

УДК 681.2

В.Я. Копп, Н.В.Серова, С.Н. Фисун, А.Н. Волкова

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@stel.sebastopol.ua

ОЦЕНКА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ НЕЗАВЕРШЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА ПРИ СЕЛЕКТИВНОЙ СБОРКЕ

Найдено аналитическое выражение для определения нижней границы незавершенного производства при селективной сборке, которое позволяет повысить точность прогноза при планировании производства.

Одним из важных показателей селективной сборки изделий является количество незавершенного производства [1]. К сожалению, в последние годы исследования, связанные с вопросом селективной сборки, не проводились, поэтому авторы ссылаются на данную монографию.

Необходимым этапом селективной сборки является сортировка, включающая в себя контроль параметров деталей и разбивку их на селективные группы. Устройство контроля может быть использовано непосредственно либо с небольшими доработками – для сбора статистических данных о математическом ожидании и дисперсии сопрягаемых размеров собираемых деталей.

Важной задачей для оперативного управления производством уже на данном этапе является оценка уровня незавершенного производства. Кроме этого, указанный контроль позволяет определить статистические характеристики оборудования, выпускающего собираемые детали. Причем указанные характеристики со временем меняются незначительно, что позволяет с высокой степенью вероятности осуществлять прогнозирование уровня незавершенного производства на достаточно длительном интервале времени. Определение верхней границы незавершенного производства не представляет интереса, так как она означает полную несборку и возможна только теоретически. Таким образом, задача, поставленная в данной работе, сводится к определению нижней границы незавершенного производства при известных дисперсиях σ_1^2 и σ_2^2 размеров сопрягаемых деталей.

Согласно [1] количество незавершенного производства $\bar{Q}$ определяется выражением

$$\bar{Q} = Q \cdot \int_{-\beta}^{\beta} |p_1(x) - p_2(x)| dx, \quad (1)$$

где Q – количество деталей в партии; $p_1(x)$, $p_2(x)$ – плотности распределения параметров деталей 1 и 2 соответственно; x – отклонение размера.

Более подробных исследований не проводилось.

На рисунке 1 площадь заштрихованной фигуры численно равна значению интеграла. Предполагается, что разброс размеров сопрягаемых деталей ограничен одинаковыми пределами $[-\beta; \beta]$, случайная величина x является центрированной, математические ожидания отклонений размеров сопрягаемых деталей совпадают и равны нулю.

Тогда математическая формулировка задачи выглядит следующим образом: найти

$$\min \{Z = \int_{-\beta}^{\beta} (p_1(x) - p_2(x))^2 dx\} \quad (2)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} p_1(x) dx = 1; \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot p_1(x) dx = \sigma_1^2; \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} p_2(x) dx = 1; \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot p_2(x) dx = \sigma_2^2. \end{array} \right. \quad (6)$$

Отметим, что функционалы (1) и (2) достигают экстремума при одних и тех же значениях $p_1(x)$ и $p_2(x)$; в этой связи обоснована эквивалентная замена функционала (1) функционалом (2). При неизвестных $p_1(x)$ и $p_2(x)$ данная задача неразрешима. Однако если ввести новую переменную

$$\Delta(x) = p_1(x) - p_2(x),$$

а также из (3) вычесть (5), а из (4) вычесть (6), то задача сводится к следующей:

$$\min \{Z = \int_{-\beta}^{\beta} \Delta(x)^2 dx\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} \Delta(x) dx = 0; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot \Delta(x) dx = \sigma^2. \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь $\sigma^2 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ - разность дисперсий.

Поставленная задача отыскания экстремума функционала (2) является вариационной задачей на условный экстремум с интегральными (изопериметрическими) ограничениями [2]. Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \left(\Delta(x)^2 + \lambda_1 \cdot \Delta(x) + \lambda_2 \cdot \Delta(x) \cdot x^2 \right)}{\partial \Delta(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \left(\Delta(x)^2 + \lambda_1 \cdot \Delta(x) + \lambda_2 \cdot \Delta(x) \cdot x^2 \right)}{\partial \Delta(x)} \right] = 0$$

имеет решение относительно $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2). \quad (9)$$

Константы λ_1 и λ_2 определяем из (7) и (8) при подстановке в них (9):

$$\lambda_1 = \sigma^2 \cdot \frac{15}{4 \cdot \beta^3},$$

$$\lambda_2 = -\sigma^2 \cdot \frac{45}{4 \cdot \beta^5}.$$

Тогда (9) примет вид

$$\Delta(x) = -\frac{15}{8 \cdot \beta^3} \cdot \sigma^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{\beta^2} \cdot x^2 \right)$$

Интеграл от модуля функции $\Delta(x) = p_1(x) - p_2(x)$ в (1) определяет вероятность несборки деталей, причем заметим, что

$$S_1 = S_2,$$

где S_1 – площадь фигуры (от нуля до точки пересечения функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$) (см. рисунок 1); S_2 – площадь фигуры от точки пересечения функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$ до β .

Точка пересечения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ определяется из условия $\Delta(x) = 0$:

$$1 - \frac{3}{\beta^2} \cdot x^2 = 0.$$

Отсюда следует $x = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$.

Тогда, подставляя выражение для $\Delta(x)$ в (1), получаем

$$P = \int_{-\beta}^{\beta} |p_1(x) - p_2(x)| dx = 4 \cdot \int_0^{\beta/\sqrt{3}} (p_1(x) - p_2(x)) dx = \frac{5 \cdot \sigma^2}{\sqrt{3} \cdot \beta^2}. \quad (10)$$

Соответственно нижний предел незавершенного производства равен

$$\overline{Q} = Q \cdot \frac{5 \cdot \sigma^2}{\sqrt{3} \cdot \beta^3}.$$

В качестве примера предполагаем, что $p_1(x)$ имеет усеченное нормальное распределение в пределах $[-1; 1]$. Тогда

$$p_1(x) = 1,252 \cdot e^{-4,9084 x^2} \quad \text{при} \quad \sigma_1^2 = 0,1. \quad (11)$$

Значения σ_2^2 варьируется. Полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Результаты расчетов

$\sigma_1^2 = 0,1$						
σ_2^2	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,3
P	0	0,144	0,192	0,288	0,432	0,556

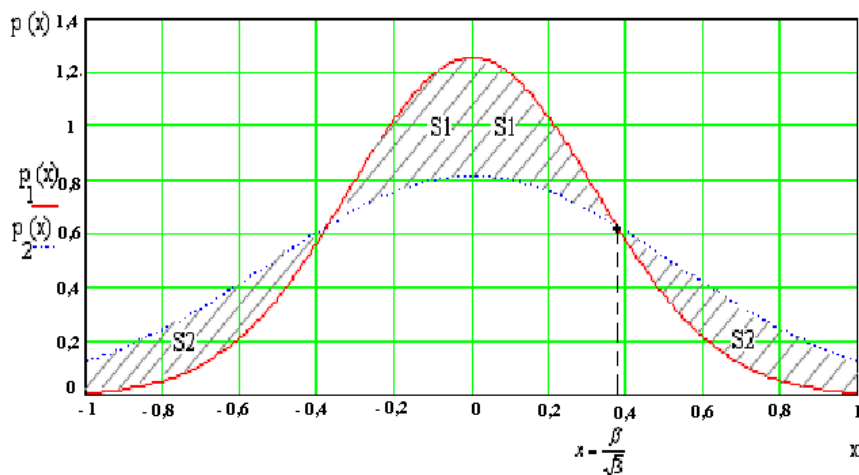


Рисунок 1 - К расчету вероятности несборки деталей

Полученное аналитическое выражение для вероятности несборки деталей позволяет определить нижнюю границу незавершенного производства при известных дисперсиях σ_1^2 и σ_2^2 .

Проиллюстрируем на примере, как полученные результаты соответствуют минимуму несборки. Для этого предположим, что $p_2(x)$ имеет не усеченное нормальное распределение, а любое другое, отвечающее условию непрерывности на отрезке $[0; 1]$. Такому условию соответствует распределение Симпсона

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{l+x}{l^2} & \text{при } -l \leq x \leq 0; \\ \frac{l-x}{l^2} & \text{при } 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (12)$$

где l – параметр распределения, а $[-l; l]$ – область возможных значений. Значение дисперсии σ_2^2 при $l = 1$:

$$\sigma_2^2 = \frac{l^2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Принимаем, что $p_1(x)$ имеет, как и ранее, усеченное нормальное распределение (11). Тогда точка пересечения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ определяется из условия:

$$p_1(x) - p_3(x) = 1,252 \cdot e^{-4,9084 \cdot x^2} - \frac{l-x}{l^2} = 0, \quad (13)$$

$$\text{т.е.} \quad x = 0,3772.$$

Вероятность несборки P определяем при подстановке (12) и (13) в (10):

$$P = \int_{-1}^1 |p_1(x) - p_3(x)| dx = 4 \cdot \int_0^{0,3772} (p_1(x) - p_3(x)) dx = 0,304.$$

В случае оптимальной плотности $p_2(x)$ соответствующее значение $P = 0,192$ при $\sigma_2^2 = \frac{1}{6}$ (таблица 1).

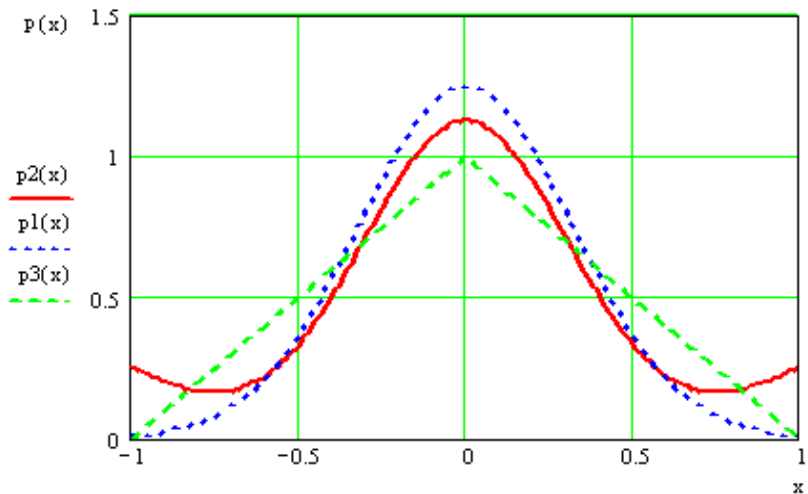


Рисунок 2 - Виды сравниваемых кривых плотностей распределений

Таким образом очевидно, что вероятность несборки во втором случае (кривые $p_1(x)$ и $p_3(x)$) больше, чем в первом (кривые $p_1(x)$ и $p_2(x)$), где ранее был получен минимум несборки деталей.

На рисунке 2 для сравнения изображены все функции. Разброс размеров сопрягаемых деталей ограничен одинаковыми пределами $[-1; 1]$; случайная величина x является центрированной, математические ожидания отклонений размеров сопрягаемых деталей совпадают и равны нулю.

Введенные допущения и ограничения при решении задачи определения нижней границы незавершенного производства с целью упрощения алгоритма аналитических преобразований не носят принципиального характера и могут быть сняты при дальнейшем совершенствовании модели расчета.

Решенная в данной статье задача позволит перейти к следующему этапу исследования данного вопроса, а именно: оценить уровень незавершенного производства при ненулевых математических ожиданиях, а также при различных границах измерения случайных величин.

Библиографический список

1. Буловский П.И. Автоматизация селективной сборки приборов / П.И.Буловский, П.И. Крылов, В.А. Лапухин. — Л.: Машиностроение, 1978. — 232 с.
2. Гноенский Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С.Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольд. — М.: Наука, 1969. — 512 с.
3. Гаврилов Л.Н. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Л.Н. Гаврилов, Н.А. Бородачев, Р.М. Абрашитов. — М.: Машиностроение, 1973. — 567 с.

Поступила в редакцию 18.12.2002 г.