

УДК 681.516.76

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Обжерин Ю.Е., Пряшников П.Ф.

Исследованы зависимости передаточных функций систем автоматического управления с несколькими запаздываниями от параметров отдельных звеньев. Проведённые исследования позволяют обосновать типы математических моделей, используемых в задачах параметрического анализа и синтеза систем автоматического управления с несколькими запаздываниями.

В задачах оптимизации производственных процессов широко используются математические модели, учитывающие одно или несколько запаздываний [1]. Такие математические модели во временной области обычно задаются матричными дифференциально-разностными уравнениями вида [2]

$$\sum_{i=0}^m A_i y'(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^m B_i y(t - \tau_i) = f(t), \quad (1)$$

где $y(t) \in R^n$ – вектор состояния; $f(t) \in R^n$ – вектор внешних воздействий; $\tau_i (i = 0, \dots, m)$ – запаздывания ($0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$); $A_i, B_i (i = 0, \dots, m)$ – матрицы размерности $n \times n$.

Рассматривается случай, когда элементы матриц A_i и B_i ($i = 0, \dots, m$), а также запаздывания τ_i ($i = 1, \dots, m$) зависят от варьируемого параметра λ . Решается задача исследования зависимости от λ матрицы передаточных функций системы (1). В частности, рассматриваются случаи линейной и полиномиальной зависимости A_i, B_i ($i = 0, \dots, m$) и τ_i ($i = 1, \dots, m$) от параметра λ , чаще всего используемые на практике.

Для получения матрицы передаточных функций применим к системе (1) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях. Получим математическую модель в комплексной области

$$\sum_{i=0}^m A_i s e^{-s\tau_i} Y(s) + \sum_{i=0}^m B_i e^{-s\tau_i} Y(s) = F(s), \quad (2)$$

где $Y(s), F(s)$ – изображения по Лапласу соответственно $y(t)$ и $f(t)$. Перепишем (2) в виде

$$R(s)Y(s) = F(s), \quad (3)$$

где $R(s) = \sum_{i=0}^m e^{-s\tau_i} (sA_i + B_i)$ – матрица размерности $n \times n$. Будем считать, что система (3) невырождена. Тогда матрица передаточных функций опре-

деляется выражением

$$\Phi(s) = R^{-1}(s) = \left[\sum_{i=0}^m e^{-s\tau_i} (sA_i + B_i) \right]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} R^*(s), \quad (4)$$

где $\Delta(s)$ – определитель матрицы $R(s)$; $R^*(s)$ – присоединённая матрица для матрицы $R(s)$. Из (4) следует, что каждый элемент $\Phi_{ij}(s)$ ($i, j = 1, \dots, n$) матрицы передаточных функций $\Phi(s)$ представляет

собой дробь $\Phi_{ij}(s) = \frac{c_{ij}(s)}{z_{ij}(s)}$ ($i, j = 1, \dots, n$), знаменатель которой

$z_{ij}(s) = \Delta(s)$ ($i, j = 1, \dots, n$), а числитель $c_{ij}(s) = R_{ij}^*(s)$ ($i, j = 1, \dots, n$). По определению, $\Delta(s)$ равен сумме всевозможных произведений элементов матрицы $R(s)$, стоящих в разных столбцах и строках, со знаками, определяемыми числом инверсий. Каждый элемент матрицы $R(s)$ – квазиполином

$$R_{ij}(s) = \sum_{k=0}^m d_{k,ij}(s) e^{-s\tau_k}, \quad (5)$$

где $d_{k,ij}(s) = sa_{k,ij} + b_{k,ij}$.

Результатом перемножения квазиполиномов вида (5) является квазиполином вида

$$P(s) = \sum_{k=0}^q p_k(s) e^{-s\omega_k}. \quad (6)$$

У квазиполинома (6), в общем случае, степени всех полиномов $p_k(s)$ ($k = 0, \dots, q$) равны числу перемножаемых квазиполиномов (5); $\omega_0 = 0$, ω_k ($k = 1, \dots, q$) представляют собой всевозможные линейные комбинации вида $c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \dots + c_m\tau_m$, где c_i – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $c_1 + c_2 + \dots + c_m \leq n$. Таким образом, знаменатель передаточных функций представляет квазиполином вида (6), число слагаемых q которого быстро увеличивается с ростом числа запаздываний. Степени всех полиномов $p_k(s)$ ($k = 0, \dots, q$) равны порядку системы n .

Числители передаточных функций, как элементы присоединённой матрицы, вычисляются аналогично определителю $\Delta(s)$ для матриц размерности $(n-1) \times (n-1)$. Таким образом, числители передаточных функций представляют из себя квазиполиномы вида (6), число слагаемых q которых определяется числом линейных комбинаций $c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \dots + c_m\tau_m$, где c_i – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию

$c_1 + c_2 + \dots + c_m \leq n - 1$. Степени всех полиномов числителей $p_k(s)$ ($k = 0, \dots, q$) на единицу меньше порядка системы n .

В случае полиномиальной зависимости запаздываний τ_i ($i = 1, \dots, m$) от параметра λ , в элементах матрицы передаточных функций от параметра λ зависят показатели экспонент квазиполиномов числителя и знаменателя, причём эта зависимость также полиномиальная, и максимальная степень этой зависимости не увеличивается. В случае линейной зависимости запаздываний τ_i ($i = 1, \dots, m$) от параметра λ , в элементах матрицы передаточных функций от параметра λ линейным образом зависят показатели экспонент квазиполиномов числителя и знаменателя. В случае полиномиальной зависимости коэффициентов квазиполиномов $a_{k,ij}, b_{k,ij}$ ($k = 0, \dots, m$; $i, j = 1, \dots, n$) от параметра λ в элементах матрицы передаточных функций от параметра λ зависят коэффициенты квазиполиномов числителей и знаменателей, причём эта зависимость полиномиальная. Максимальная степень результирующей полиномиальной зависимости равна сумме максимальных степеней полиномиальных зависимостей от параметра коэффициентов $a_{k,ij}, b_{k,ij}$ ($k = 0, \dots, m$; $i, j = 1, \dots, n$).

Рассмотрим условия, при которых квазиполиномы числителей и знаменателей элементов матрицы передаточных функций упрощаются. В первых, это происходит в случае, если в выражении (1)

$$A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0. \quad (7)$$

Равенство (7) имеет место в большинстве рассматриваемых практических случаев. При условии (7) матрица (3) принимает вид

$$R(s) = (sA_0 + B_0) + \sum_{k=1}^m e^{-s\tau_k} B_k.$$

Каждое слагаемое определителя $\Delta(s)$ представляет собой произведение n сомножителей вида

$$R_{ij}(s) = (sa_{0,ij} + b_{0,ij}) + \sum_{k=1}^m b_{k,ij} e^{-s\tau_k}.$$

Таким образом, каждое слагаемое представляет собой квазиполином, у которого максимальная степень n полинома достигается только у свободного члена. Полиномы при множителях $e^{-s\tau_k}$ (τ_k — линейная комбинация τ_k , отличная от нуля) имеют степень не выше $(n - 1)$.

Упрощение передаточных функций достигается в случае сокращения числа линейных комбинаций τ_k ($i = 1, \dots, q$) в выражении (6). В частности,

существенное упрощение достигается в случае, когда все линейные комбинации задаются равенствами

$$\omega_k = \tau_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Для определения условий выполнения равенств (8) удобно воспользоваться формулой Мэзона [3]. При выполнении условия (7) в предположении невырожденности систему (1) можно представить в виде

$$y'(t) = \sum_{i=0}^m D_i y(t - \tau_i) + \varphi(t), \quad (9)$$

где $D_i = A_0^{-1} B_i$ ($i = 0, \dots, m$), $\varphi(t) = A_0^{-1} f(t)$. В комплексной области системе (9) можно представить в виде

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left[\sum_{i=0}^m e^{-s\tau_i} D_i Y(s) + \varphi(s) \right]. \quad (10)$$

Произвольное k -е уравнение системы (10) можно представить в виде аналитического выражения

$$Y_k(s) = \frac{1}{s} \left[\sum_{i=0}^m e^{-s\tau_i} \sum_{l=1}^n d_{i,kl} Y_l(s) + \varphi_k(s) \right]$$

и соответствующего сигнального графа, изображенного на рисунке 1.

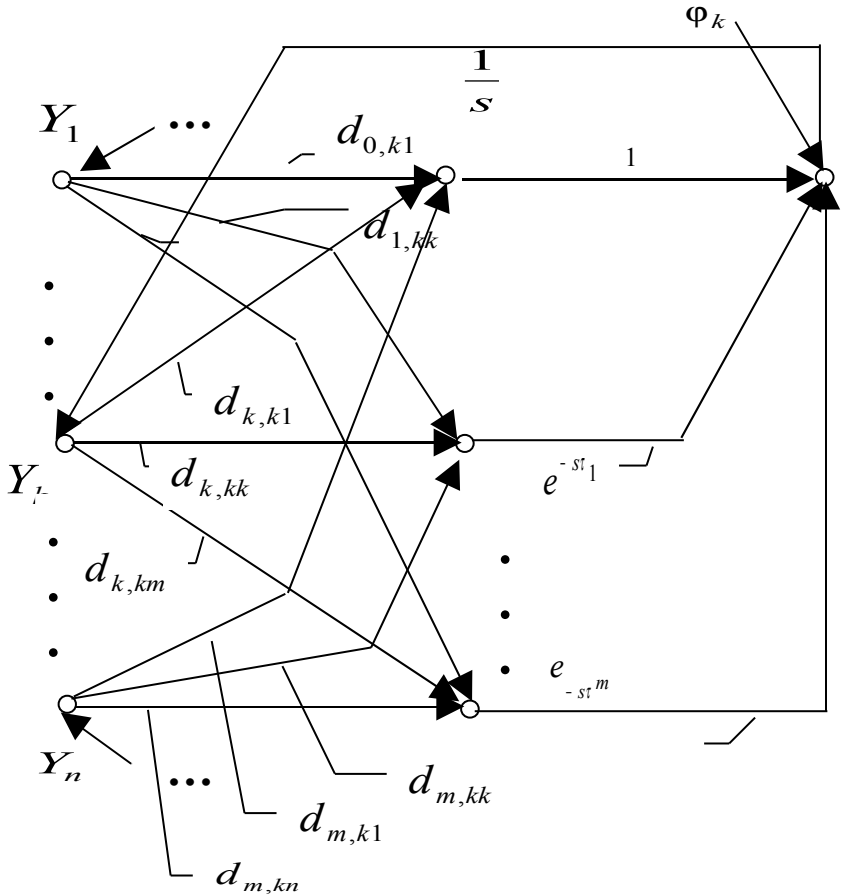


Рисунок 1 – Сигнальный граф системы с запаздываниями

Сигнальный граф всей системы (1) получается объединением сигнальных графов каждого из уравнений системы (10). По формуле Мэзона каждая из передаточных функций определяется соотношением

$$W(s) = \sum_i \frac{W_i \Delta_i}{\Delta}, \quad (11)$$

где W_i – передаточные функции прямых путей, $\Delta = 1 - \sum W_{0i} + \sum W_{0i}W_{0j}$ – главный определитель; Δ_i – определитель подграфа; W_{0i} – передаточные функции контуров; индекс суммирования i распространяется на все прямые пути.

Из (11) следует, что знаменатель не содержит произведений вида $e^{-st_i} e^{-st_j}$ тогда и только тогда, когда ветви с передаточными функциями e^{-st_i} ($i = 1, \dots, m$) входят в различные попарно пересекающиеся контуры. Для того, чтобы и числитель передаточной функции (11) не содержал произведений вида $e^{-st_i} e^{-st_j}$ дополнительно необходимо и достаточно, чтобы ветви с передаточными функциями e^{-st_i} ($i = 1, \dots, m$) входили в различные прямые пути.

Библиография

- 1 Рей У. Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
- 2 Беллман Ф., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
- 3 Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. — М.: Иностранная лит., 1963. — 620 с.

Поступила в редакцию 21.09.1999 г.