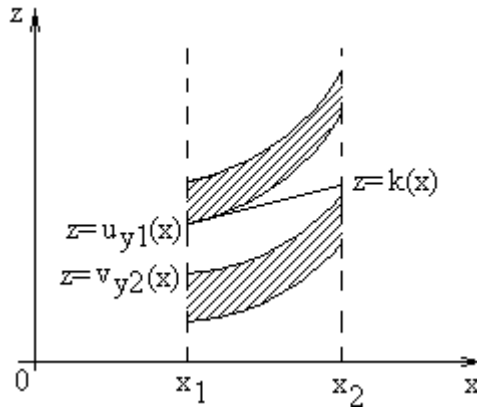


Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация условия (4)

$y = y_1$ и $y = y_2$. Таким образом, для проекций можно применить условие (2), что дает условие (4).

Аналогично интерпретируется случай $v_{y1}(x_1) > u_{y2}(x_1)$.

Если условие (4) не выполняется, то производится проецирование на плоскость YOZ , что дает условие (5).

В качестве примера можно рассмотреть решение уравнений

$$\begin{aligned}
 &0.0755555555555556 * W - 0.262222222222222 * W * L^2 - 0.00282222222222222 * \\
 &* W^3 + 0.00826666666666667 * W^3 * L^2 - 0.0104888888888889 * W^3 * L^4 + \\
 &+ 3.93333333333333E-5 * W^5 - 7.86666666666667E-5 * W^5 * L^2 - \\
 &- 2.42222222222222E-7 * W^7 + 2.22222222222222E-7 * W^7 * L^2 + \\
 &+ 5.55555555555556E-10 * W^9 = 0
 \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned}
 &9.33333333333333 - 0.297777777777778 * W^2 + 0.484444444444444 * W^2 * L^2 + \\
 &+ 0.00343333333333333 * W^4 - 0.00666666666666667 * W^4 * L^2 + \\
 &+ 0.00444444444444444 * W^4 * L^4 - 1.66666666666667E-5 * W^6 + \\
 &+ 2.22222222222222E-5 * W^6 * L^2 + 2.77777777777778E-8 * W^8 = 0.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Такие уравнения возникают при определении границ областей заданной колебательности для системы автоматического управления второго порядка. Здесь W - частота, L - варьируемый параметр.

Процесс решения с использованием деления исходного прямоугольника на прямоугольники меньшего размера и полученные кривые решений уравнений (7) и (8) показаны на рисунках 3 и 4.

Деление на прямоугольники показано только до тех пор, пока размеры прямоугольников не стали меньше одного пикселя.

Совместное решение уравнений (7) и (8) дало следующие результаты:

$$L=0,288937; W=13,538945.$$

Р

Рисунок 3 – График решения уравнения (7)

Рисунок 4 – График решения уравнения (8)

Дальнейшее развитие работы возможно в следующих направлениях:

1) ускорение вычисления условий (4) и (5) на основе применения ко-соугольной проекции к поверхностям $u(x, y)$ и $v(x, y)$;

2) обобщение метода решения полиномиальных уравнений с одной и двумя неизвестными на случай трех и более неизвестных.

Библиографический список

1. Пряшников Ф.Д. Методы построения уравнений границ областей заданного качества линейных систем автоматического управления / Ф.Д. Пряшников // Автоматика-2000: Тр. междунар. конф., Львов, сент. 2000 г. — Львов, 2000. — С. 206 – 210.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М: Наука, 1968. — 432 с.
3. Кудашев В.С. Метод решения уравнений границ областей устойчивости и качества систем автоматического управления / В.С. Кудашев, Ф.Д. Пряшников // Автоматика-2002: Материалы междунар. конф. по управлению, Донецк, сент. 2002 г. — Донецк, 2002. — С. 211 – 212.

Поступила в редакцию 30.09.2003 г.