

АНАЛИЗ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РЕДУЦИРОВАННЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Федоряк Р.В.

Рассматривается система модального управления (СМУ) с редуцированным наблюдателем состояния. Получены математические модели СМУ при обработке управляющего и возмущающего воздействия.

Рассмотрим систему модального управления (СМУ) с редуцированным наблюдателем состояния (НС). Модальный регулятор (МР) замыкается по измеряемым переменным состояния объекта регулирования (ОР) и по восстановленным при помощи НС не измеряемым переменным состояния.

На систему действуют измеряемый управляющий и не измеряемый возмущающий сигналы. Структурная схема такой системы в пространстве состояния показана на рисунке 1, где обозначены v – управляющее воздействие, f – возмущающее воздействие, X_{o1} – m -мерный вектор не измеряемых переменных состояния объекта, $\hat{X}_{o1}$ – его оценка редуцированным НС, X_{o2} – r -мерный вектор измеряемых переменных состояния объекта, $\hat{y}_{oc} = K_{n1} \hat{X}_{o1}$ – оценка линейного функционала не измеряемых переменных состояния ОР, $K_1 = [k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1m}]$, $K_2 = [k_{21} \ k_{22} \ \dots \ k_{2r}]$ – коэффициенты передачи модального регулятора по векторам переменных, $\hat{X}_{o1}$ и X_{o2} соответственно, L – коэффициенты матрицы корректирующих связей НС, размером $m \times r$.

Векторы K_1 и K_2 связаны с вектором коэффициентов модального регулятора СМУ без НС следующими соотношениями:

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_m \mid k_{m+1} \ k_{m+2} \ \dots \ k_n] = [K_1 \mid K_2], \quad (1)$$

где $n = m + r$ – порядок ОР.

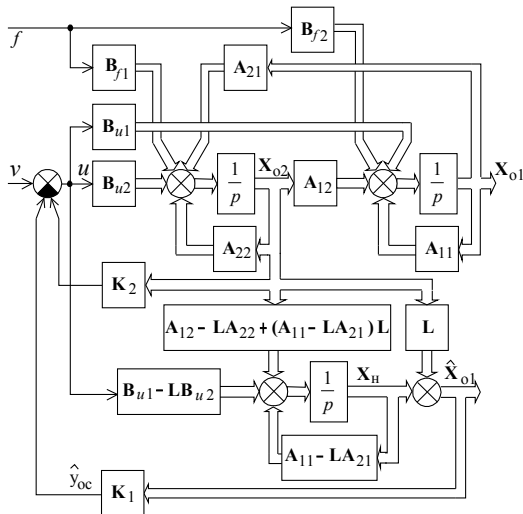


Рисунок 1

В принципе некоторые или все коэффициенты вектора $\mathbf{K}_2$ могут быть равны нулю. В этом случае речь уже идет не о модальном управлении, а о системе с произвольной структурой с единственным условием: линейная комбинация восстановленных наблюдателем переменных состояния поступает только на вход внешнего регулятора.

Система (рисунок 1) описывается в пространстве состояний системой уравнений:

$$p \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_2 & \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_2 & \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f1} \\ \mathbf{B}_{f2} \\ \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L}\mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix} f, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_{o1} = \mathbf{X}_{o1} - \hat{\mathbf{X}}_{o1}$ – ошибка оценивания наблюдателя.

Нетрудно показать, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} = \mathbf{A}_{o3}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{o3} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

– матрицы состояния объекта регулирования и СМУ, замкнутой по собственным переменным состояния (без НС), и вектор управления ОР соответственно.

Обозначим также

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f1} \\ \mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (3)-(5) в уравнение (2) и объединяя две верхние клетки 3-го столбца клеточной матрицы состояния, получаем

$$p \begin{bmatrix} \mathbf{X}_o \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{o3} & \mathbf{B}_u \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_o \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L}\mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix} f, \quad (6)$$

где $\mathbf{A}_{n3} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ – матрица состояния замкнутого наблюдателя.

Таким образом, матрица состояния СМУ с редуцированным НС приводится к такой же треугольной форме, как и для СМУ с НС полного порядка [1].

Из (6) следует, что характеристический полином СМУ с редуцированным НС G_3 равен произведению характеристических полиномов СМУ без НС G_{o3} и НС G_{n3} :

$$G_3(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_3) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{o3}) \cdot \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{n3}) = G_{o3}(p) \cdot G_{n3}(p), \quad (7)$$

т.е. известное утверждение о раздельности и независимости собственных значений замкнутой системы и наблюдающего устройства справедливо не только для наблюдателей полного порядка, но и для редуцированных.

При анализе выражения (7) может возникнуть впечатление о том, что включение в систему наблюдателя снижает ее быстродействие. Однако на самом деле это не так, потому что в общем случае быстродействие и другие показатели качества переходных процессов зависят не только от полюсов передаточной функции (ПФ), но и от ее нулей. В связи с этим определим из (6) матричную ПФ исследуемой СМУ от управляющего и возмущающего воздействий до вектора состояния:

$$\mathbf{W}_x(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_3)^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03} & -\mathbf{B}_u\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{LB}_{f2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Воспользовавшись формулой обращения клеточной матрицы [2], получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x(p) &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_o(p)}{v(p)} & \frac{\mathbf{X}_o(p)}{f(p)} \\ \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p)}{v(p)} & \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p)}{f(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{xv}(p) & \mathbf{W}_{xf}(p) \\ \tilde{\mathbf{W}}_{xv}(p) & \tilde{\mathbf{W}}_{xf}(p) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1}\mathbf{B}_u & (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1}\mathbf{B}_f + (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1}\mathbf{B}_u\mathbf{K}_1(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1}(\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{LB}_{f2}) \\ \mathbf{0} & (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1}(\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{LB}_{f2}) \end{bmatrix}. \quad (9) \end{aligned}$$

Из (9) видно, что ПФ СМУ с НС от управляющего воздействия до переменных состояния объекта регулирования $\mathbf{W}_{xu}(p)$ совпадает с соответствующей ПФ СМУ без НС $\mathbf{W}_{xuo}(p)$ (см. схему рисунок 2):

$$\mathbf{W}_{xv}(p) = \frac{\mathbf{X}_o(p)}{v(p)} = \mathbf{W}_{xvo}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1}\mathbf{B}_u = \frac{Adj(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})\mathbf{B}_u}{det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})}, \quad (10)$$

а ошибки оценивания при обработке управляющего воздействия тождественно равны нулю. Сопоставляя характеристический полином ПФ (7) с полиномом (10), приходим к выводу, что передаточные функции СМУ с редуцированным НС полного порядка по управляющему воздействию содержат в числителе характеристический полином наблюдателя, который сокращается с таким же полиномом в знаменателе. Это свойство систем с редуцированным НС было замечено еще Н.Т. Кузовковым [1] при рассмотрении конкретных примеров, однако оно не было доказано в общем виде.

При обработке возмущающего воздействия поведение вектора ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{X}}_{o1}$ определяется передаточной функцией $\mathbf{W}_{xfn}(p)$ замкнутого НС, к которому приложено возмущающее воздействие

$$\mathbf{W}_{\tilde{x}f}(p) = \tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p)/f(p) = \mathbf{W}_{xfn}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1}(\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{LB}_{f2}), \quad (11)$$

а поведение координат объекта зависит как от параметров объекта, так и от параметров наблюдателя.

Анализируя правую верхнюю клетку матрицы (9), можно записать:

$$\mathbf{W}_{xf}(p) = \mathbf{X}_0(p) / f(p) = \mathbf{W}_{xfo}(p) + \mathbf{W}_{xvo}(p) \cdot W_{y_{oc}f_n}(p), \quad (12)$$

где

$$W_{y_{oc}f_n}(p) = \hat{y}_{oc}(p) / f(p) = \mathbf{K}_1(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{нз})^{-1}(\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L}\mathbf{B}_{f2}) = \mathbf{K}_1\mathbf{W}_{xfn}(p) \quad (13)$$

– передаточная функция замкнутого наблюдателя от приложенного к нему возмущающего воздействия до суммарного сигнала обратной связи внешнего регулятора по переменным состояния наблюдателя (см. рисунок 3).

Р

Рисунок 3

Рисунок 2

Следовательно, передаточные функции СМУ с НС полного порядка (рисунок 1) по возмущающему воздействию равна сумме соответствующей передаточной функции СМУ без НС (рисунок 2) по возмущающему воздействию и произведения передаточной функции СМУ без НС по управляющему воздействию и передаточной функции замкнутого наблюдателя (рисунок 3) от возмущающего воздействия, приложенного к НС, до суммарного сигнала обратной связи модального регулятора по переменным состояния наблюдателя.

Следует отметить, что полученные результаты справедливы и в том случае, если управляющее и возмущающее воздействия являются не скалярными, а векторными сигналами.

Библиография

1 Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. — М.: Машиностроение, 1976. — 184 с.

2 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 664 с.

Поступила в редакцию 17.10.1999 г.