

УДК 629.12.03

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА В ОБЪЕКТЕ УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Конев С.А.

Рассматривается построение решения математической модели динамики процесса теплообмена в объекте управления типа теплообменный аппарат.

Динамика тепловых процессов в теплообменных аппаратах как объектах регулирования выражается изменением температурных полей, определить которые можно на основе общего закона сохранения энергии и законов теплопередачи. Пренебрежение одним из факторов при описании процесса исключает возможность учета важнейших свойств, определяемых распределенностью параметров, а полученные на основе этих допущений математические модели не полностью отражают реальную физическую картину явления.

Рассматривается динамика процесса в теплообменном аппарате (ТОА), представленного в виде стержня, расположенного коаксиально в трубе, по которой протекает теплоноситель (жидкость). Теплопередача осуществляется одновременно конвекцией по длине аппарата x и за счет теплопроводности по радиусу r тепловыделяющего элемента (ТВЭ). При данном механизме теплообмена температура жидкости, омывающей стержень, является функцией градиента температуры поверхности, разграничивающей обе среды (для элемента поверхности). Уравнение теплопроводности для любого сечения ТВЭ имеет вид:

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \text{Div}(\lambda \text{ grad } T_T) + q(r, x, t). \quad (1)$$

Уравнение теплового баланса для теплоносителя записывается как

$$cGdT = \frac{\alpha f}{\ell} (T_{T_R}(x, R, t) - T) dx. \quad (2)$$

Начальные условия принимаем нулевые, т.е.

$$T_T(x, r, 0) = T(x, r, 0) = 0;$$

Граничные условия:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T_T}{\partial r} \right|_{r=R} = \alpha [T_{T_R}(x, R, t) - T(x, t)]; \quad \left. \frac{\partial T_T(0, x, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь принято, что влияние теплопроводности жидкости пренебрежимо мало и обозначено через λ – коэффициент теплопроводности материала стержня; T_{T_R} – температура при $r=R$; c, γ, G – соответственно удельная теп-

лостность, плотность и расход жидкости; α – коэффициент теплоотдачи жидкости; f – поверхность теплообмена.

Уравнение (1) справедливо для плоской и цилиндрической геометрии, т.е.

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = q(x, \dots, y, t) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_T}{\partial y^2} + \dots \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T_T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T_T}{\partial y} + \dots$$

Так как для твердого тела при $\lambda = \text{const}$ $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = W_x = 0$; $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = W_y = 0, \dots$,

то (1) переписывается в виде

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \frac{q}{\lambda}(x, \dots, y, t) + \nabla^2 T_T,$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – оператор Лапласа для цилиндрической геометрии.

Раскрывая $\nabla^2 T_T$, получаем

$$\nabla^2 T_T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_T}{\partial \phi^2}.$$

Для некоторого упрощения решения задачи, введем следующие предположения: распределение температуры по радиусу принимаем осесимметричным; теплопроводность ТВЭ и ТН в осевом направлении потока принимаем пренебрежимо малой; наружная поверхность аппарата теплоизолирована; тепловыделение по сечению и длине ТВЭ принимается равномерное.

Вместо r и x вводятся безразмерные величины $\frac{r}{R}, \frac{x}{l}$, которые меняются от 0 до 1. Для них сохраняются принятые обозначения r, x . При указанных допущениях исходные уравнения (1), (2) приводятся к виду:

$$\begin{cases} c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_T}{\partial r} \right) + q(t), \\ cm \frac{\partial T}{\partial t} + cG \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha f}{\ell} (T_{T_R} - T) \end{cases} \quad (4)$$

при $t > 0$ и $0 \leq x \leq \ell$; $0 \leq r \leq R$.

После преобразования Лапласа по переменной t система уравнений (4) и граничные условия запишутся в относительных величинах:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_T}{\partial r} - ap T_T = - \frac{a_1}{p} q; \\ \frac{\partial T}{\partial x} + (b_1 p + b_2) T = b_2 T_T(x, R, p) - b_4 G, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$a = \frac{c_T \gamma_T R^2}{\lambda_T}; \quad a_1 = \frac{R^2}{\lambda_T}; \quad b_1 = \frac{m}{G}; \quad b_2 = \frac{\alpha}{cG} f.$$

Сделав замену $z = i\sqrt{ap} \cdot r$ в первом уравнении системы (5), приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка [1]:

$$\frac{\partial^2 T_T}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial T_T}{\partial z} + T_T = \frac{a_1}{ap} q. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_T(x, r, p) = C_1(x)J_0(z) + C_2(x)Y_0(z) + C_0,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $Y_0(z)$ – функция Вебера нулевого порядка; $C_1(x)$, $C_2(x)$, C_0 – функции интегрирования.

Так как функция T_T должна быть ограничена при $r \rightarrow 0$, а $Y_0(\sqrt{ap} \cdot r)$ при $r \rightarrow 0$ стремится к бесконечности [2], то функция $C_2(x)$ должна равняться нулю. С учетом второго граничного условия, получим окончательное решение в форме изображения при $r = R = 1$

$$T_T(x, 1, p) = T_{T_R} = C_1(x)I_0(\sqrt{ap}) + \frac{a_1}{ap} q, \quad (7)$$

где $I_0(\sqrt{ap})$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [3], определяемая, как $I_0(\sqrt{ap}) = J_0(i\sqrt{ap})$. Для определения постоянной интегрирования $C_1(x)$ преобразуем второе уравнение системы (5), подставив в него второе граничное условие (3) (при $r = 1$). При этом получим

$$\frac{\partial T}{\partial x} + Tb_1 p = -b \left(\frac{\partial T_T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} - b_4 G, \quad (8)$$

где $b = b_2 \frac{\lambda}{\alpha}$. Продифференцировав по r выражение (7), находим:

$$\frac{\partial T_T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\partial T_{T_R}}{\partial r} = C_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap}).$$

Используя первое граничное условие при $r = 1$ с учетом выражения (2), находим:

$$\begin{aligned} T &= T_T + b \frac{\partial T_T}{\partial r} = C_1(x)I_0(\sqrt{ap}) + \frac{a_1}{ap} q + bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap}) = \\ &= C_1(x)[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] + \frac{a_1}{ap} q. \end{aligned} \quad (9)$$

Продифференцировав последнее выражение по x , получим

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dC_1}{dx} [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} \cdot I_1(\sqrt{ap})].$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $C_1(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dx} [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] + C_1(x) [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] b_1 p + \\ + bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap}) = - \frac{a_1 b_1}{ap^2} q - b_4 G. \end{aligned}$$

После соответствующих преобразований последнего выражения запишем:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dx} + C_1(x) \left[b_1 p + \frac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})} \right] = \\ = - \frac{a_1 b_1 p}{apI_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})} q - \frac{b_4 G}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}. \end{aligned}$$

Решение этого неоднородного уравнения относительно q , имеет вид

$$C_1(x) = - \frac{B(p)}{A(p)} + C(p)e^{-A(p)x}, \quad (10)$$

где

$$B(p) = \frac{a_1 b_1}{a[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})]}; \quad A(p) = b_1 p + \frac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}.$$

Подставляя выражение (10) в (9) и используя граничное условие при $x = 0$, $T(0, p) = T_1(p)$, находим:

$$T_1(p) = \left[C(p) - \frac{B(p)}{A(p)} \right] [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] + \frac{a_1}{ap} q.$$

Откуда

$$C(p) = \frac{T_1(p)}{[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})]} + \frac{B(p)}{A(p)} - \frac{a_1}{ap[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})]} q. \quad (11)$$

С учетом выражения (10) и (11), решение в форме изображения для температуры теплоносителя принимает вид:

$$\begin{aligned} T(x, p) = C_1(x) [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] + \frac{a_1}{ap} q = \\ = \left[- \frac{B(p)}{A(p)} + C(p)e^{-A(p)x} \right] [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})] + \frac{a_1}{ap} q = \end{aligned}$$

$$= \frac{a_1 q}{ap} \left(1 - e^{-A(p)x} \right) \left[1 - \frac{b_1 p [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} I_1(\sqrt{ap})] ap \cdot a_1 q}{a_1 q [I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} I_1(\sqrt{ap})] \cdot ap \cdot A(p)} \right] + T_1(p) e^{-A(p)x}.$$

Или

$$T(x, p) = \frac{a_1}{ap} \left[1 - \frac{b_1 p}{A(p)} \right] \left(1 - e^{-A(p)x} \right) q + e^{-A(p)x} T_1(p). \quad (12)$$

Для температуры ТВЭ:

$$\begin{aligned} T_T(x, r, p) &= C_1(x) I_0(\sqrt{ap} \cdot r) + \frac{a_1}{ap} q = \left[-\frac{B(p)}{A(p)} + C(p) e^{-A(p)x} \right] I_0(\sqrt{ap} \cdot r) + \frac{a_1}{ap} q = \\ &= \frac{I_0(\sqrt{ap} \cdot r)}{[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} I_1(\sqrt{ap})]} e^{-A(p)x} T_1(p) + \frac{a_1}{ap} \left\{ \left[1 - \frac{I_0(\sqrt{ap} \cdot r)}{[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} I_1(\sqrt{ap})]} e^{-A(p)x} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_1 p}{A(p)} \frac{I_0(\sqrt{ap} \cdot r)}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap} I_1(\sqrt{ap})} [1 - e^{-A(p)x}] \right\} q. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) справедливы при $\alpha = \text{const}$ и связывают переменные в любой точке рассматриваемого пространства системы, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Библиография

- 1 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Физматгиз, 1966. — 724 с.
- 2 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 220 с.
- 3 Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексной переменной / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Физматгиз, 1958. — 678 с.

Поступила в редакцию 10.10.2000 г.