

УДК 681.5

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Пряшников П.Ф.

Предложен метод построения и решения уравнений, определяющих области устойчивости систем автоматического управления с несколькими запаздываниями.

Рассматривается математическая модель систем автоматического управления с несколькими запаздываниями вида

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^Q A_i y(t - \tau_i) + bf(t), \quad (1)$$

где $y \in R^n$; $b \in R^n$; $f \in R^1$; $A_i \in R^{n \times n}$ ($i = 0, \dots, Q$); $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_Q$; $Q > 1$.

Система (1) рассматривается при начальном состоянии $y(t) = y_0(t)$; $-\tau_Q \leq t \leq 0$. Элементы матриц A_i и запаздывания τ_i зависят от вектора варьируемых параметров $\lambda \in \Lambda \subseteq R^r$. Решается задача определения подмножеств $\Lambda_z \subseteq \Lambda$ ($z = 0, \dots, r$), таких, где $\Lambda_z = \{\lambda | y(t, \lambda) - \text{устойчиво}\}$.

Наиболее известным методом решения поставленной задачи является метод Д-разбиения [1]. Недостатками Д-разбиения являются: 1) этот метод применяется для анализа устойчивости обыкновенных стационарных систем; 2) он реализован в виде переборного для границы Γ_z ; 3) основные результаты получены для линейной зависимости от параметра λ . Здесь ставится задача разработки методов, позволяющих устранить недостатки метода Д-разбиения: 1) разработать алгебраические непереборные методы построения границ областей устойчивости систем с несколькими запаздываниями; 2) распространить разработанные методы на полиномиальную зависимость от параметров.

Рассматривается алгебраизация построения границ устойчивости в пространстве одного варьируемого параметра $r=1$, а также случай полиномиальной зависимости от λ коэффициентов характеристического квазиполинома. В этом случае характеристический полином может быть записан в виде

$$a(s, \lambda) = \sum_{i=0}^P a_i(s, \lambda) e^{-\tau_i s}; \quad (2)$$

$$a_i(s, \lambda) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{ik}(\lambda) s^k; \quad a_{ik}(\lambda) = \sum_{q=0}^m a_{ikq} \lambda^q, \quad (3)$$

где γ_i – линейная комбинация запаздываний τ_l ($l = 0, \dots, Q$). Подставляя (3) в (2) и меняя порядок суммирования, получаем

$$a(s, \lambda) = \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{q=0}^m a_{ikq} \lambda^q s^k e^{-\gamma_i s} = \sum_{q=0}^m \lambda^q \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} s^k e^{-\gamma_i s}, \quad (4)$$

где $\sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} s^k e^{-\gamma_i s} = b_q(s)$.

Согласно методу Д-разбиения, уравнение, определяющее множество $\tilde{G}_z$, имеет вид

$$a(j\omega, \lambda) = 0. \quad (5)$$

Выражение (5) с учётом равенства (4) можно переписать в виде

$$\sum_{q=0}^m \lambda^q b_q(j\omega) = 0, \quad (6)$$

где $b_q(s) = \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} s^k e^{-\gamma_i s}$ – квазиполином, не зависящий от λ .

Представим $b_q(j\omega)$ в виде

$$b_q(j\omega) = c_q(\omega) + j e_q(\omega), \quad (7)$$

$$b_q(j\omega) = \sum_{i=0}^P e^{-j\gamma_i \omega} \sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} (j\omega)^k. \quad (8)$$

Представим многочлены $\sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} (j\omega)^k$ в виде

$$\sum_{k=0}^{n_i} a_{ikq} (j\omega)^k = \alpha_{iq}(\omega) + j\beta_{iq}(\omega), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} b_q(j\omega) &= \sum_{i=0}^P (\cos \gamma_i \omega - j \sin \gamma_i \omega) (\alpha_{iq}(\omega) + j\beta_{iq}(\omega)) = \\ &= \sum_{i=0}^P (\alpha_{iq}(\omega) \cos \gamma_i \omega + \beta_{iq}(\omega) \sin \gamma_i \omega) + j \sum_{i=0}^P (-\alpha_{iq}(\omega) \sin \gamma_i \omega + \beta_{iq}(\omega) \cos \gamma_i \omega). \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом обозначений (7): $c_q(\omega) = \alpha_{iq}(\omega) \cos \gamma_i \omega + \beta_{iq}(\omega) \sin \gamma_i \omega$; $e_q(\omega) = -\alpha_{iq}(\omega) \sin \gamma_i \omega + \beta_{iq}(\omega) \cos \gamma_i \omega$. Функции $c_q(\omega)$ и $e_q(\omega)$ можно представить таким образом:

$$\begin{aligned}
c_q(\omega) &= \sum_{i=0}^{n_c} c_{qi} \gamma_{ci}(\omega); \\
\gamma_{ci}(\omega) &= \begin{cases} \omega^i \sin \gamma_i \omega, & i - \text{нечётно}, \\ \omega^i \cos \gamma_i \omega, & i - \text{чётно}; \end{cases} \\
e_q(\omega) &= \sum_{i=0}^{n_e} e_{qi} \gamma_{ei}(\omega); \\
\gamma_{ei}(\omega) &= \begin{cases} \omega^i \sin \gamma_i \omega, & i - \text{чётно}, \\ \omega^i \cos \gamma_i \omega, & i - \text{нечётно}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

С учётом равенства (7) выражение (6) можно записать как

$$\begin{cases} \sum_{q=0}^m \lambda^q C_q(\omega) = 0, \\ \sum_{q=0}^m \lambda^q e_q(\omega) = 0, \end{cases}$$

которое, в свою очередь, с учётом равенств (8)-(11) можно представить как

$$\begin{cases} \sum_{q=0}^m \sum_{i=0}^{n_c} c_{qi} \lambda^q \gamma_{ci}(\omega) = 0, \\ \sum_{q=0}^m \sum_{i=0}^{n_e} e_{qi} \lambda^q \gamma_{ei}(\omega) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, множество $\tilde{\Gamma}_z$ определяется вещественными решениями системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными λ и ω . Левая часть каждого из уравнений системы (12) представляет собой сумму, каждое слагаемое которой имеет вид $\phi_{qi}(\lambda, \omega) = h_i \lambda^q \omega^i \sin(\gamma_i \omega)$ или $\phi_{qi}(\lambda, \omega) = h_i \lambda^q \omega^i \cos(\gamma_i \omega)$. Для решения подобных систем обычно применяется метод итераций. Он требует задания начальных приближений и не гарантирует определение всех решений. Предлагается следующий метод определения вещественных решений системы двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \phi(\lambda, \omega) = 0, \\ \psi(\lambda, \omega) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

свободный от этих недостатков. Метод разработан для следующего случая решения системы (13): 1) требуется найти решения системы (13) с непрерывными функциями $\phi(\lambda, \omega)$, $\psi(\lambda, \omega)$ в прямоугольнике P : $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$; 2) каждая из функций $\phi(\lambda, \omega)$ и $\psi(\lambda, \omega)$ представлена в

виде суммы слагаемых: $\varphi(\lambda, \omega) = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_i(\lambda, \omega)$; $\psi(\lambda, \omega) = \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_i(\lambda, \omega)$; 3) пря-

моугольник P разбит на прямоугольники P_k , такие, что на каждом из отрезков $\lambda_{\min,k} \leq \lambda \leq \lambda_{\max,k}$; $\omega = c = \text{const}$; $\omega_{\min,k} \leq c \leq \omega_{\max,k}$ каждое слагаемое $\chi_i(\lambda, c)$ является неубывающей или невозрастающей функцией λ , а на каждом из отрезков $\omega_{\min,k} \leq \omega \leq \omega_{\max,k}$; $\lambda = c = \text{const}$; $\lambda_{\min,k} \leq c \leq \lambda_{\max,k}$ каждое слагаемое $\chi_i(c, \omega)$ является неубывающей или невозрастающей функцией ω . При условиях 1-3 наибольшее значение $\chi_{i\max}$ каждого слагаемого $\chi_i(\lambda, \omega)$ в прямоугольнике P_k достигается в одной из вершин, а наименьшее значение $\chi_{i\min}$ — в противоположной вершине. Таким образом, значения $\chi_{i\max}$ и $\chi_{i\min}$ легко могут быть вычислены.

Имеет место следующая лемма 1:

Если выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_{i\min} > 0; \quad \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_{i\min} > 0; \quad \sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_{i\max} < 0; \quad \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_{i\max} < 0, \quad (14)$$

то в прямоугольнике P_k не существует решения системы (13). Действительно, если выполняется первое из условий (14), то, суммируя неравенства $\chi_i(\lambda, \omega) \geq \chi_{i\min}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_i(\lambda, \omega) \geq \sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_{i\min}. \quad (15)$$

Из (15) и первого из неравенств (14) в силу транзитивности отношения неравенства получим $\sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_i(\lambda, \omega) > 0$, откуда следует, что первое из

уравнений системы (13) не имеет решений в прямоугольнике P_k , а следовательно, в прямоугольнике P_k не имеет решений и вся система (13). Аналогично доказательство проводится и для остальных неравенств (14).

Лемма 1 представляет собой достаточное условие отсутствия решений системы (13) в прямоугольнике P_k ($k = 1, \dots, n_p$). Если эти условия выполняются для всех прямоугольников P_k ($k = 1, \dots, n_p$), то система (13) не имеет решения в исходном прямоугольнике P . Если для какого-то из прямоугольников P_k условия леммы не выполняются, то разбиваем прямоуголь-

ник P_k на два прямоугольника P_{11} и P_{12} например, по наибольшей стороне, методом деления пополам. Если для каждого из прямоугольников P_{11} и P_{12} выполняется одно из неравенств (14), то в этих прямоугольниках система (13) не имеет решений, и следовательно, не имеет решений в прямоугольнике P_k . В противном случае продолжаем процесс деления каждого из прямоугольников, для которого не выполняется ни одно из неравенств (14).

Имеет место **лемма 2**:

Если в прямоугольнике P_k , система (13) не имеет решения, то за конечное число делений прямоугольник P_k будет разбит на прямоугольники, в каждом из которых выполняется хотя бы одно из условий (14).

Доказательство проведём от противного. Пусть на каждом l -ом шаге разбиения существует прямоугольник, для которого не выполняются неравенства (14). Это означает, что существует последовательность вложенных прямоугольников $\{P_l\}_{l=1}^{\infty}$, для каждого из которых не выполняются неравенства (14). Поскольку наибольшая из сторон прямоугольников уменьшается в два раза при каждом увеличении l на единицу, то прямоугольники последовательности $\{P_l\}_{l=1}^{\infty}$ стягиваются в точку $(\lambda_0, \omega_0) \in P_k$. Так как $(\lambda_0, \omega_0) \in P_k$, то точка (λ_0, ω_0) по предположению не является решением системы (13): $\varphi(\lambda_0, \omega_0) \neq 0$ или $\psi(\lambda_0, \omega_0) \neq 0$. Например, можно считать $\varphi(\lambda_0, \omega_0) > 0$. Для других возможных случаев: $\varphi(\lambda_0, \omega_0) < 0$ или $\psi(\lambda_0, \omega_0) > 0$, или $\psi(\lambda_0, \omega_0) < 0$ доказательство будет аналогичным. Неравенство $\varphi(\lambda_0, \omega_0) > 0$ эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \chi_i(\lambda_0, \omega_0) > 0. \quad (16)$$

Рассмотрим последовательность $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ окрестностей точки (λ_0, ω_0) , стягивающуюся к точке (λ_0, ω_0) . В силу непрерывности функций $\chi_i(\lambda, \omega)$ ($i = 1, \dots, n_{\varphi}$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{(\lambda, \omega) \in C_k} \chi_i(\lambda, \omega) = \chi_i(\lambda_0, \omega_0). \quad (17)$$

Суммируя (17) по $i = 1, \dots, n_{\varphi}$ и меняя местами знак предела и суммы, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \min_{(\lambda, \omega) \in C_k} \chi_i(\lambda, \omega) = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \chi_i(\lambda_0, \omega_0). \quad (18)$$

Из (18) и (16) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_0} \min_{(\lambda, \omega) \in C_k} \chi_i(\lambda, \omega) > 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что существует окрестность C_0 точки (λ_0, ω_0) , в которой выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n_0} \min_{(\lambda, \omega) \in C_0} \chi_i(\lambda, \omega) > 0. \quad (20)$$

Неравенство (20) справедливо и для любого подмножества $\tilde{C}_0$ множества C

$$\sum_{i=1}^{n_0} \min_{(\lambda, \omega) \in \tilde{C}_0} \chi_i(\lambda, \omega) > 0, \quad (21)$$

поскольку для подмножества наименьшее значение функции может только возрасти.

Поскольку точка (λ_0, ω_0) является предельной для последовательности прямоугольников $\{P_l\}_{l=1}^{\infty}$, то в любой её окрестности, в том числе и в окрестности C_0 , существуют прямоугольники последовательности $\{P_l\}_{l=1}^{\infty}$. Обозначим один из таких прямоугольников $\tilde{P} : \tilde{P} \in \{P_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\tilde{P} \in C_0$. Тогда из (21) следует, что, с одной стороны

$$\sum_{i=1}^{n_0} \min_{(\lambda, \omega) \in \tilde{P}} \chi_i(\lambda, \omega) > 0, \quad (22)$$

с другой стороны

$$\sum_{i=1}^{n_0} \min_{(\lambda, \omega) \in \tilde{P}} \chi_i(\lambda, \omega) \leq 0, \quad (23)$$

так как $\tilde{P} \in \{P_l\}_{l=1}^{\infty}$. Противоречие соотношений (22) и (23) доказывает лемму.

Если в прямоугольнике P_k существует решение системы (13), то для него не может выполняться ни одно из условий неравенств (14), поскольку выполнение каждого из них есть достаточное условие отсутствия решения. В этом случае, как отмечалось ранее, производится деление прямоугольника P_k на два прямоугольника P_{11} и P_{12} . Хотя бы в одном из прямоугольников P_{11} или P_{12} существует решение системы (13). Для этого прямоугольника снова не выполняется ни одно из неравенств (14) и процесс деления повторяется. В результате получаются последовательности прямоугольни-

ков $\{Q_l\}_{l=1}^{n_Q}$, каждая из которых содержит решение системы (13). Эти последовательности стягиваются в точки, являющиеся решениями системы (13). Других решений в прямоугольнике P система (13) не имеет.

По определению

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(\lambda, \omega) = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \psi(\lambda, \omega) = 0, \quad (\lambda, \omega) \in Q_l. \quad (24)$$

Тогда процесс деления может быть прекращён в случае, когда равенства (24) выполняются с достаточной степенью точности $|\varphi(\lambda, \omega)| \leq \varepsilon_1$ и $|\psi(\lambda, \omega)| \leq \varepsilon_1$, и с достаточной степенью точности могут быть указаны границы решения: $D(Q_l) \leq \varepsilon_2$, где D – диаметр области.

Применим способ разбиения прямоугольника P на прямоугольники P_k для случая $\chi_i(\lambda, \omega) = h_i \lambda^{q_i} \omega^i \sin(\gamma_i \omega)$. Будем искать множество прямых $U = \{U_i\}_{i=1}^{n_u}$, пересечение которых с прямоугольником P_k осуществляет искомое разбиение. При чётном q_i функция $\chi_i(\lambda, \omega)$ меняет возрастание на убывание или наоборот при $\lambda=0$, поэтому при чётном q_i первой прямой, входящей в множество U будет прямая $\lambda=0$. В каждой из полуплоскостей ($\lambda < 0$ и $\lambda > 0$) функция $\chi_i(\lambda, \omega)$ меняет характер поведения (возрастание на убывание или наоборот) с изменением знака коэффициента $k_i = h_i \omega^i \sin(\gamma_i \omega)$, т.е. в тех точках, где $k_i = 0$. Последнее условие эквивалентно уравнению

$$h_i \omega^i \sin(\gamma_i \omega) = 0. \text{ Решения уравнения } \omega = \frac{\pi k}{\gamma_i} \quad (k = 0; \pm 1, \dots) \text{ также определя-$$

ют прямые, входящие в множество U . Функция $\chi_i(\lambda, \omega)$ меняет знак при изменении ω , во-первых, при нечётном i при $\omega=0$, что уже вошло в ранее найденные решения. Кроме того, изменение характера поведения происходит между экстремальными точками. Для определения экстремальных точек необходимо решить уравнение $\frac{\partial k_i}{\partial \omega} = 0$, т.е. уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (h_i \lambda^{q_i} \omega^i \sin(\gamma_i \omega) = 0). \quad (25)$$

Уравнение (25) эквивалентно уравнению (при $\lambda \neq 0$)

$$i \omega^{i-1} \sin(\gamma_i \omega) + \gamma_i \omega^i \cos(\gamma_i \omega) = 0$$

или уравнению (при $\omega \neq 0$)

$$i \sin(\gamma_i \omega) + \gamma_i \omega \cos(\gamma_i \omega) = 0.$$

Поскольку $\sin(\gamma_i \omega) = 0$ не является решением, то уравнение эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg}(\gamma_i \omega) = -\frac{i}{\gamma_i \omega}. \quad (26)$$

Уравнение (26) на каждом из интервалов $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет ровно одно решение $\omega = \omega_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), которое может быть найдено, например, методом половинного деления. Прямые $\omega = \omega_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) входят в множество U . Других прямых, кроме всех указанных, множество U не содержит.

Библиография

1 Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы / Ю.И. Неймарк. — М.: Наука, 1978. — 336 с.

Поступила в редакцию 20.09.1999 г.