

УДК 620.53: 623.97

А.И. Бохонский

*Севастопольский государственный технический университет
Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053*

А.В. Исаев

*Севастопольский военно-морской институт
ул. Дыбенко 1а, г. Севастополь, Украина, 99035*

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Рассмотрен анализ оптимального торможения объекта как абсолютно твердого тела при ограничении на модуль ускорения.

Нетрадиционной защитой объектов техники от динамических воздействий большой интенсивности является, как известно, использование пластического демпфирования элементов системы, когда существенная диссипация энергии движущегося объекта обеспечивает снижение динамической нагрузки на объект. В [1] рассматривалось поведение системы с упругопластическими связями, а также с выключающимися (разрушающимися) и включающимися связями. Отключение объекта от источника внешнего воздействия за счет разрушения связи естественно уменьшает динамическую нагрузку на объект.

В случае импульсного динамического воздействия большой интенсивности объект в виде твердого тела с упругой связью может получить такую достаточно большую кинетическую энергию, что упругая связь при определенном значении перемещения разрушится. Тогда на следующем этапе движения возникает необходимость в таком оптимальном торможении на конечном интервале времени, при котором объект останавливается, а модуль ускорения (перегрузка) не превысит некоторой нормированной величины; в случае, например, объекта электроники ускорение не должно приводить к разрушению либо к нарушению его функциональных свойств. Такая задача актуальна во многих областях техники.

Проанализируем возможное поведение объекта (рисунок 1) при торможении с позиций теории оптимального управления. Предполагается, что после разрушения (выключения) упругой связи объект имеет скорость $V(0) = V_0$ и через промежуток времени T в результате торможения остановится (скорость равна нулю). Закон изменения сопротивления находится на основании вариационного метода теории оптимального управления [1]. Алгоритм поиска управления иллюстрируется на примере системы с одной степенью свободы.

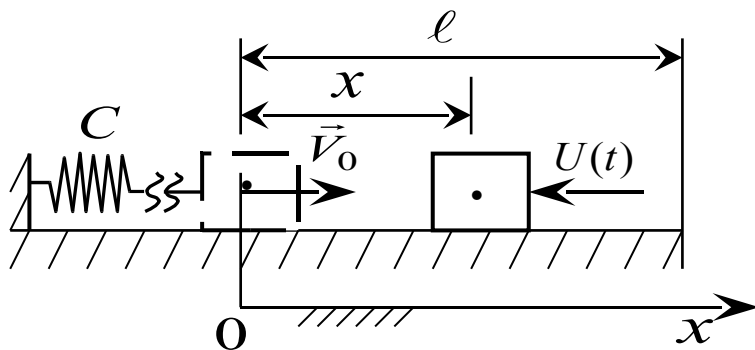


Рисунок 1 - Схема движущегося объекта

Для дифференциального уравнения движения объекта

$$\frac{d^2x}{dt^2} = U(t), \quad (1)$$

где $U(t)$ - управление на единицу массы, краевых условий

$$\text{при } t = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \text{при } t = T, \quad x(T) = l, \quad \dot{x}(T) = 0 \quad (2)$$

(здесь l - путь, пройденный в результате торможения) и дополнительного условия, накладываемого на управление

$$U(T) = 0, \quad (3)$$

в случае критерия оптимальности в виде минимума нормы мощности управления на единицу массы

$$I = \int_0^T U^2(t) dt = \min \quad (4)$$

из необходимого условия экстремума функционала (4) следует уравнение Эйлера-Лагранжа (5)

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) находят выражения для перемещения, скорости и с учетом (1) для управления:

$$x(t) = \frac{C_1}{6}t^3 + \frac{C_2}{2}t^2 + C_3t + C_4, \quad V(t) = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2t + C_3, \quad U(t) = C_1t + C_2. \quad (6)$$

С учетом краевых условий (2) и ограничения на управление (3) при использовании функции *solve* в *Maple V* [3] найдены величины:

$$C_1 = \frac{2V_0^3}{9l^2}; \quad C_2 = -\frac{2V_0^2}{3l}; \quad C_3 = V_0; \quad C_4 = 0; \quad T = \frac{2l}{V_0}. \quad (7)$$

С учетом (7) выражения (6) примут следующий окончательный вид:

$$x(t) = \frac{V_0^3}{27l^2}t^3 - \frac{V_0^2}{3l}t^2 + V_0t, \quad V(t) = \frac{V_0^3}{9l^2}t^2 - \frac{2V_0^2}{3l}t + V_0, \quad U(t) = \frac{2V_0^3}{9l^2}t - \frac{2V_0^2}{3l}. \quad (8)$$

Графики функций согласно зависимостям (8) показаны на рисунке 2.

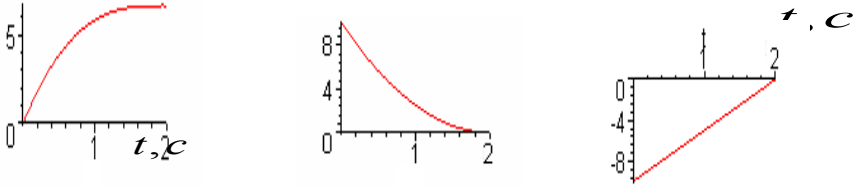


Рисунок 2 - Графики $x(t)$, $V(t)$, $U(t)$

Интересно отметить, что без учета ограничения (3) управление $U(t)$ на интервале $[0, T]$ меняет знак, что часто практически может не отвечать физическому смыслу задачи.

Из приведенного решения следует, что при данном законе торможения к моменту времени T скорость объекта равна нулю, но ускорение в начальный момент времени достаточно большое и это может привести к его разрушению. Далее ограничение на модуль ускорения использовалось в виде:

$$\text{при } t = 0, \quad U(t) = C_1t + C_2 = a, \quad (9)$$

т.е. $C_2 = a$. В соответствии с предыдущим алгоритмом аналитических преобразований с учетом (9) найдены параметры C_1 , C_4 , T , l и движение описывается следующим образом:

$$x(t) = \frac{a^2}{12V_0}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + V_0t, \quad V(t) = \frac{a^2}{4V_0}t^2 - at + V_0, \quad U(t) = \frac{a^2}{2V_0}t - a. \quad (10)$$

В (10) достаточно задать V_0 - начальную скорость и a - ограничение на ускорение, чтобы получить закон движения для единичной массы. Полное гашение скорости наступает в конце достаточно большого отрезка пути, что часто неприемлемо на практике.

Рассмотрим следующий закон управления (торможения):

$$U(t) = a \sin^3\left(\frac{\pi t}{T}\right). \quad (11)$$

При таком законе торможения в результате интегрирования уравнения (1) выражения для скорости и перемещения соответственно равны:

$$V(t) = -\frac{aT}{3\pi} \left[\sin^3\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right] + C_1, \quad (12)$$

$$x(t) = -\frac{aT^2}{3\pi^2} \left[\frac{1}{3} \sin^3\left(\frac{\pi t}{T}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right] + C_1 t + C_2.$$

Произвольные постоянные определялись из краевых условий: при $t = 0$, $V(0) = V_0$, при $t = T$, $x(T) = l$. Дополнительные условия (при $t = 0$, $x(0) = 0$ и при $t = T$, $V(T) = 0$) приводят к аналитическим зависимостям для максимального перемещения и времени движения:

$$l = \frac{T}{3\pi} (2aT + 3V_0\pi), \quad T = \frac{3V_0\pi}{4a}. \quad (13)$$

С учетом найденных произвольных постоянных и формул (13) движение объекта согласно (12) описывается следующим образом:

$$x(t) = \frac{3V_0^2}{8a} \left[\frac{1}{6} \sin^3\left(\frac{4a}{3V_0}t\right) + \sin\left(\frac{4a}{3V_0}t\right) \right] + \frac{V_0}{2}t + \left(\frac{3V_0^2\pi}{8a} - l \right),$$

$$V(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{1}{4}V_0 \left[\sin^2\left(\frac{4a}{3V_0}t\right) \cos\left(\frac{4a}{3V_0}t\right) + 2\cos\left(\frac{4a}{3V_0}t\right) \right], \quad (14)$$

$$U(t) = -a \sin^3\left(\frac{4a}{3V_0}t\right).$$

Графики, построенные в соответствии с (14) при $V_0 = 10$ м/с, $a = 10$ м/с², изображены на рисунке 3.

При учете ограничения на ускорение увеличивается тормозной путь и время торможения, но уменьшается норма мощности, вычисленная согласно (4). При торможении по закону (14) увеличивается тормозной путь (по сравнению с (10)). Если осуществлять торможение не оптимально, например, используя сухое трение, то норма мощности (по сравнению с предыдущими случаями) существенно возрастает и тормозной путь превосходит результаты, полученные по (10) и (14).

Рисунок 3 - Графики зависимостей $x(t)$, $V(t)$, $U(t)$

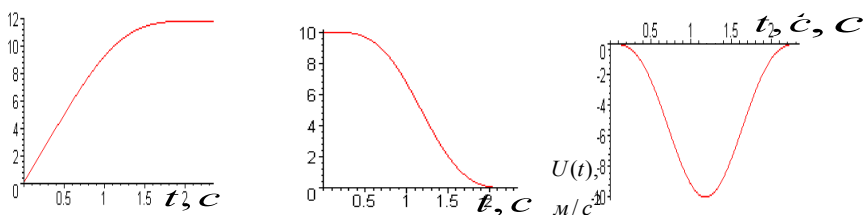


Рисунок 3 - Графики зависимостей $x(t)$, $V(t)$, $U(t)$

Следует отметить, что выражение (14) использовалось в случае оптимального переносного движения из начального состояния покоя в конечное состояние абсолютного покоя упругого объекта [4], когда необходимо исключить колебания к моменту окончания движения. В случае, когда упругий объект в начальный момент времени имеет скорость отличную от нуля, для его торможения с учетом отсутствия колебаний в конечном состоянии точного аналитического решения не найдено, но с использованием полиномов высоких степеней (для управления и перемещения) можно его найти.

Возможны различные варианты оптимального гашения кинетической энергии движущегося объекта (например, прибора). Пассивное (неуправляемое) гашение энергии не исключает использования комбинаций включающихся и выключающихся (разрушающихся) упругопластических связей, которые срабатывают в определенной последовательности и дискретно отражают требуемый закон торможения. Управляемое гашение может быть реализовано, например, на использовании демпфера линейно-вязкого сопротивления с изменяющейся площадью дроссельных отверстий в поршне, в зависимости от его положения, что обеспечивает переменное сопротивление.

Перспективные исследования связаны с решением задач оптимального гашения кинетической энергии объектов с конечным числом степеней свободы при их сложном (плоском и пространственном) движении.

Библиографический список

1. Исаев А.В. Динамика объектов с физически нелинейными силовыми характеристиками / А.В. Исаев // Вестн. СевГТУ: Сб. научн. тр. — Севастополь, 2002. — Вып. 38. — С. 53 – 58.
2. Бублик Б.Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко. — К.: Вища школа, 1975. — 328 с.
3. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE 5 R3/R4/R5 / В.П. Дьяконов. — М.: Изд-во “Солон”, 1998. — 400 с.

4. Бохонский А.И. Управляемое упругое деформирование твердых тел / А.И. Бохонский // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1995. — Вып. 1. — С. 47 – 54.

Поступила в редакцию 14.06.2002 г.