

УДК 681.5

ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАННУЮ ТОЧКУ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Скороход Б.А.

Рассматривается задача конструирования управления, переводящего линейную систему с аддитивными возмущениями в заданную точку за конечное время.

Предполагается заданной система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + f(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, t \in T = [0, t_f],\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t), f(t)$ – n -мерные векторные функции; $u(t)$ – скалярное управление;

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \dots & -a_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

матрицы $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ известные на отрезке T функции; t_f – задано; $\mathbf{x}_0$ – произвольный вектор.

Требуется построить управление в виде обратной связи

$$u(t) = -\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}\mathbf{x}(t) + \psi_f(t), \quad (2)$$

переводящее систему (1) из произвольного начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$.

Будем полагать, что в [2]

$$g_i(t) = \alpha_i \tau^{-n+i-1} [1 + \Phi_i(\tau)], \psi_f(t) = - \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau^{-n+j} [1 + \phi_i(\tau)] f_j(t_f), (\tau \rightarrow 0), \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\alpha_i = n(2n - i)!((n - i + 1)!(i - 1)!), (i = 1, 2, \dots, n), \tau = t_f - t;$$

$\Phi_i(\tau), \phi_i(\tau), (i = 1, 2, \dots, n)$ – некоторые непрерывные функции, обращающиеся в точке $\tau = 0$ в нуль.

Из работы [1] следует, что если $f(t) = 0$, а коэффициенты обратной связи определены выражением (3), $\Phi_i(\tau), (i = 1, 2, \dots, n)$ – произвольные, не-

прерывные, обращающиеся в нуль в точке $\tau = 0$ функции, то $x(t_f) = 0$ для любых x_0 .

Преобразуем систему (1) с помощью замены

$$x(t) = z(t) + v(t) + x_f - v_f, \quad (4)$$

где

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) + f(t), v(0) = 0, v(t_f) = v_f. \quad (5)$$

Тогда

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u + \xi(t), \quad (6)$$

где $\xi(t) = A(t)(x_f - v_f)$, причем $z(t_f) = 0$.

Таким образом, с помощью замены (4), (5) задача сводится к приведению управляемой системы в начало координат, причем, так как пара $(A(t), B(t))$ задана в канонической управляемой форме, то

$$\xi_i(t) = \xi_i = \text{const}, (i = 1, 2, \dots, n-1), \xi(t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n(t))^T.$$

Пусть $f(t) \neq 0$. Требуется показать, что управление

$$u(t, x(t)) = -G(t)[x(t) - v(t) - x_f + v_f] + \psi_f(t),$$

где элементы $G(t)$ определяются выражением (3),

$$\psi_f(t) = - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \tau^{-n+j} \xi_j, \quad (7)$$

$\Phi_j(\tau), (j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n-1)$ — произвольные, непрерывные, обращающиеся в нуль в точке $\tau = 0$ функции, решает сформулированную задачу.

Доказательство этого утверждения основывается на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1 Пусть

$$P_{ij} = (-1)^{i-1} \binom{2n-j}{i-1}, P = \{P_{ij}\}, (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда для элементов обратной матрицы $M = P^{-1}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} m_{in} &= (-1)^{n-1} (n-1)! \beta_i, \\ m_{ij} &= n! (-1)^{n+1} \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \binom{2n-l-i}{n} \frac{\beta_i}{2n-i-1}, \\ \beta_i &= (-1)^{i-1} \binom{n-i}{i-1} / (n-1)!, (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Лемма 2 Пусть

$$X_{ij}(t) = (-1)^{i-1} \tau^{2n-j-i+1} (j-1)! P_{ij}(i-1)!, (i, j = 1, 2, \dots, n), X = \{X_{ij}\}, \quad (8)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t X(t) X^{-1}(\theta) [\xi + B \Psi_f(\theta)] d\theta,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, 0)$, $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t))$.

Тогда

$$\sigma_i(t) = o(\tau), (\tau \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Вернемся к решению основной задачи управления системой (6), (7). Преобразуем эту систему с помощью замены

$$t = t_f - e^{-p}, y_i(p) = e^{(-i+1)p} z_i(t_f - e^{-p}), (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$\dot{y}_i(p) = (-i+1)y_i(p) + y_{i+1}(p) + e^{-ip} \xi_i, (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$\dot{y}_n(p) = (n-1) \sum_{j=1}^n [\alpha_j + e^{(-n+j-1)p} \bar{a}_j(t_f - e^{-p})] y_j(p) - (n-1)y_n(p) + e^{-np} \bar{\xi}_n(p),$$

где $\bar{\xi}_n(p) = \xi_n(t_f - e^{-p}) + \Psi_f(t_f - e^{-p})$, $\bar{a}_j(t_f - e^{-p}) = a_j(t_f - e^{-p}) + \alpha_j e^{(-n+j-1)p} \Phi_j(p)$.

Покажем, что собственные числа матрицы A_0 системы

$$\dot{y}_i(p) = (-i+1)y_i(p) + y_{i+1}(p), (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\dot{y}_n(p) = (n-1) \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j(p) - (n-1)y_n(p), \quad (9)$$

определяются выражениями $\lambda_i = -2n + i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

Положим $\bar{w}(p) = x_1(t_f - e^{-p})$,

$$\text{где } \dot{x}(t) = x_{i+1}(t), (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \dot{x}_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t). \quad (10)$$

Тогда

$$y_i(p) = \sum_{m=1}^i (-1)^m s(i, m) \frac{d^{i-j}}{d^{i-j} p} \bar{w}(p),$$

$$\alpha_1 \bar{w}(p) + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} \sum_{m=1}^i (-1)^{i+m} s(i, m) \bar{w}^{(m)}(p) = 0, (\alpha_{n+1} = 1),$$

где $s(i, m)$ – числа Стирлинга 1-го рода.

Поэтому

$$(y_1(p), y_2(p), \dots, y_n(p))^T = L(\bar{w}(p), \bar{w}^{(2)}(p), \dots, \bar{w}^{(n-1)}(p))^T,$$

где L постоянная неособая матрица, а значит, собственные числа матрицы A_0 совпадают с корнями уравнения

$$\alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} \sum_{m=1}^i (-1)^{i+m} s(i, m) \lambda^m = 0,$$

которые являются числами [1] $\alpha_i = -2n + i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

Переходя с помощью формулы Коши к интегральным уравнениям и учитывая, что элементы фундаментальной матрицы системы (10) определяются выражением (8), получим

$$y_i(p) = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(p) y_j(p_0) + \int_{p_0}^p \Phi_{in}(p-s) l(s) ds + e^{(-i+1)p} (q_i(p) - q_i(p_0)),$$

где

$$q_i(p) = \sigma_i(t_f - e^{-p}), (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$l(p) = (n-1) \sum_{j=1}^n e^{(-n+j-1)p} a_j(t_f - e^{-p}) y_j(p) + e^{-np} \xi_n(p);$$

$\Phi_{ij}(p), (i, j = 1, 2, \dots, n)$ — элементы фундаментальной матрицы $\Phi(p)$ системы (9). Так как $\lambda = -2n + i, (i = 1, 2, \dots, n)$, то при всех $p \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|\Phi(p)\| \leq c e^{-np}, (c > 0).$$

Производя оценку по модулю при $p > p_0$ и возвращаясь к старым переменным, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|z(t_f - e^{-p})\| &\leq k_1 e^{-p} \|y(p_0)\| + \\ &+ k_1 e^{-p} \int_0^p [\|z(t_f - e^{-s})\| + |\xi_n(s)|] ds + |q_i(p)| + |q_i(p_0)|, (k_1, k_2 > 0). \end{aligned}$$

Или, полагая $\kappa(p) = e^p \|z(t_f - e^{-p})\|$ и учитывая, что

$$|q_i(p)| e^{-p} < k_3, (i = 1, 2, \dots, n), |\xi_n(p)| < k_4, (k_3, k_4 > 0)$$

при $p > p_0$, находим

$$\kappa(p) < \psi(p) + k_2 \int_{p_0}^p e^{-p} \kappa(s) ds,$$

где $\psi(p) = k_5(1 + p), (k_5 > 0)$.

Отсюда, используя лемму Беллмана, будем иметь неравенство

$$\|z(t_f - e^{-p})\| \leq \psi(p) e^{(-p + k_2 \int_{p_0}^p e^{-p} k(s) ds)},$$

правая часть которого при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow t_f - 0} z(t) = 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть в системе (1) пара $\{A(t), B(t)\}$ задана в канонической управляемой форме, $A(t), f(t)$ – известные, непрерывные на отрезке T функции. Тогда управление

$$u(t, x(t)) = -G(t)[x(t) - v(t) - x_f + v_f] + \psi_f(t)$$

переводит систему (1) из произвольного начального состояния в состояние x_f .

Библиография

1 Скороход Б.А. Алгоритм управления с нулевой конечной ошибкой / Б.А. Скороход // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1996. — Вып. 2. — С. 18–23.

Поступила в редакцию 30.01.2001 г.