

УДК 681.5

В.Н. Мирянова

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@stel.sebastopol.ua

УРАВНЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ ЗАДАННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Получены уравнения, вещественные решения которых определяют границы областей заданного показателя колебательности распределенных систем автоматического управления в пространстве одного варьируемого параметра.

Введение. Многие системы автоматического управления включают динамические элементы, математические модели которых требуют применения дифференциальных уравнений в частных производных. К числу таких динамических элементов могут быть отнесены трубопроводы, различные плавильные и нагревательные печи, автоклавы, химические и ядерные реакторы, разнообразные двигательные установки [1]. Параметры, характеризующие подобные динамические элементы, обычно распределены по одной или нескольким пространственным координатам. Системы, содержащие динамические элементы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных и трансцендентными передаточными функциями, определяются как системы автоматического управления с распределенными параметрами (САУ с РП) или распределенные системы.

При описании САУ с РП их часто аппроксимируют системами с сосредоточенными параметрами или с запаздыванием. За одиночными исключениями такая замена не может не привести к существенной потере качественных характеристик системы. Поэтому успешное решение задач автоматизации процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами, тесно связано с развитием теории автоматического управления, а также с созданием математического и информационного обеспечения.

Теория управления системами с распределенными параметрами в настоящее время находится в стадии интенсивного развития. Это объясняется широким распространением этих систем в промышленности, технике, окружающей среде, а также необходимостью все более точно учитывать зависимость параметров объектов управления от их пространственной протяженности, подвижности источников воздействия при исследовании и создании сложных систем автоматического управления.

Одной из задач теории управления является разработка методов параметрического исследования систем, заключающихся в изучении поведения

системы при изменении ее параметров. Подобные задачи можно решать путем построения в пространстве системных параметров областей, в которых система сохраняет свои свойства (устойчивость, качественные характеристики) [2].

Эта проблема достаточно хорошо изучена для систем с сосредоточенными параметрами [2], систем с запаздываниями [4], однако подобный подход в меньшей степени рассмотрен для систем автоматического управления с распределенными параметрами.

Часто для построения областей устойчивости системы применяется метод D-разбиения. При этом границы областей определяются графически или методом перебора, что существенно снижает гарантию правильности решения.

Поэтому для таких задач целесообразно применять методы, основанные на построении аналитических зависимостей, определяющих границы областей устойчивости и заданного качества системы.

Уравнения, определяющие границы областей устойчивости систем с распределенными параметрами, получены в [5].

Здесь рассматривается метод построения зависимостей, определяющих границы областей заданного показателя колебательности M , который характеризует склонность системы к колебаниям и определяется максимальным значением амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы [2].

Постановка задачи. Решается задача построения уравнений, вещественные решения которых определяют границы областей, где система обладает показателем колебательности, не превышающим заданный $M_{\max}$.

Рассматриваются распределенные системы автоматического управления, коэффициенты передаточной функции прямой цепи которых зависят от варьируемых параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$, $Q \in \mathbb{N}$. В случае одного варьируемого параметра можно записать

$$W(\lambda, s) = \frac{b(\lambda, s)}{a(\lambda, s)} e^{\gamma(\lambda, s)}, \quad (1)$$

$$\text{где } b(\lambda, s) = \sum_{l=0}^n b_l(\lambda) s^l; a(\lambda, s) = \sum_{l=0}^m a_l(\lambda) s^l;$$

$$\gamma(\lambda, s) = \frac{B(\lambda, s)}{A(\lambda, s)}; B(\lambda, s) = \sum_{i=0}^v \beta_i(\lambda) s^i; A(\lambda, s) = \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_i(\lambda) s^i.$$

Тогда показатель колебательности определяется следующим образом

$$M_{\max} = A(\lambda, \omega)_{\max} = |\Phi(\lambda, j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(\lambda, j\omega)}{1 + W(\lambda, j\omega)} \right|_{\max},$$

где $A(\lambda, \omega)$ – амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы; $\Phi(\lambda, j\omega)$ – частотная передаточная функция замкнутой системы.

Или с учетом (1) получаем

$$M_{\max} = \left| \frac{b(\lambda, j\omega) e^{\gamma(\lambda, j\omega)}}{a(\lambda, j\omega) + b(\lambda, j\omega) e^{\gamma(\lambda, j\omega)}} \right|_{\max}. \quad (2)$$

Материал и результаты исследования. Для решения поставленной задачи применяется обобщение метода D-разбиения [3], которое заключается в том, что пространство параметра λ разбивается на области, в каждой из которых сохраняется значение некоторой функции $f(\lambda)$. Функция вводится таким образом, что только для тех значений λ , для которых $f(\lambda) = 0$, обеспечивается выполнение заданных ограничений на показатели работы системы. Значения функции принадлежат множеству целых неотрицательных чисел. Для показателя колебательности в качестве $f(\lambda)$ может быть выбрана функция, значения которой равны числу пересечений $A(\lambda, \omega)$ и горизонтальной прямой $M = M_{\max}$.

Изменение числа пересечений происходит при тех значениях λ , при которых $A(\lambda, \omega)$ касается прямой $M = M_{\max}$. Уравнения касания имеют вид [3]:

$$\begin{cases} A(\lambda, \omega) = M_{\max}, \\ A'_{\omega}(\lambda, \omega) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Все вещественные решения λ системы (3) соответствуют касанию $A(\lambda, \omega)$ и прямой $M = M_{\max}$.

Рассматриваются два случая: 1) один варьируемый параметр полиномиальным образом входит в показатель экспоненты передаточной функции (1):

$$\gamma(\lambda, j\omega) = \frac{\sum_{v=0}^{\varepsilon} \lambda^v \sum_{i=0}^{\nu} \beta_{iv} (j\omega)^i}{\sum_{p=0}^{\sigma} \lambda^p \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_{ip} (j\omega)^i}; \quad \beta_i(\lambda) = \sum_{v=0}^{\varepsilon} \beta_{iv} \lambda^v; \quad \alpha_i(\lambda) = \sum_{p=0}^{\sigma} \alpha_{ip} \lambda^p; \quad s = j\omega; \quad (4)$$

2) один варьируемый параметр полиномиальным образом входит в коэффициенты многочленов $a(\lambda, j\omega)$ и $b(\lambda, j\omega)$ передаточной функции (1) при $s = j\omega$.

В этом случае (1) определяется следующим выражением

$$W(\lambda, j\omega) = \frac{\sum_{u=0}^v \sum_{l=0}^n \lambda^u b_{lu}(j\omega)^l}{\sum_{p=0}^r \sum_{l=0}^m \lambda^p a_{lp}(j\omega)^l} e^{\gamma(j\omega)}. \quad (5)$$

Для получения $A(\lambda, \omega)$ необходимо знать вещественные и мнимые части квазиполиномов в числителе и знаменателе (2) при $s = j\omega$. На основании соотношений, полученных в [5], в первом случае можно записать

$$A(\lambda, \omega) = \left| \frac{e^{M(\lambda, \omega)} \{ [b_{RE}(\omega) \cos N(\lambda, \omega) - b_{IM}(\omega) \sin N(\lambda, \omega)] + j [b_{RE}(\omega) \sin N(\lambda, \omega) + b_{IM}(\omega) \cos N(\lambda, \omega)] \}}{a_{RE}(\omega) + e^{M(\lambda, \omega)} [b_{RE}(\omega) \cos N(\lambda, \omega) - b_{IM}(\omega) \sin N(\lambda, \omega)] + j [a_{IM}(\omega) + e^{M(\lambda, \omega)} [b_{RE}(\omega) \sin N(\lambda, \omega) + b_{IM}(\omega) \cos N(\lambda, \omega)]]} \right|,$$

где $a_{RE}(\omega)$, $a_{IM}(\omega)$, $b_{RE}(\omega)$, $b_{IM}(\omega)$ – вещественные и мнимые части полиномов $a(j\omega)$, $b(j\omega)$, входящих в (1); $M(\lambda, \omega)$, $N(\lambda, \omega)$ – вещественная и мнимая части показателя экспоненты (1), которые в данном случае согласно [5] определяются выражениями

$$M(\lambda, \omega) = \frac{\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{RE\rho}(\omega) \sum_{v=0}^{\xi} \lambda^v \beta_{REV}(\omega) + \sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{IM\rho}(\omega) \sum_{v=0}^{\xi} \lambda^v \beta_{IMv}(\omega)}{\left(\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{RE\rho}(\omega) \right)^2 + \left(\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{IM\rho}(\omega) \right)^2},$$

$$M(\lambda, \omega) = \frac{\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{RE\rho}(\omega) \sum_{v=0}^{\xi} \lambda^v \beta_{IMv}(\omega) + \sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{IM\rho}(\omega) \sum_{v=0}^{\xi} \lambda^v \beta_{REV}(\omega)}{\left(\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{RE\rho}(\omega) \right)^2 + \left(\sum_{\rho=0}^{\sigma} \lambda^{\rho} \alpha_{IM\rho}(\omega) \right)^2},$$

где $\alpha_{RE\rho}(\omega)$, $\alpha_{IM\rho}(\omega)$, $\beta_{REV}(\omega)$, $\beta_{IMv}(\omega)$ – вещественные и мнимые части выражений $\sum_{i=0}^{\mu} \alpha_{ip}(j\omega)^i$; $\sum_{i=0}^v \beta_{iv}(j\omega)^i$ из (4).

Таким образом, после некоторых преобразований систему (3) в случае полиномиальной зависимости от параметра λ многочленов показателя экспоненты можно представить в виде

$$\begin{cases} e^{M(\lambda, \omega)} \sum_{i=0}^m \left(\tilde{q}_i(\omega) \sin N(\lambda, \omega) + \tilde{\tilde{q}}_i(\omega) \cos N(\lambda, \omega) \right) = 0, \\ e^{M(\lambda, \omega)} \sum_{i=0}^m \left(\tilde{c}_i(\lambda, \omega) \cos N(\lambda, \omega) - \tilde{\tilde{c}}_i(\lambda, \omega) \sin N(\lambda, \omega) \right) = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{q}_i(\omega)$, $\tilde{\tilde{q}}_i(\omega)$ – многочлены аргумента ω ; $\tilde{c}_i(\lambda, \omega)$, $\tilde{\tilde{c}}_i(\lambda, \omega)$ – функции от аргументов ω и λ ; $M(\lambda, \omega) = \operatorname{Re} \gamma(\lambda, j\omega)$, $N(\lambda, \omega) = \operatorname{Im}(\gamma(\lambda, j\omega))$ – вещественная и мнимая части показателя экспоненты передаточной функции прямой цепи.

Во втором случае вещественная и мнимая части знаменателя (2) согласно [5] определяются выражениями

$$\mathbf{e}^{\lambda^r}_{r=0}^p a_{REr}(\omega) + e^{M(\omega)} \mathbf{e}^{\lambda^u}_{u=0}^v [b_{REu}(\omega) \cos N(\omega) - b_{IMu}(\omega) \sin N(\omega)],$$

и

$$\mathbf{e}^{\lambda^r}_{r=0}^p a_{IMr}(\omega) + e^{M(\omega)} \mathbf{e}^{\lambda^u}_{u=0}^v [b_{REu}(\omega) \sin N(\omega) + b_{IMu}(\omega) \cos N(\omega)]$$

соответственно, где $a_{REr}(\omega)$, $a_{IMr}(\omega)$, $b_{REu}(\omega)$, $b_{IMu}(\omega)$ – вещественные и мнимые части выражений $\sum_{r=0}^p a_{lp}(j\omega)^l$; $\sum_{u=0}^v b_{lu}(j\omega)^l$, получающихся при изменении порядка суммирования в (5). Поэтому выражение для $A(\lambda, \omega)$ запишется в виде:

$$A(\lambda, \omega) = \left| \frac{e^{M(\omega)} \left(\sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \cos N(\omega) - b_{IMu}(\omega) \sin N(\omega)] + j \sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \sin N(\omega) + b_{IMu}(\omega) \cos N(\omega)] \right)}{\sum_{r=0}^p \lambda^r a_{REr}(\omega) + e^{M(\omega)} \sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \cos N(\omega) - b_{IMu}(\omega) \sin N(\omega)] + j \left(\sum_{r=0}^p \lambda^r a_{IMr}(\omega) + e^{M(\omega)} \sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \sin N(\omega) + b_{IMu}(\omega) \cos N(\omega)] \right)} \right|.$$

Итак, в случае полиномиальной зависимости коэффициентов многочленов дробно-рациональной части передаточной функции (1) система (3) аналогичным образом может быть представлена следующими соотношениями:

$$\begin{cases} e^{M(\omega)} \sum_{i=0}^m \left(\tilde{g}_i(\lambda, \omega) \sin N(\omega) + \tilde{\tilde{g}}_i(\lambda, \omega) \cos N(\omega) \right) = 0, \\ e^{M(\omega)} \sum_{i=0}^m \left(\tilde{h}_i(\lambda, \omega) \sin N(\lambda, \omega) + \tilde{\tilde{h}}_i(\lambda, \omega) \cos N(\omega) \right) = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{g}_i(\lambda, \omega)$, $\tilde{\tilde{g}}_i(\lambda, \omega)$, $\tilde{h}_i(\lambda, \omega)$, $\tilde{\tilde{h}}_i(\lambda, \omega)$ – многочлены аргументов λ и ω ; $M(\omega) = \operatorname{Re} \gamma(j\omega)$, $N(\omega) = \operatorname{Im}(\gamma(j\omega))$ – соответственно вещественная и мнимая части показателя экспоненты передаточной функции прямой цепи.

Вывод. Рассмотренный метод построения уравнений, определяющих границы заданного показателя колебательности, является новым для систем автоматического управления с распределенными параметрами. Полученные уравнения имеют сложный характер, являются трансцендентными и требуют специальных методов решения в отличие от подобных уравнений для сосредоточенных систем. Предложенные зависимости могут быть использованы для построения областей заданного качества, для выбора параметров при исследовании и проектировании распределенных систем автоматического управления, что может составить перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список

1. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1977. — 320 с.
2. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — М.: Наука, 1975. — 768 с.
3. Пряшников Ф.Д. Уравнения границ областей заданного качества линейных систем автоматического управления / Ф.Д. Пряшников // Тр. междунар. конф. по управлению «Автоматика - 2000». — Львов, 2000. — Т. 1. — С. 206. — 209.
4. Обжерин Ю.Е. Исследование уравнений границ областей устойчивости и запасов устойчивости систем автоматического управления с несколькими запаздываниями / Ю.Е. Обжерин, П.Ф. Пряшникова // Тр. междунар. конф. по управлению «Автоматика - 2000». — Львов, 2000. — Т. 2. — С. 183 — 188.
5. Пряшников Ф.Д. Уравнения границ областей устойчивости распределенных систем автоматического управления в пространстве одного параметра / Ф.Д. Пряшников, В.Н. Мирянова // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2003. — Вып. 6. — С. 86 – 93.

Поступила в редакцию 03.11.2003 г.