

УДК 534.1.014.5

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В ЭЛЕКТРОПРИВОДАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Канов Л.Н., Кудашев В.С., Языков А.А.

Построена математическая модель электропривода постоянного тока последовательного возбуждения. Показано, что при динамическом торможении электропривода возникают хаотические колебания токов и скорости. Получены численные характеристики подобных колебаний.

В классических монографиях по электроприводам, например [1], утверждается, что устойчивая параллельная работа двигателя последовательного возбуждения в режиме генератора с машинами параллельного возбуждения невозможна. Подобная ситуация возникает при динамическом торможении электропривода. Здесь сформирована математическая модель такого электропривода, и показано, что при переводе двигателя в генераторный режим возникают хаотические колебания токов и скорости машин.

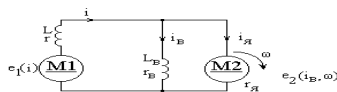


Рисунок 1 – Последовательный электропривод постоянного тока

Рисунок 1 – Последовательный электропривод постоянного тока

Для анализа электромеханических процессов в последовательном электроприводе постоянного тока рассмотрим схему на рисунке 1, состоящую из машины параллельного возбуждения М2 и двигателя последовательного возбуждения М1, работающего в генераторном режиме.

Для внешнего контура имеет место второй закон Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri + r_я i_я = e_1(i) - e_2(i_B, \omega),$$

где L , r – индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения двигателя М1; $r_я$ – сопротивление якоря машины М2; $e_1(i) = k_e i$ – ЭДС обмотки якоря М1 (полагаем, что якорь двигателя вращается с постоянной скоростью; k_e – коэффициент пропорциональности – двигатель работает на линейном участке характеристики); $e_2(i_B, \omega) = c i_B \omega$ – ЭДС обмотки якоря машины М2; ω – скорость вращения якоря этой машины; c – постоянная.

Для контура возбуждения получаем аналогично:

$$L_B \frac{di_B}{dt} + r_B i_B - r_я i_я = e_2(i_B, \omega),$$

где L_B , r_B – индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения машины М2. Уравнение динамики якоря этой машины имеет вид

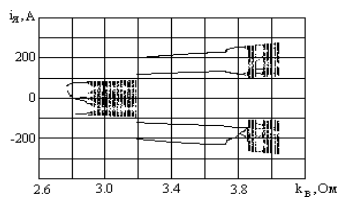
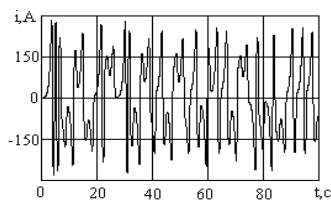
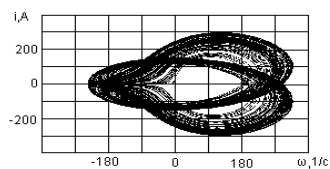
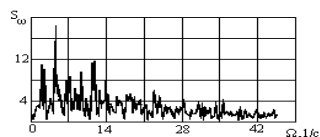


Рисунок 2 - Точечное отображение Пуанкаре

Рисунок 2 – Точечное отображение Пуанкаре

Рисунок 3 - Хаотические колебания тока якоря при $k_B = 4$ ОмРисунок 3 – Хаотические колебания тока при $k_B = 4$ ОмРисунок 4 - Фазовый портрет хаотических колебаний при $k_B = 4$ ОмРисунок 4 – Фазовый портрет хаотических колебаний при $k_B = 4$ ОмРисунок 5 - Спектральная плотность хаотических колебаний скорости вращения якоря при $k_B = 4$ ОмРисунок 5 – Спектральная плотность хаотических колебаний скорости вращения якоря при $k_B = 4$ Ом

где J – момент инерции якоря и нагрузки; k_1 – коэффициент пропорциональности между скоростью якоря и моментом сопротивления. Кроме того, очевидно, что $i_{\text{я}} = i - i_{\text{в}}$. Таким образом, математическая модель электропривода может быть записана в нормальной форме следующим образом:

(1)

Параметры электропривода для машин мощностью 5 кВт имеют следующие типичные значения: $L = 1$ Гн, $L_{\text{в}} = 2$ Гн, $c = 0,375$ Ом·с, $r = r_{\text{я}} = 1$ Ом, $r_{\text{в}} = 40$ Ом, $J = 0,8$ кг·м², $k_1 = 1$ Н·м·с. предположим далее, что такой параметр двигателя М1, как коэффициент $k_{\text{в}}$ может незначительно изменяться около своего номинального значения $k_{\text{в ном}} = 3,5$ Ом.

Чтобы оценить влияние изменения $k_{\text{в}}$ на работу системы, будем интегрировать уравнения (1) при разных значениях этого коэффициента с почти нулевыми начальными условиями. Для выявления тех значений $k_{\text{в}}$, при которых возникают колебания, будем фиксировать те величины тока i , при которых скорость $\omega = 30$ 1/с. Это означает фиксацию точки пересечения фазовой траектории системы с плоскостью $\omega = 30$ 1/с или построение точечного отображения Пуанкаре [2]. При периодических колебаниях точка пересечения занимает на плоскости $\omega = 30$ 1/с все время одно и то же положение, при хаотических колебаниях – всевозможные произвольные значения. На рисунке 2 показана диаграмма зависимости одной из фазовых координат точки, именно тока i от величины коэффициента $k_{\text{в}}$.

Из диаграммы следует, что при значениях $k_{\text{в}}$ меньших $k_{\text{в}} = 2,8$ Ом в системе существуют колебания с ярко выраженной 2-й субгармоникой. При $k_{\text{в}} = k_{\text{в1}}$ происходит удвоение периода, появляется 4-я субгармоника тока. При $k_{\text{в}} = k_{\text{в2}} = 2,9$ Ом возникает 8-я субгармоника, далее количество субгармоник лавинообразно нарастает, и в системе устанавливаются хаотические, непериодические колебания.

В диапазоне $k_{\text{в}}$ от 3,2 Ом до 3,85 Ом в системе снова наблюдаются периодические колебания с выраженной 4-й субгармоникой, а при $k_{\text{в}} > 3,85$ Ом вновь возникают хаотические колебания, перемежающиеся периодическими (при $k_{\text{в}} \approx 3,9$ Ом). Типичный вид хаотических колебаний тока якоря i показан на рисунке 3, на рисунке 4 приведен фазовый портрет системы – зависимость тока якоря i от скорости ω при $k_{\text{в}} = 4$ Ом. На рисунке 5

показан частотный спектр колебаний скорости, из которого следует, что в широком диапазоне частот спектральная плотность практически постоянна, что подтверждает хаотический характер колебаний.

Рисунок 2 представляет классический сценарий перехода от периодических, детерминированных колебаний к хаотическим через удвоение периода. Для него характерно соотношение [2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{en} - k_{en-1}}{k_{en+1} - k_{en}} = \delta,$$

где k_{ei} – значение коэффициента k_e при очередном удвоении периода, δ – универсальная постоянная Фейгенбаума: $\delta = 4,66920\dots$. Из рисунка 2 можно приближенно оценить хотя бы первый член этой последовательности:

$$\frac{k_{B2} - k_{B1}}{k_{B3} - k_{B2}} = \frac{2,9 - 2,8}{2,93 - 2,9} = \frac{0,1}{0,03} \approx 3,3,$$

что подтверждает наличие классического сценария перехода к хаосу через удвоение периода.

Важными количественными характеристиками хаотических колебаний являются показатели Ляпунова и размерность аттрактора [3]. Показатели Ляпунова характеризуют разбегание близких траекторий. Первый показатель λ_1 определяется из соотношения

$$\frac{|y(t)|}{|y(0)|} = e^{\lambda_1 t}, \quad (2)$$

где $y(t)$ – вектор переменных линеаризованной системы (1) вдоль ее траектории. Уравнение линеаризованной системы (1) имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = A \cdot y, \quad (3)$$

где матрица A формируется дифференцированием правой части системы (1) по переменным i, i_e, ω :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{k_e - r - r_y}{L} & \frac{r_y - c\omega}{L} & -\frac{ci_e}{L} \\ \frac{r_y}{L_e} & \frac{c\omega - r_e - r_y}{L_e} & \frac{ci_e}{L_e} \\ \frac{ci_e}{J} & \frac{ci - 2ci_e}{J} & -\frac{k_1}{J} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (3) и (1) интегрируются совместно с начальными условиями $y_1(0) = 1, y_2(0) = y_3(0) = 0$, и по соотношению (2) определяется показатель λ_1 :

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|y(t)|}{|y(0)|}.$$

В случае детерминированных колебаний линеаризованная система (3) устойчива, и фазовые траектории сходятся к аттрактору в виде замкнутой петли, $\lambda_1 < 0$. При хаотических колебаниях система (3) неустойчива, и вначале близкие траектории разбегаются, $\lambda_1 > 0$. Таким образом, λ_1 характеризует поведение расстояния между парой близких вначале точек потока фазовых траекторий.

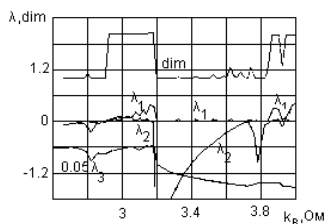


Рисунок 6 - Показатели Ляпунова и размерность аттрактора колебаний системы

Рисунок 6 – Показатели Ляпунова и размерность аттрактора колебаний системы

Аналогично, второй показатель λ_2 характеризует изменение площади прямоугольника при его перемещении вдоль фазового потока, а третий показатель λ_3 – изменение объема параллелепипеда. На рисунке 6 изображены графики показателей Ляпунова в том же диапазоне изменения коэффициента k_v , что и на рисунке 2. Из рисунка 6 видно, что при значениях k_v , соответствующих хаотическим колебаниям, показатели λ_1 , λ_2 положительны; показатель λ_3 всегда отрицателен. Следовательно, близкие вначале траектории разбегаются, однако общий объем фазового потока все же сокращается. Это позволяет высказать обоснование причин появления хаотических колебаний: нелинейная система (1) глобально устойчива, но локально неустойчива.

Размерность аттрактора нелинейной системы в режиме хаотических колебаний можно оценить по показателям Ляпунова [3]

$$\dim = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{i+1}|}, \quad (4)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, а j определяется из условий:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_j + \lambda_{j+1} < 0.$$

На рисунке 6 показан график размерности аттрактора фазовых траекторий системы (1), подсчитанной по выражениям (4), (2). График показывает, что в первой области существования хаоса размерность аттрактора близка к 2, а во второй – аттрактор обладает дробной размерностью $1 \leq \dim \leq 2$, что говорит о его фрактальной структуре. Фрактальная структура аттрактора подтверждается изображением фазового портрета системы на рисунке 4.

Приведенные исследования подтвердили невозможность режима динамического торможения двигателя последовательного возбуждения, подключенного вместе с машиной параллельного возбуждения. Попытка перевести двигатель в подобный режим вызывает появление сложных периоди-

ческих или хаотических колебаний токов якорей и возбуждения обеих машин, а также скорости машины параллельного возбуждения. Это происходит в широком диапазоне изменения коэффициента k_e , охватывающем всю область его возможного конструктивного разброса. В заключение еще раз отметим парадоксальность ситуации: во вполне детерминированной системе линейных электрических машин возникают непредсказуемые, непериодические, незатухающие, хаотические колебания.

Библиография

1 Андреев В.П. Основы электропривода / В.П. Андреев, Ю.А. Сабинин. — М.: Госэнергоиздат, 1963. — 772 с.

2 Хакен Г. Синэргетика / Г. Хакен. — М.: Мир, 1985 — 423 с.

3 Неймарк Ю.И. Стохастические и хаотические колебания. / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

Поступила в редакцию 28.10.1999 г.