

УДК 681.5.015

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Цуканов А.В., Горобец А.Д.

*Приводится исследование двух информационных критериев селекции систем одновременных уравнений методом имитационного моделирования. Рассмотрены примеры приведенной и структурной форм модели.*

В настоящее время все более актуальной становится проблема оптимального управления сложными системами, характеризующимися многопараметричностью и многосвязностью описывающих их процессов. Ее решение во многом зависит от возможности прогнозирования будущего состояния исследуемых объектов, т.е. от наличия адекватной математической модели. Сложность заключается в том, что для эффективного анализа и построения соответствующей модели требуется большое количество статистической информации, которая в ряде случаев отсутствует или для получения которой требуются значительные затраты. В этом случае использовать сложные модели систем невозможно и приходится применять простые модели, которые способны выявить основные взаимосвязи параметров только с ограниченной степенью точности.

Предположим, что исследуемый объект можно описать с помощью системы  $m$  структурных (одновременных) уравнений, т.е. в виде математической модели

$$\eta_{it}(\mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t, \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $\eta_{it}^T = (\eta_{1t}, \eta_{2t}, \dots, \eta_{mt})$  – вектор функций, связывающих значения эндогенных и экзогенных переменных (символ “ $T$ ” означает операцию транспонирования);

$\mathbf{y}_t^T = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})$  – вектор зависимых или внутрисистемных (эндогенных) переменных;  $\mathbf{x}_t^T = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt})$  – вектор независимых или внесистемных (экзогенных) переменных;

$\mathbf{a}_i^T = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{pi})$  – вектор неизвестных параметров размерности  $p_i$ ;

$\mathbf{u}_{it}^T = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{mt})$  – вектор случайных составляющих с нулевыми средними, неизвестными дисперсиями и нормальными распределениями.

Необходимо по результатам  $N$  наблюдений над векторами эндогенных переменных  $\mathbf{y}$  и экзогенных переменных  $\mathbf{x}$  определить структуру системы одновременных уравнений и найти оценки векторов неизвестных параметров  $\mathbf{a}_i$ , т.е. структурных коэффициентов системы (1).

В [1] авторами указываются основные проблемы, связанные с такой постановкой задачи (параметрическая идентификация, структурная идентификация, проблема оценивания) и предлагается метод для решения проблемы структурной идентификации. При этом целью идентификации

является получение модели с наилучшей прогнозирующей способностью. Здесь рассматривается проблема выбора соответствующего критерия селекции моделей. В частности исследуются два критерия для выбора модели

$$Cr = N \cdot \ln(\text{tr}\mathbf{R}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^m p_i \quad \text{и} \quad Crn = N \cdot \ln(\det \mathbf{R}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^m p_i,$$

где  $N$  – общее количество наблюдений;  $\text{tr}$  – след матрицы;  $\det$  – детерминант матрицы;  $\mathbf{R}$  – матрица остатков для всех уравнений, элементами главной диагонали которой являются остаточные суммы квадратов для каждого уравнения, а остальные элементы представляют собой оценки ковариаций остатков соответствующих уравнений;  $i=1...m$  – номер регрессионного уравнения;  $p_i$  – число параметров в  $i$ -ом структурном уравнении. Данные критерии являются обобщением информационного критерия Акаике  $AIC_i = N \cdot \ln(RSS_i) + 2 \cdot p_i$  для одного уравнения [2]. В качестве оптимальной выбирается модель, для которой критерии  $Cr$  или  $Crn$  принимают минимальное значение.

Требуется проверить работоспособность этих критериев как инструмента выбора оптимальной модели. При этом особый интерес вызывает сравнение прогнозирующей способности структурной и приведенной форм модели, выбираемых с помощью данных критериев. Для решения этой проблемы проводилось исследование критериев путем имитационного моделирования методом статистических испытаний (Монте-Карло). Для этого использовался компьютер типа IBM PC Pentium II-333 и программная система MATLAB.

Вычислительные эксперименты проводились над структурной системой и ее приведенной формой. Структурная форма модели состояла из двух уравнений с двумя изменяющимися параметрами  $a$  и  $b$  при зафиксированных остальных параметрах и имела следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1(x_1, y_2) + u_1 = 1 + 0,5x_1 + ax_1^2 + 0,2y_2 + u_1, \\ y_2 = \eta_2(x_2, y_1) + u_2 = 2 + 0,4x_2 + bx_2^2 + 0,7y_1 + u_2. \end{cases} \quad (2)$$

Система является идентифицируемой, так как условие порядка выполняется для каждого уравнения системы [3]. Приведенная форма данной структурной модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1(a, b) = 1,63 + 0,58x_1 + 1,16ax_1^2 + 0,09x_2 + 0,23bx_2^2 + v_1 \\ y_2(a, b) = 3,14 + 0,4x_1 + 0,81ax_1^2 + 0,46x_2 + 1,16bx_2^2 + v_2 \end{cases},$$

где  $v_1, v_2$  – случайные возмущения, распределенные по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией.

Экспериментальные данные моделировались следующим образом: значения экзогенных переменных  $x_1$  и  $x_2$  принимали только дискретные значения в  $N=12$  точках,  $x_1$  – в интервале от 0,5 до 1,5 с шагом 0,2, т.е. в каж-

дой точке для  $x_1$  проводилось по два эксперимента,  $x_2$  – в интервале от 1,9 до 0,8 с шагом  $-0,1$ , т.е. в каждой точке для  $x_2$  проводилось по одному эксперименту; случайные составляющие  $u_1$  и  $u_2$  генерировались датчиком случайных чисел, встроенным в систему MATLAB; параметр  $a$  изменялся в пределах от 1 до 15, параметр  $b$  изменялся в пределах от 1 до 20.

Моделировался выбор структуры уравнений с помощью приведенных выше критериев для каждой реализации экспериментальных данных. Эксперимент повторялся тысячу раз. Для каждой случайной выборки  $k=1 \dots 1000$  параметры оценивались с помощью двухшагового метода наименьших квадратов (2МНК), так как он дает состоятельные оценки коэффициентов структурной системы [3]. При этом выбор осуществлялся из следующих параметрических классов зависимостей  $\Phi$ :

а) линейные, т.е. из исходной системы (2) исключались квадратичные члены;

б) квадратичные (истинные), т.е. структура исходной системы оставалась без изменений;

в) кубические, т.е. к каждому уравнению исходной системы добавлялись экзогенные переменные в третьей степени.

Средний риск для первого уравнения системы определяется по формуле

$$I_1(k, a, b) = \sigma^2 + pr_1(k, a, b), \quad pr_1(k, a, b) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\eta_{1t} - \varphi_{1t})^2,$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия случайной составляющей (равна единице);  $pr_1(k, a, b)$  – среднеквадратическая ошибка прогноза для первого уравнения, где  $\varphi_1$  – заданный параметрический класс зависимостей для первого уравнения (линейные, квадратичные, кубические).

Средний риск для второго уравнения системы определяется по аналогии.

В качестве обобщающей величины среднего риска для системы уравнений используются формулы

$$Is(a, b) = \text{tr} \Sigma_u(a, b) + \sqrt{pr_1(a, b) + pr_2(a, b)} \quad - \text{ для критерия } Cr,$$

$$Isn(a, b) = \det \Sigma_u(a, b) + \sqrt{pr_1(a, b) + pr_2(a, b)} \quad - \text{ для критерия } Crn,$$

где  $\text{tr}$ ,  $\det$  – означают усредненные по всем опытам след и детерминант матрицы соответственно;  $\Sigma_u$  – дисперсионно-ковариационная матрица случайных остатков для всех уравнений системы;  $pr_1(a, b)$ ,  $pr_2(a, b)$  – усредненные по всем опытам среднеквадратические ошибки прогнозов для первого и второго уравнений соответственно.

Для оценки эффективности метода структурной идентификации системы используется математическое ожидание среднеквадратической ошибки прогноза (МОСКОП)

$$Rs(a,b) = \sum_{l=1}^q vs_l \cdot Is_l(a,b) ,$$

где  $l=1...q$  – номер выбираемой системы (1 – линейная, 2 – квадратическая, 3 – кубическая);  $vs_l$  – вероятность выбора модели  $l$  с помощью критерия селекции  $Cr$  (или  $Crn$ );  $Is_l(a,b)$  (или  $Isn_l(a,b)$ ) – означает величину среднего риска для  $l$ -ой модели.

На рисунках 1, 2 показаны графики зависимостей МОСКОП от параметра  $b$  для системы в целом при фиксированном значении параметра  $a=1$ , полученные с помощью имитационных экспериментов. Рисунок 1 показывает зависимости по критерию  $Cr$  для структурной и приведенной форм моделей, а рисунок 2 – по критерию  $Crn$ . При этом верхняя кривая на обоих рисунках относится к приведенной форме модели, а нижняя – к структурной. На рисунках 3, 4 изображены графики зависимостей частот выбора истинной модели от параметра  $b$  при фиксированном значении параметра  $a=10$  по критериям  $Cr$  и  $Crn$  для структурной и приведенной форм системы соответственно. Для критерия  $Cr$  график обозначен линией с ромбами, а для  $Crn$  – с треугольниками.

Рисунок 1 – Графики зависимости МОСКОП  
для структурной и приведенной форм  
С системы по критерию  $Cr$

Рисунок 2 – Графики зависимости МОСКОП  
для структурной и приведенной форм  
системы по критерию  $Crn$

Рисунок 3 – Графики зависимости частоты  
выбора истинной модели для структурной  
С формы по критериям  $Cr$  и  $Crn$

Рисунок 4 – Графики зависимости частоты  
выбора истинной модели для приведенной  
формы по критериям  $Cr$  и  $Crn$

Проведенное исследование показало, что значение МОСКОП по структурной форме модели меньше, чем по приведенной форме по обоим критериям  $Cr$  и  $Crn$  независимо от плана эксперимента на всей области изменения параметров  $a$  и  $b$ . Кроме того, эксперименты показали, что критерий  $Crn$  при малых значениях параметров  $a$  и  $b$  мощнее критерия  $Cr$ , а при больших значениях этих параметров оказывается предпочтительнее  $Cr$  как для структурной, так и для приведенной форм модели.

Выводы:

1) критерии можно использовать для селекции как структурных систем одновременных уравнений, так и приведенных форм, полученных на их основе;

2) прогнозирующая способность структурной формы модели оказывается выше, чем для приведенной формы;

3) эффективность критериев зависит от области изменения параметров.

Необходимо провести дальнейшее теоретическое исследование относительно прогнозирующей способности структурной и приведенной форм модели, способное подтвердить или опровергнуть результаты имитационных экспериментов.

### **Библиография**

1 Цуканов А.В., Горобец А.Д. Информационный критерий синтеза оптимальной системы структурных моделей экономических систем // Вестн. СевГТУ. Экономика и финансы: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1999. — Вып. 19. — С. 10–14.

2 Akaike H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. // Proc. 2nd Int. Symp. on Information Theory. Budapest, 1972. — Budapest, 1973. — P. 267–281.

3 Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во "ЮНИТИ", 1998. — 1022 с.

*Поступила в редакцию 27.10.1999 г.*