

УДК 517.92

**ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ
С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА
Козырев В.Г.**

Рассмотрено построение асимптотически оптимального регулятора, который приводит сингулярно возмущенный объект в малую окрестность заданного положения независимо от величины возмущения.

Сингулярные возмущения движущихся объектов, представленные в уравнениях малым параметром при старших производных, могут увеличить ошибку наведения объекта в малую окрестность заданного положения. Для оценки ошибки служат асимптотические методы, позволяющие построить надежные законы управления.

Рассматриваются объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами вида

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= A_1(t)y + A_2(t)z, \quad y|_{t=0} = y^0, \\ \lambda \cdot \frac{dz}{dt} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_z(t)u, \quad z|_{t=0} = z^0,\end{aligned}\tag{1}$$

заданными на фиксированном отрезке времени $0 \leq t \leq T$, где $\lambda > 0$ – малый сингулярно-возмущающий параметр. Управление $u(t)$ выбирается, исходя из минимума квадратичного функционала

$$I[u(t)] = \frac{1}{\lambda_f} x' H' F H x|_{t=T} + \int_0^T [x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) R(t) u(t)] dt, \tag{2}$$

где $\lambda_f > 0$ – другой малый параметр.

В выражениях (1), (2): $y \in E^n$; $z \in E^m$; $x = \text{col}[y, z] \in E^l$, $l = n + m$; $u \in E^r$; $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, $B_z(t)$, $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$ – непрерывные на $[0, T]$ матрицы соответствующих размерностей; $H = [H_y, 0]$ – $q \times l$, $q \leq n$, $H_y - q \times n$, $F > 0$ – $q \times q$ постоянные матрицы; $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix}$, $Q_1 - n \times n$, $Q_3 - m \times m$ матрицы.

Обратная величина малого параметра $1/\lambda_f$ в терминальном члене функционала (2) определяет коэффициент штрафа, накладываемого на качество регулирования за неточное приведение объекта в нулевое положение по выходу $\xi = Hx$ в момент $t = T$. Чтобы избежать большой величины

штрафной функции $(1/\lambda_f)\xi'\xi|_{t=T}$, регулятор будет стремиться свести величину $\xi(T)$ к малому, близкому к нулю значению $\xi(T) \approx 0$ (если λ_f достаточно мало). В этом и состоит смысл метода штрафных функций и строго обоснующих его теорем из [1], согласно которым при $\lambda_f \rightarrow 0$ и $\lambda = \text{const}$ $\xi|_{t=T} = Hx|_{t=T} \rightarrow 0$. Однако при $\lambda \rightarrow 0$ ошибка наведения по выходу ξ уже не обязательно будет мала при малом λ_f . Поэтому при наличии сингулярных возмущений в объекте, представленных малым параметром λ , метод штрафных функций нуждается в дополнительном обосновании. Здесь дается это обоснование и доказывается малость ошибки наведения при определенных предположениях.

Обозначим:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\lambda} A_3 & \frac{1}{\lambda} A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda} B_z \end{bmatrix}, \quad S = BR^{-1}B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} S_z \end{bmatrix}, \quad S_z = B_z R^{-1} B_z'.$$

Оптимальное управление системы (1) в смысле критерия (2) существует и определяется выражением [2,3]:

$$u = -R^{-1}B'Kx, \quad (3)$$

где

$$K = P + W'(M + \lambda_f F^{-1})^{-1}W, \quad (4)$$

а матрицы P , W и M – решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -PA - A'P + PSP - Q, & P|_{t=T} &= 0, \\ \frac{dW}{dt} &= -W(A - SP), & W|_{t=T} &= H, \\ \frac{dM}{dt} &= -WSW', & M|_{t=T} &= 0. \end{aligned}$$

При условии полной управляемости системы (1) по выходу $\xi = Hx$ на любом отрезке $[T_1, T] \subset [0, T]$ регулятор (3), (4) приводит объект в малую окрестность нулевого выхода $\xi(T)=0$ при $\lambda_f \rightarrow 0$ [2,3]. Точный регулятор, приводящий объект строго в нулевое положение $\xi(T)=0$ при минимуме функционала (2), в котором на этот раз отсутствует терминальный член, описывается уравнениями:

$$\bar{u} = -R^{-1}B'\bar{K}x, \quad (5)$$

$$\bar{K} = P + W'M^{-1}W. \quad (6)$$

Имеет место следующая теорема, отвечающая на вопрос о малости ошибки наведения асимптотически приближенного регулятора (3), (4) при наличии сингулярно возмущающего параметра λ .

Теорема. Пусть система (1) вполне управляема по выходу $\xi(t) = Hx(t)$ на любом отрезке $[T_1, T] \subset [0, T]$, и все собственные числа матрицы $A_4(t)$ лежат в левой полуплоскости для всех $t \in [0, T]$. Тогда:

если $Q_3(t) \equiv 0$, то при $\lambda_f \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{y}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \text{const}, \\ \|z(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{z}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \text{const}, \\ \|u(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{u}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \text{const}, \end{aligned} \quad (7)$$

а если $Q_3(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [0, T]$, то при $\lambda_f \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{y}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \text{const}, \\ \|z(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{z}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{t-T}{\lambda C}\right)\right) \cdot \text{const}, \\ \|u(t, \lambda, \lambda_f) - \bar{u}(t, \lambda)\| &\leq \lambda_f \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{t-T}{\lambda C}\right)\right) \cdot \text{const}, \end{aligned}$$

где y, z, u – оптимальный процесс для приближенного регулятора (3),(4); $\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}$ – оптимальный процесс для точного регулятора (5),(6); выражения $\|\bullet\|$ обозначают норму вектора или матрицы; const не зависит от t, λ и λ_f для всех $t \in [0, T]$, $\lambda, \lambda_f \in (0, \Delta]$; $\Delta > 0$ – любое фиксированное число; $C > 0$ – некоторое число.

Теорема утверждает, что при $Q_3(t) \equiv 0$ траектории и управления, формируемые точным и приближенным регуляторами, соответственно равномерно близки на области $t \in [0, T]$, $\lambda \in (0, \Delta]$ при $\lambda_f \rightarrow 0$. Это означает, в частности, что приближенный регулятор (3), (4) приводит объект в малую окрестность заданного положения $\xi|_{t=T} = Hx|_{t=T} = 0$ при $\lambda_f \rightarrow 0$ независимо от значения малого сингулярно возмущающего параметра $\lambda \in (0, \Delta]$. В то же время, если $Q_3(t) \neq 0$ для некоторого t , то взаимная близость «быстрых» переменных z и $\bar{z}$ и управлений u и $\bar{u}$ на всем отрезке $[0, T]$ не гарантируется, а имеет место только вне малой окрестности момента $t = T$.

Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений с использованием результатов работы [3]. Заметим, что условие $Q_3(t) \equiv 0$, фигурирующее в теореме, можно заменить на условие $Q_3 = \lambda q_3$, где $q_3 = q_3(t)$ не зависит от λ . Тогда оценки (7) сохраняются.

Теорема выделяет класс систем (1), для которых наличие сингулярно возмущающего параметра λ не приводит к потере точности наведения. Не все системы обладают подобным свойством. Имеется ряд систем, у кото-

рых ошибка наведения становится значительной при убывании параметра λ , несмотря на малость λ_f .

Таким образом, при построении асимптотически приближенных терминальных регуляторов, предназначенных для приведения объектов в малую окрестность заданного положения, необходимо анализировать влияние на точность наведения сингулярных возмущений, содержащихся в структуре объектов, и в зависимости от этого формировать законы управления, обеспечивающие равномерную малость терминальной ошибки по этим возмущениям.

Библиография

1 Глизер В.Я. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций / В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. XVII. — № 9. — С. 1574–1580.

2 Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. — М.: Мир, 1972. — 544 с.

3 Козырев В.Г. Об асимптотике системы оптимального управления с двумя малыми сингулярно возмущающими параметрами.// Динамич. системы: Межвед. науч. сб. — К.: Лыбидь, 1992. — Вып. 10. — С. 57–63.

Поступила в редакцию 10.10.2000 г.