

УДК 515.164.15

**Л.Н.Канов, доц., канд. техн. наук**

*Севастопольский национальный технический университет*

*Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053*

*[root@sevgtu.sebastopol.ua](mailto:root@sevgtu.sebastopol.ua)*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ**

*Для упрощенной математической модели летательного аппарата (ЛА) выполнен анализ устойчивости стационарных состояний. Показано, что при сходе траектории с устойчивого многообразия динамика ЛА катастрофически меняется.*

Одним из важнейших объектов управления является летательный аппарат (ЛА). Изучение поведения ЛА и конструирование систем управления, обеспечивающих требуемые условия устойчивости, являются ключевыми задачами теории управления [1]. Интенсивно развивающаяся в последнее время теория катастроф [2,3] дает новые возможности для решения этих задач. В частности, в [2] построены бифуркационные множества потенциальной функции в пространстве управляющих параметров, описывающие состояние реактивного ЛА с крыльями-стабилизаторами, и численно решены уравнения движения. Однако при отсутствии каких-либо сведений о структуре многообразия уравнений состояния интерпретация полученной таким образом обширной информации в виде зависящих от времени функций вызывает существенные затруднения [3]. Вместе с тем, располагая сведениями о такой структуре, можно описывать качественное поведение траекторий ЛА, и не решая уравнений движения.

Целью работы являются построение многообразий динамики ЛА, анализ их устойчивости и качественное описание на основе теории катастроф поведения ЛА при различных значениях управляющих параметров.

Рассмотрим движение ЛА на некоторой высоте с постоянной скоростью. Управление полетом осуществляется посредством отклонения элеронов на угол  $\delta_E$  и рулей высоты  $\delta_B$ . В предположении, что значения координат ЛА и управляющих углов невелики, на основании классического труда [4] динамику ЛА можно упрощенно описать системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{Se}{J_x} 0,0013(\beta + \delta_E); \\ \dot{y} &= -\frac{J_x - J_z}{J_y} xz - \frac{Se}{J_y} 0,001\beta; \\ \dot{z} &= -\frac{J_y - J_x}{J_z} xy - \frac{Se}{J_z} (0,0075\delta_E + 0,0125\alpha + 0,008\delta_B); \\ \dot{\alpha} &= z - x\beta - Sr \cdot 0,033\alpha - \frac{Sr}{114,6} + \alpha\beta (x\alpha + y - Sr \cdot 0,02\beta); \\ \dot{\beta} &= x\alpha + y - Sr \cdot 0,02\beta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $J_x, J_y, J_z$  - моменты инерции ЛА;  $Se = \frac{SL\rho V^2}{2} 57,3$ ;  $Sr = \frac{Sp V}{2m} 57,3$ ;

$S$  - несущая площадь крыльев;  $L$  - размах крыльев;  $\rho$  - плотность воздуха;  $V$  - скорость ЛА;  $m$  - масса;  $x, y, z$  - угловые скорости;  $\alpha$  - угол атаки;  $\beta$  - угол скольжения. Состояния равновесия системы (1) описываются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \beta + \delta_E &= 0; \\ (J_x - J_z)xz + Se \cdot 0,001\beta &= 0; \\ (J_y - J_x)xy + Se(0,0075\delta_E + 0,0125\alpha + 0,008\delta_B) &= 0; \\ z - x\beta - Sr \cdot 0,033\alpha - \frac{Sr}{114,6} &= 0; \\ x\alpha + y - Sr \cdot 0,02\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Последовательными исключениями сведем систему (2) к одной переменной, например,  $x$ :

$$\begin{aligned} &\left( \frac{J_y - J_x}{Se} x^2 - 0,0125 \right) \left[ \frac{Se \cdot \delta_E}{(J_x - J_z)x \cdot Sr \cdot 33} - \frac{1}{0,033Sr} \left( \frac{Sr}{114,6} - x\delta_E \right) \right] + \\ &+ \frac{J_y - J_x}{Se} x \cdot Sr \cdot 0,02\delta_E - 0,0075\delta_E - 0,008\delta_B = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное уравнение определяет положение по координате  $x$  в зависимости от управляющих параметров  $\delta_E, \delta_B$ . Построим сечения многообразия, описываемого уравнением (3), плоскостями  $\delta_B = const$ , для чего определим из (3) переменную  $\delta_E$

$$\delta_E = \frac{\delta_B - 0,4132 + \frac{J_y - J_x}{Se} 33,053x^2}{\left( \frac{J_y - J_x}{Se} 125x^2 - 1,56 \right) \left[ \frac{30,3x}{Sr} + \frac{0,03Ss}{(J_x - J_z)x} \right] + \frac{2,5x(J_y - J_x)}{Ss} - 0,937}, \quad (4)$$

где обозначено  $Ss = \frac{Se}{Sr}$ .

На рисунке 1 показано сечение многообразия состояний равновесия, построенное по выражению (4) при  $\delta_B = 0$  (при численном анализе использованы типовые данные, характерные, например, для самолета *F2 «Мираж»* [4]:  $J_z \approx J_y \approx 4,5 \cdot 10^5$  кг/м<sup>2</sup>;  $J_x \approx 1,2 \cdot 10^5$  кг/м<sup>2</sup>;  $S = 36$  м<sup>2</sup>;  $L = 10,5$  м;  $m = 1,5 \cdot 10^4$  кг;  $V = 400$  м/с;  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>). Как видно из рисунка 1, многообразие состоит из пяти отдельных областей. При изменении управляющего параметра  $\delta_B$  вид сечения изменяется, но в целом его структура остается подобной рисунку 1.

Анализ линеаризованной системы (1) показывает, что устойчивыми являются лишь области 1 и 5, области 2 - 4 оказываются неустойчивыми, хотя структура собственных чисел в этих областях различна. Поэтому не может существовать стационарного движения ЛА при  $10 > x > -10,85$  и  $\delta_B = 0$ .

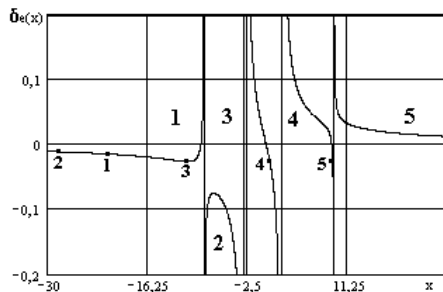


Рисунок 1 – Многообразие состояний равновесия при  $\delta_B = 0$

Определим теперь сепаратрису в пространстве управляющих параметров  $\delta_E, \delta_B$  [3]. Для этого подсчитаем производную от выражения (3) по  $x$  и приравняем ее к нулю. Разрешив полученное уравнение относительно  $\delta_E$ , имеем

$$\delta_E = \frac{x}{\frac{171,9x^2}{Sr} + \frac{0,0573Ss}{J_x - J_z} - \frac{0,7162Ss}{J_y - J_x} \left( 1 - \frac{0,001Se}{(J_x - J_z)x^2} \right) + 0,03782Sr}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) задают параметрически сепаратрису на плоскости управляющих параметров  $\delta_E, \delta_B$ . На рисунке 2 показана сепаратриса, полученная при изменении  $x$  от -23 до 23. Как следует из рисунка, сепаратриса представляет три несвязных линии, которые делят плоскость на четыре области, характеризующиеся различной структурой состояния равновесия.

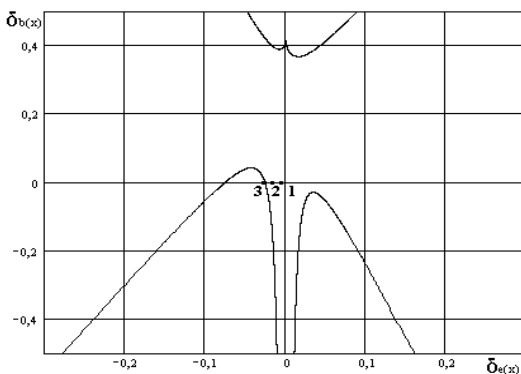


Рисунок 2 – Сепаратриса в пространстве управляющих параметров

Рассмотрим устойчивое состояние равновесия, соответствующее  $x = -20$ , тогда  $\delta_E = -0,015$  при  $\delta_B = 0$ . Этому соответствует точка 1 на рисунках 1 и 2. Предположим, что управляющий параметр  $\delta_E$  получил приращение и принял значение  $\delta_E = -0,01$ , что соответствует точке 2 на рисунках 1 и 2. Тогда состояние ЛА, соответствующее точке 1, будет переходить в состояние 2 в силу динамики (1). При этом реализуется устойчивый маневр ЛА в сторону увеличения  $x$ , соответствующему  $\delta_E = -0,01$  и  $x = -28$ . На рисунке 3 показан переходный процесс системы (1) с начальными условиями, соответствующими точке 1 и с управляющими параметрами  $\delta_E = -0,01$ ,  $\delta_B = 0$ .

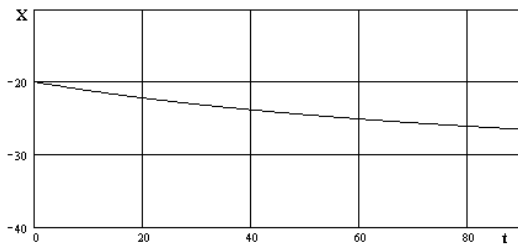


Рисунок 3 – Устойчивый переходный процесс

при  $\delta_E = -0,01$ ;  $\delta_B = 0$

Далее рассмотрим переходный процесс при изменении  $\delta_E$  в сторону отрицательных значений. В этом случае состояние

ЛА будет характеризоваться точкой, движущейся вдоль кривой 1 вправо. При достижении  $\delta_E$  значения  $-0,0257$ , соответствующего точке 3 минимума кривой 1, характеризующей устойчивые состояния равновесия, ЛА отклоняется от этой кривой. Этому соответствует пересечение горизонтальной оси на рисунке 2 с левой нижней ветвью сепаратрисы (точка 3) при перемещении справа налево от точки 1. Состояние ЛА не может теперь при  $\delta_E < -0,0257$  выйти на устойчивое состояние равновесия: точки 4 и 5 лежат на неустойчивых ветвях и поэтому недоступны. В этом случае возникает катастрофический процесс потери устойчивости ЛА, сопровождающийся интенсивными хаотическими колебаниями в областях 2 - 4. На рисунке 4 показан подобный процесс от начального значения  $x = -20$ ,  $\delta_E = -0,015$  при установлении  $\delta_E = -0,0275$ . В первое время координата  $x$  постепенно увеличивается, что соответствует перемещению изображающей точки от положения 1 до положения 3 вдоль устойчивой ветви 1. В момент, соответствующий значению  $x = -10,8$  (точка 3) ЛА теряет устойчивость, и происходит катастрофа.

Таким образом, показано, что теория катастроф может быть использована при изучении динамики свойств ЛА, анализе возникающих переходных процессов. Определены критические значения управляющих параметров

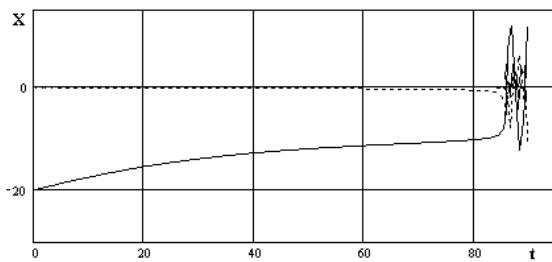


Рисунок 4 – Катастрофический переходный процесс

при  $\delta_E = -0,0275$ ;  $\delta_B = 0$

ЛА. Представляется весьма перспективным численное исследование динамики ЛА по уточненной модели при иных значениях параметров и формирование рекомендаций по организации безопасного маневрирования ЛА.

### **Библиографический список**

1. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. — М.: Высш. шк., 1998. — 574 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р.Гилмор. — М.: Мир, 1984. — Т.1. — 350 с.; Т.2. — 285 с.

3. Алексеев Ю.К. Введение в теорию катастроф / Ю.К. Алексеев, А.П. Сухорук. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 173 с.

4. Боднер В.А. Динамика полета и управление / В.А. Боднер. — М.: Машиностроение, 1967. — 738 с.

*Поступила в редакцию 21.01.2001 г.*