

УДК 681.516.76

УРАВНЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пряшников Ф.Д.

Предлагаются уравнения, определяющие границы областей изменения параметра, обеспечивающих заданные показатели качества систем автоматического управления.

Рассматривается линейная система автоматического управления с передаточной функцией прямой цепи, непрерывно зависящей от параметра λ :

$$W(s, \lambda) = \frac{b(s, \lambda)}{a(s, \lambda)} = \frac{b_0(\lambda) + b_1(\lambda)s + \dots + b_m(\lambda)s^m}{a_0(\lambda) + a_1(\lambda)s + \dots + a_n(\lambda)s^n}. \quad (1)$$

Решается задача построения уравнений, решения которых определяют границы областей, внутри которых система обладает показателями качества не хуже заданных. Такие области будем называть областями заданного качества.

Качество будем характеризовать показателем колебательности, полосой пропускания и перерегулированием.

Решение задачи осуществляется путём применения обобщения метода Д-разбиения. Д-разбиение заключается в том, что ищется разбиение пространства параметра λ на области, каждая из которых соответствует определённому числу нулей характеристического многочлена замкнутой системы [1]. Для построения областей заданного качества предлагается вводить в рассмотрение функцию $f(\lambda)$ со значениями в области неотрицательных целых чисел. Функция вводится таким образом, что для тех и только тех значений λ , при которых $f(\lambda) = 0$, обеспечивается выполнение заданных ограничений на показатели качества. Обобщение Д-разбиения будет заключаться в том, что пространство параметра λ разбивается на области, в каждой из которых сохраняется значение $f(\lambda)$. Тогда границы областей будут определяться значениями λ , при которых изменяется значение $f(\lambda)$. В работе построены функции $f(\lambda)$ для таких показателей качества как колебательность, полоса пропускания и перерегулирование. Для выбранных $f(\lambda)$ получены уравнения границ обобщённого Д-разбиения.

Показатель колебательности M обеспечивается, если частотный годограф $W = W(j\omega, \lambda)$ передаточной функции (1) не пересекает окружность C

с центром в точке $\left(\frac{M^2}{M^2 - 1}, 0 \right)$ радиуса $R = \frac{M}{M^2 - 1}$ [2].

В качестве $f(\lambda)$ в этом случае может рассматриваться число пересечений частотного годографа с окружностью C . Изменение числа пересечений

происходит при тех значениях λ , при которых годограф касается окружности. В точке касания выполняются условия:

$$\begin{cases} (U(\omega, \lambda) - U_0)^2 + V^2(\omega, \lambda) = R^2, \\ \frac{dV(\omega, \lambda)}{dU(\omega, \lambda)} = \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{U}} \end{cases} \quad (2)$$

где $(\tilde{U} - U_0)^2 + \tilde{V}^2 = R^2$ — уравнение окружности; $U_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1}$;

$U(\omega, \lambda) = \operatorname{Re}\{W(j\omega, \lambda)\}$; $V(\omega, \lambda) = \operatorname{Im}\{W(j\omega, \lambda)\}$.

Для приведения второго из уравнений (2) к виду, удобному для исследования, дифференцируем уравнение окружности

$$2 \cdot (\tilde{U} - U_0) + 2 \cdot \tilde{V} \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{U}} = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует:

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{U}} = - \frac{\tilde{U} - U_0}{\tilde{V}}. \quad (4)$$

В точках касания:

$$\begin{cases} \tilde{U} = U(\omega, \lambda), \\ \tilde{V} = V(\omega, \lambda) \end{cases}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) во второе уравнение системы (2), получаем:

$$\frac{dV(\omega, \lambda)}{dU(\omega, \lambda)} = - \frac{U(\omega, \lambda) - U_0}{V(\omega, \lambda)}. \quad (6)$$

Производную, стоящую в левой части равенства (6), можно представить в виде $\frac{dV(\omega, \lambda)}{dU(\omega, \lambda)} = \frac{V'_\lambda(\omega, \lambda)}{U'_\lambda(\omega, \lambda)}$, где $V'_\lambda(\omega, \lambda)$ и $U'_\lambda(\omega, \lambda)$ — частные производные по параметру λ .

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} (U(\omega, \lambda) - U_0)^2 + V^2(\omega, \lambda) = R^2, \\ \frac{V'_\lambda(\omega, \lambda)}{U'_\lambda(\omega, \lambda)} = - \frac{U(\omega, \lambda) - U_0}{V(\omega, \lambda)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) представляет собой систему уравнений, определяющих границы интервалов с постоянным числом пересечений частотного годографа с окружностью C . В каждом из этих интервалов следует найти число k пересечений для одной из точек $\tilde{\lambda}$. Это число может быть найдено как число вещественных неотрицательных решений уравнения

$$(U(\omega, \tilde{\lambda}) - U_0)^2 = V^2(\omega, \tilde{\lambda}) = R^2.$$

Интервалы, соответствующие $k=0$, являются искомыми, обеспечивающими показатель колебательности не больше M .

Частота пропускания ω_n определяется равенством $A(\omega_n, \lambda) = 0,707$, где $A(\omega, \lambda)$ – амплитудная частотная характеристика замкнутой системы

$$A(\omega, \lambda) = \frac{W(j\omega, \lambda)}{1 + W(j\omega, \lambda)}.$$

В качестве $f(\lambda)$ в этом случае может рассматриваться

число пересечений на отрезке $[0, \omega_n]$ амплитудной частотной характеристикой горизонтальной прямой L , отстоящей от оси абсцисс на расстоянии 0,707. Изменение числа пересечений может происходить только в случаях прохождения $A(\omega, \lambda)$ через точку $(\omega_n; 0,707)$, а также в случае касания $A(\omega, \lambda)$ прямой L на отрезке $[0, \omega_n]$.

Условие прохождения кривой $A(\omega, \lambda)$ через точку $(\omega_n; 0,707)$ определяется уравнением

$$A(\omega_n, \lambda) = 0,707. \quad (8)$$

Условие касания кривой $A(\omega, \lambda)$ прямой L определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A'_\lambda(\omega, \lambda) = 0, \\ A(\omega, \lambda) = 0,707, \end{cases} \quad (9)$$

рассматриваемой на интервале $[0, \omega_n]$.

Совокупность решений уравнения (8) и системы (9) определяет концы интервалов на каждом из которых сохраняется число пересечений амплитудной частотной характеристики с прямой L на интервале $[0, \omega_n]$. На интервалах, для которых число пересечений равно нулю, обеспечивается полоса пропускания не хуже ω_n . Определение числа пересечений на каждом из интервалов $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ можно осуществить путём решения уравнения

$$A(\omega, \tilde{\lambda}) = 0,707,$$

где $\tilde{\lambda}$ – одно из значений, принадлежащих интервалу $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Аналогично, как и для полосы пропускания, могут быть получены уравнения для частоты среза ω_C :

$$\begin{cases} A(\omega, \lambda) = 1, \\ \begin{cases} A'_\lambda(\omega, \lambda) = 0, \\ A(\omega, \lambda) = 1, \end{cases} \\ \omega \in [0, \omega_C]. \end{cases}$$

Перерегулирование не превышает 18%, если вещественная частотная характеристика $P(\omega, \lambda) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(j\omega, \lambda)}{1 + W(j\omega, \lambda)} \right\}$ является невозрастающей функцией ω . Это условие эквивалентно тому, что производная $P'_\omega(\omega, \lambda)$ должна быть неположительной для $\omega \in [0, \infty)$. В качестве $f(\lambda)$, в этом случае, может рассматриваться число пересечений функцией $P'_\omega(\omega, \lambda)$ оси абсцисс, т.е. в точках, определяемых системой уравнений

$$\begin{cases} P'_\omega(\omega, \lambda) = 0, \\ P(\omega, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) представляет собой систему уравнений, определяющих границы интервалов с постоянным числом пересечений производной $P'_\omega(\omega, \lambda)$ с осью абсцисс. В каждом из этих интервалов следует найти число k пересечений для одной из точек $\tilde{\lambda}$. Это число может быть найдено как число вещественных неотрицательных решений уравнения

$$P'_\omega(\omega, \tilde{\lambda}) = 0.$$

Интервалы, соответствующие $k = 0$, являются искомыми интервалами, обеспечивающими перерегулирование не больше 18%.

Переходный процесс является монотонным, если производная $P'_\omega(\omega, \lambda)$ есть отрицательная возрастающая функция. Это условие эквивалентно тому, что $P''_\omega(\omega, \lambda)$ – неотрицательная функция на промежутке $\omega \in [0, \infty)$. В качестве $f(\lambda)$ в этом случае может рассматриваться число пересечений функцией $P''_\omega(\omega, \lambda)$ оси абсцисс. Изменение числа пересечений может происходить только в точках касания функцией $P''_\omega(\omega, \lambda)$ оси абсцисс, т.е. в точках, определяемых системой уравнений

$$\begin{cases} P''_\omega(\omega, \lambda) = 0, \\ P'_\omega(\omega, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Вещественные решения системы (11) определяют границы интервалов с одинаковым числом пересечений функцией $P''_\omega(\omega, \lambda)$ оси абсцисс. Число пересечений k на каждом интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ может быть найдено как число вещественных неотрицательных решений уравнения

$$P''_\omega(\omega, \tilde{\lambda}) = 0,$$

где $\tilde{\lambda}$ – одна из точек, принадлежащих интервалу $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Библиография

1 Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978. — 360 с.

2 Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 238 с.

Поступила в редакцию 21.09.1999 г.