

УДК 681.3

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПИСАНИЙ МУЛЬТИПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ

Сергеев Г.Г., Скатков А.В.

Рассматривается постановка задачи исследования устойчивости расписания мультипрограммных систем. Предлагается итерационный алгоритм ее решения.

В настоящее время при решении задач математического программирования большее значение имеют вопросы устойчивости получаемых решений, параметрический и постоптимальный анализ решаемых задач. Методика проведения подобных исследований достаточно разработана и освещена в отечественной и иностранной литературе лишь для непрерывных задач, в том числе для задач линейного и квадратичного программирования [1]. В задачах дискретной оптимизации, аналогично задачам линейного программирования, известны в большинстве случаев не точные исходные данные, а лишь диапазоны их изменения. Возникает вопрос, каковы могут быть границы изменения указанных величин при условии сохранения полученного оптимального решения. Анализ вопросов устойчивости, параметрический и постоптимальный анализ вызывает особый интерес в связи с тем, что при небольших изменениях в исходных данных модели задачи дискретной оптимизации (в отличие от моделей линейного программирования) ведут себя, как правило, неустойчиво и непредсказуемо. Разными авторами предложены процедуры проведения указанных исследований на основе различных методов целочисленного программирования.

Рассмотрим задачу исследования устойчивости оптимального расписания для заявок с различными маршрутами.

Пусть длительность работ представлена матрицей A_{n^*, n^*} . Порядок выполнения операций определяется матрицей предшествования Y_{n^*, n^*} . Пусть $Y_{ij} > Y_{i^*j}$, если операция i следует во времени за операцией j , $Y_{ij} = Y_{i^*j}$, если операция порядок выполнения операций i и j безразличен. Пусть G_{n^*, n^*} – матрица, соответствующая времени начала выполнения операции A_{ij} . Расписание является допустимым, в том случае, если для любого элемента G_{ij} выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} G_{ij} \geq G_{i^*j} + A_{i^*j}, & i^* = \overline{1, n^*}, Y_{i^*j} \leq Y_{ij}, \\ G_{ij} \leq G_{i^*j} + A_{i^*j}, & i^* = \overline{1, n^*}, Y_{i^*j} \geq Y_{ij}, \\ |G_{ij} - G_{ik}| \geq A_{ik}, & k = \overline{1, n^*}. \end{cases} \quad (1)$$

Требуется минимизировать некоторый функционал

$$F = \max_{i,j} (G_{ij} + A_{ij}), \quad (2)$$

определяющий «штраф» расписания работ. Пусть A^* – множество всех возможных значений коэффициентов матрицы A . Пусть для любого $A_0 \in A^*$ можно определить множества $\Omega(A_0)$ и $\Delta(A_0)$ соответственно всех оптимальных и всех допустимых решений задачи с коэффициентами, составляющими набор A_0 . Пусть Z^n – множество всех возможных значений коэффициентов G . Пусть $G^\circ \in \Omega(A_0)$. Предполагается, что $\Omega(A_0) \neq \emptyset$. Введем в рассмотрение отношение порядка $\Theta(G^\circ)$, представленное матрицей Y° с целочисленными коэффициентами, такими, что $Y^\circ_{ij} > Y^\circ_{kl}$, если $G^\circ_{ij} > G^\circ_{kl}$; $Y^\circ_{ij} < Y^\circ_{kl}$, если $G^\circ_{ij} < G^\circ_{kl}$; $Y^\circ_{ij} = Y^\circ_{kl}$, если $G^\circ_{ij} = G^\circ_{kl}$ $i = 1 \dots n^*$, $j = 1 \dots n^*$, $k = 1 \dots n^*$, $l = 1 \dots n^*$. Будем использовать предложенный в [2] расширенный вариант постановки задачи устойчивости. Для заданных $A_0 \in A^*$, $Y^\circ = \Theta(G^\circ \in \Omega(A_0))$ и некоторого множества $W \subset Z_n$, включающего G° необходимо определить подмножество $A(W)$ в A^* такое, что из существования $\Theta(G^\circ) = Y^\circ$, $G \in \Omega(A_0) \cap W$, где $A \in A^*$, следует, что $F(G^\circ) \leq F(G)$, и наоборот. В дальнейшем область множества $A(W)$ будем называть множеством R-устойчивости, а решение $G \in \Omega(A_0) \cap W$ R-устойчивым.

Задача параметрической оптимизации для рассматриваемого случая имеет вид : $\min F(A + \lambda A')$. Без потери общности можно допустить, что числовой параметр λ удовлетворяет условию $0 \leq \lambda \leq 1$.

В [2] введены понятия сужения задачи и ряд утверждений , следствий и теорем для решения общей задачи исследования устойчивости для ЦЛП, которая может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{ext}(f(x, \lambda)/x \in M(\lambda) \subset L), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (3)$$

где λ – параметр; L и Λ – некоторые заданные множества;

$M(\lambda) = \{x \in L / g_i(x, \lambda) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad h_j(x, \lambda) = 0, \quad j = 1 \dots p\}$, $f(x, \lambda)$, $g_i(x, \lambda)$, $(i = 1, \dots, m)$, $h_j(x, \lambda)$ ($j = 1 \dots p$) – заданные числовые функции, определенные на $L \times \Lambda$.

В статье [3] рассмотрена задача ЦЛП с булевыми переменными $\min \{z = cx / Ax \leq b, \quad x_j = 0, 1; \quad j = 1 \dots n\}$, в процессе решения которой предлагается эффективный алгоритм процедуры постоптимального анализа, состоящего из двух фаз: решения задачи и собственно постоптимального анализа. Рассуждая аналогично [3], сформулируем алгоритм процедуры постоптимального анализа задачи (2) при условии (1).

Пусть под воздействием внешних дестабилизирующих факторов коэффициент A_{ij} матрицы может меняться в диапазоне от A_{ij}^- до A_{ij}^+ и для каждого коэффициента определена функция распределения вероятности $F_{ij}(A_{ij} < t)$. Пусть для любого A_{ij} известно, что $P\{A_{ij} | A_{ij}^- \leq A_{ij} \leq A_{ij}^+ \} = \gamma$.

Пусть $A_0 \in A^*$ – матрица длительностей, $Y^\circ = \Theta(G^\circ \in \Omega(A_0))$ – некоторое отношение порядка, определяющее оптимальный календарный A_0 .

Пусть для произвольного момента времени $0 \leq t \leq \infty$ существует не нулевая вероятность того, что требование i^* , которое может быть обслужено на приборе j вместо требования i , не обслуживается в момент времени t не одним прибором j^* , согласно оптимальному порядку Y^*

$$P\{\exists (C_{ij^*} \neq C_{ij}) \mid Y\} > 0 \quad (4)$$

Смена отношения порядка $Y'_{ij} \neq Y^\circ_{ij}$ приведет к тому, что $F(G', A_1) < F(G^\circ, A_1)$, где $A_1 \in A^*$.

Далее рассмотрим без доказательства несколько утверждений, на основании которых может быть построен алгоритм процедуры постоптимального анализа.

Лемма 1. Если, согласно расписанию G° , заявка K_j после обслуживания на приборе L_i поступает на прибор L_{i^*} , при этом $A_{ij^+} < A_{i^*j^+}$, где K_{j^*} – требование, обслуживаемое на приборе L_{i^*} непосредственно перед заявкой K_j , то при произвольном уменьшении коэффициента матрицы A_{ij} значение функционала (3) остается неизменным.

Лемма 2. Если для требования K_m , которое согласно расписанию G° обслуживается на приборе L_i после требования L_j имеет место условие (5) к моменту времени $t < G^\circ_{im}$, $t \leq G^\circ_{ij}$, то смена порядка обслуживания требований K_i и K_m на приборе L_j не приведет к уменьшению функционала (2) в том случае, если условие (4) не имеет места для $t < G^\circ_{i^*m}$ при $Y^\circ_{i^*m} > Y_{im}$.

Процесс обслуживания требований цепочки C назовем непрерывным, если для всех требований справедливо $G_{ij} + A_{ij} = G_{ij^*}$ или $G_{ij} + A_{ij} = G_{i^*j}$. Время начала процесса обслуживания C для операции $A_{ij} \in C$ определяется одним из двух факторов. В первом случае – временем завершения обслуживания некоторой цепочки C^n , содержащей операцию A_{ij^*} , $Y_{ij^*} = Y_{ij^*} - 1$; во втором случае – временем завершения обслуживания некоторой цепочки C^n , содержащей операцию A_{i^*j} , где L_{i^*} – прибор, которым производилось обслуживание требование K_j непосредственно перед операцией A_{ij} . Цепочку C^n , время завершения которой определяет время начала C будем называть определяющей, а другую, соответственно, вторичной.

Лемма 3. Смена порядка обслуживания может привести к искомому уменьшению целевой функции (2), только в том случае если это приведет к уменьшению времени завершения определяющей цепочки для операции A_{ij} .

Лемма 4. Если изменение коэффициентов матрицы длительностей операций A_{ij} не может привести к изменению определяющих цепочек, то порядок операций в этих цепочках остается неизменным при изменениях коэффициентов матрицы $A_{ij}^- \leq A_{ij} \leq A_{ij}^+$.

Рассмотрим алгоритм процедуры постоптимального анализа задачи (3) при условии (2).

Алгоритм. *Формулируем и решаем задачу построения расписания, решение которой доставляет минимум функции цели*

$$F = \left(\max_{i,j} (G_{ij}^-, A_{ij}^+) \right) \rightarrow \min \quad (5)$$

коэффициенты которой A_{ij}^+ – наибольшие интересующие нас значения коэффициентов A . Формируем G^0 и Y^0 .

Каждый раз, когда зондируется какое-либо частичное решение задачи (5), сохраняем информацию о нем (G^s) и соответствующей ему $Y^s = \Theta(G^s)$. Для каждого факта обслуживания требования K_j прибором L_i строится множество альтернативных требований T_{ij} , которые могут быть обслужены к моменту времени t , $G_{ij}^s \leq t \leq G_{ij}^s + A_{ij}^+$.

Определяем непрерывные цепочки в G и цепочки их определяющие. Если для некоторой цепочки C для решения G^s при A_{ij}^- определяющей является цепочка C' , а при A_{ij}^+ C'' , то потенциально возможно нарушение устойчивости. Рассматриваем операции A_{ij}^- , входящие в состав C' и C'' . Исключаем из рассмотрения требования, для которых справедливы леммы 1 и 2. Рассматриваем все возможные альтернативы их замещения операциями из T_{ij} , исключая требования, для которых справедлива лемма 3. Если такая замена приведет к меньшему значению целевой функции, чем при порядке Y^0 , то в этом случае расписание является неустойчивым.

Предложенный выше алгоритм позволяет сделать вывод об устойчивости оптимального варианта расписания в условиях недетерминированности коэффициентов матрицы длительности работ. В том случае, если расписание является неустойчивым, в гибких производственных системах возможно следует использовать динамические методы оперативно-календарного планирования работ.

Библиография

- 1 Ашманов С.А. Условия устойчивости задач линейного программирования // Журн. вычис. математики и мат. физики. — 1981. — № 6. — С. 1402–1410.
- 2 Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1985. — 384 с.
- 3 Roodman G.M. Postoptimality analysis in zero-one programming // Manag. Sci. — 1972. — № 3. — P. 435–447.

Поступила в редакцию 20.09.1999 г.