

УДК 681.5.09

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ ПЕРЕНАЛАЖИВАЕМОГО ПРОИЗВОДСТВА

Чуб О.П., Копп В.Я.

*Приведен вывод формул для определения математического ожидания и дисперсии случайных величин, потоки событий которых получены при суперпозиции процессов восстановления и суперпозиции альтернирующих процессов восстановления.*

Работа гибких или переналаживаемых автоматизированных систем (ГАС) мелкосерийного производства характеризуется изготовлением некоторого количества  $n$  различных партий изделий величиной  $n_i$  за определенный календарный промежуток времени. При построении математической модели ГАС [1] использовался известный прием, когда выполняется декомпозиция системы, анализируются составляющие элементы (подсистемы) и после проведения анализа отдельные части соединяются в единое целое, определяются характеристики всей системы. При определении характеристик работы всей ГАС производятся операции суперпозиции случайных процессов.

При необходимости оценить характеристики работы (производительность, надежность, долю потерь времени на переналадки и отказы и т.п.) данной ГАС и в дальнейшем при разработке модели более сложной производственной системы, состоящей из совокупности ГАС, удобно пользоваться числовыми характеристиками случайных величин, не прибегая к определению функций распределения. Это значительно упрощает решение поставленной задачи и разработку программного обеспечения для автоматизации процесса математического моделирования.

Далее приведен вывод формул для определения числовых характеристик функций распределения случайных величин при суперпозиции случайных процессов.

При суперпозиции  $n$  процессов восстановления [2], заданных функциями распределения  $\bar{F}_i(t)$  СВ  $\alpha_i$  времен восстановлений  $i$ -х подсистем, функция распределения суммарного потока определяется как

$$\bar{F}_{1,n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^j(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n \int_0^{\infty} \bar{F}_i^j(x_i^j) dx_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M \alpha_i^j}. \quad (1)$$

В (1) используется вспомогательный индекс  $j = \overline{1, n}$  для образования неполных ( $i \neq j$ ) произведений  $\prod_{j=1, j \neq i}^n$  под знаком суммы. В комментариях, а также в результирующих выражениях, полученных с использованием формул (1), (5), (6) и других, содержащих аналогичные неполные произведения под знаком суммы, индекс  $j = \overline{1, n}$  опускается.

В случае суперпозиции двух потоков восстановления с функциями распределения  $\bar{F}_1(t)$ ,  $\bar{F}_2(t)$  СВ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  времен восстановления, функция распределения суммарного потока запишется как

$$\bar{F}_{1,2}(t) = \frac{\bar{F}_1(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_2(x_2) dx_2 + \bar{F}_2(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_1(x_1) dx_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2}. \quad (2)$$

Математическое ожидание равно

$$\begin{aligned} M_{1,2}^o &= \int_0^\infty \bar{F}_{1,2}(t) dt = \frac{\int_0^\infty (\bar{F}_1(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_2(x_2) dx_2) dt + \int_0^\infty (\bar{F}_2(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_1(x_1) dx_1) dt}{M\alpha_1 + M\alpha_2} = \\ &= \frac{\int_0^\infty (\bar{F}_2(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_1(x_1) dx_1) dt + \int_0^\infty (\bar{F}_1(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_2(x_2) dx_2) dt}{M\alpha_1 + M\alpha_2} = \frac{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $M\alpha_1$ ,  $M\alpha_2$  – математические ожидания СВ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Дисперсия } D_{1,2}^o &= 2 \int_0^\infty t \cdot \bar{F}_{1,2}(t) dt - (M_{1,2}^o)^2 = \\ &= 2 \int_0^\infty t \left( \frac{\bar{F}_2(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_1(x_1) dx_1 + \bar{F}_1(t) \cdot \int_0^t \bar{F}_2(x_2) dx_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2} \right) dt - \left( \frac{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2} \right)^2, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $D\alpha_1$ ,  $D\alpha_2$  – дисперсии СВ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

В случае суперпозиции  $n$  процессов восстановления, (3), (4) записываются в виде (5), (6)

$$M_{1,n}^o = \frac{\prod_{i=1}^n M\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}, \quad (5)$$

$$D_{1,n}^o = 2 \int_0^\infty t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^j(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n \int_t^\infty \bar{F}_i^j(x_i^j) dx_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j} dt - \left( \frac{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2} \right)^2, \quad (6)$$

где  $M\alpha_i$  – математические ожидания СВ  $\alpha_i$ ;  $D\alpha_i$  – дисперсии СВ  $\alpha_i$ .

Если производится суперпозиция альтернирующих процессов восстановления (АПВ), то, как показано в [2], (1), (2) соответствуют функциям распределения времени между событиями, а (3) – (6) математическим ожиданиям и дисперсиям СВ времени наработки на отказ при суперпозиции АПВ и для СВ времени наработки на отказ при суперпозиции АПВ с блокировками.

Далее приведен вывод формул математического ожидания и дисперсии СВ времени восстановления при суперпозиции АПВ и для СВ времени наработки на отказ при суперпозиции АПВ с блокировками. Для этих видов АПВ формулы совпадают.

При суперпозиции  $n$  АПВ [3, 4], заданных функциями распределения  $\bar{G}_i(t)$  СВ  $\beta_i$  времен восстановлений и функциями распределения СВ  $\alpha_i$  времен наработки на отказ  $\bar{F}_i(t)$ , функция распределения суммарного потока находится в виде

$$\bar{G}_{1,n}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{G}_i^j(t) \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}, \quad (7)$$

где  $M\alpha_i$  – математические ожидания СВ  $\alpha_i$ .

В случае суперпозиции двух АПВ с функциями распределения  $\bar{G}_1(t)$ ,  $\bar{G}_2(t)$  СВ  $\beta_1, \beta_2$  времен восстановлений и функциями распределения СВ  $\alpha_1, \alpha_2$  времен наработки на отказ  $\bar{F}_1(t)$ ,  $\bar{F}_2(t)$ , функция распределения суммарного потока равна

$$\bar{G}_{1,2}(t) = \frac{\bar{G}_1(t) \cdot M\alpha_2 + \bar{G}_2(t) \cdot M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2},$$

где  $M\alpha_1, M\alpha_2$  – математические ожидания СВ  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Математическое ожидание запишется в виде

$$M_{1,2}^B = \int_0^\infty \bar{F}_{1,2}(t) dt = \frac{M\alpha_2 \int_0^\infty \bar{G}_1(t) dt + M\alpha_1 \int_0^\infty \bar{G}_2(t) dt}{M\alpha_1 + M\alpha_2} = \frac{M\beta_1 \cdot M\alpha_2 + M\beta_2 \cdot M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2},$$

где  $M\beta_1, M\beta_2$  – математические ожидания СВ  $\beta_1, \beta_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Дисперсия } D_{1,2}^B &= 2 \int_0^\infty t \cdot \bar{G}_{1,2}(t) dt - (M_{1,2}^B)^2 = \\ &= 2 \frac{M\alpha_2 \int_0^\infty t \cdot \bar{G}_1(t) dt + M\alpha_1 \int_0^\infty t \cdot \bar{G}_2(t) dt}{M\alpha_1 + M\alpha_2} - \left( \frac{M\beta_1 \cdot M\alpha_2 + M\beta_2 \cdot M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2} \right)^2 = \\ &= 2 \frac{M\alpha_2 \cdot (D\beta_1 + M^2\beta_1) + M\alpha_1 \cdot (D\beta_2 + M^2\beta_2)}{M\alpha_1 + M\alpha_2} - \left( \frac{M\beta_1 \cdot M\alpha_2 + M\beta_2 \cdot M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2} \right)^2, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $D\beta_1, D\beta_2$  – дисперсии СВ  $\beta_1, \beta_2$ .

В случае суперпозиции трех АПВ с функциями распределения  $\bar{G}_1(t)$ ,  $\bar{G}_2(t)$ ,  $\bar{G}_3(t)$  СВ  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  времен восстановления и функциями распределения СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  времен наработки на отказ  $\bar{F}_1(t)$ ,  $\bar{F}_2(t)$ ,  $\bar{F}_3(t)$ , функция распределения суммарного потока выражается как

$$\bar{G}_{1,3}(t) = \frac{\bar{G}_1(t) \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_2(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_3(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2}, \quad (9)$$

где  $M\alpha_1, M\alpha_2, M\alpha_3$  – математические ожидания СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Математическое ожидание

$$\begin{aligned} M_{1,3}^B &= \int_0^\infty \bar{G}_{1,3}(t) dt = \int_0^\infty \frac{\bar{G}_1(t) \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_2(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_3(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} dt = \\ &= \frac{M\beta_1 \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3 + M\beta_2 \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\beta_3 \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $M\beta_1, M\beta_2$  – математические ожидания СВ  $\beta_1, \beta_2$ .

$$\begin{aligned} \text{Дисперсия } D_{1,3}^B &= 2 \int_0^\infty t \cdot \bar{G}_{1,3}(t) dt - (M_{1,3}^B)^2 = \\ &= 2 \int_0^\infty t \cdot \frac{\bar{G}_1(t) \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_2(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + \bar{G}_3(t) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} dt - (M_{1,3}^B)^2 = \\ &= 2 \frac{(D\beta_1 + M^2\beta_1) \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} + 2 \frac{(D\beta_2 + M^2\beta_2) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} + \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{(D\beta_3 + M^2\beta_3) \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} -$$

$$- \left( \frac{M\beta_1 \cdot M\alpha_2 \cdot M\alpha_3 + M\beta_2 \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\beta_3 \cdot M\alpha_1 \cdot M\alpha_2}{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + M\alpha_1 \cdot M\alpha_3 + M\alpha_3 \cdot M\alpha_2} \right)^2, \quad (11)$$

где  $D\beta_1, D\beta_2$  – дисперсии СВ  $\beta_1, \beta_2$ .

В случае суперпозиции  $n$  АПВ, (9)-(11) принимают вид

$$M_{1,n}^B = \frac{\sum_{i=1}^n M\beta_i^j \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j},$$

$$D_{1,n}^B = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^n (D\beta_i^j + M^2\beta_i^j) \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n M\beta_i^j \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n M\alpha_i^j} \right)^2,$$

где  $M\alpha_i, M\beta_i$  – математические ожидания СВ  $\alpha_i, \beta_i$ ;  $D\beta_i$  – дисперсии СВ  $\beta_i$ .

Приведенные формулы служат основой для построения моделей различных элементов АПС и могут быть использованы для выбора их оптимальных параметров.

### **Библиография**

1 Копп В.Я., Чуб О.П., Обжерин Ю.Е. Математическая модель оценки влияния переналадок и отказов на производительность ГПС мелкосерийного производства // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. техн. ун-т. — 1999. — Вып. 1. — С. 39–45.

2 Копп В.Я., Чуб О.П., Обжерин Ю.Е., Шипилов И.Ю. Анализ суперпозиции случайных процессов при описании функционирования различных структур ГПС // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. техн. ун-т. — 1999. — Вып. 1. — С. 87–91.

3 Копп В.Я. и др. Полумарковская модель гибкой автоматизированной сборочной системы / Севастоп. приборостроит. ин-т. — Севастополь, 1993. — 37 с. — Деп. ГНТБ Украины 09.03.93 № 393-Ук.93.

4 Kopp W.Ja., Obzerin Ju.E., Kartashov L.E. Parametry niezawodnosciowe funkcjonowania synchronicznych jednopo-  
topotokowych linii automatycznych // Technologia i automatyzacja montazu. — 1997. — № 2. — С. 17–22.

*Поступила в редакцию 25.10.1999 г.*