

УДК 681.32.147

В.В. Кирюхин, проф., канд. физ.-мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

kvt@sevgtu.sebastopol.ua

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ

Рассматривается известная задача оптимизации быстродействия процессора цифровой управляющей системы по критерию минимума средних потерь при ограничениях на коэффициент простоя системы и на средние времена обработки сигналов в каналах управления. Предлагается алгоритм оптимизации, обобщающий известный метод на случай различных коэффициентов штрафа в каналах.

Постановка проблемы. Эффективность функционирования цифровой управляющей системы (ЦУС), включенной в контур управления производственным процессом, часто оценивается величиной средних потерь C , которые обусловлены потерями из-за простоя ЦУС и потерями (штрафами), связанными с задержкой выдачи управляющих сигналов по каналам управления [1]:

$$C = \beta_0 \eta + \sum_{k=1}^n \beta_k \lambda_k w_k. \quad (1)$$

Здесь β_k , $k = 0, 1, \dots, n$ - некоторые стоимостные коэффициенты, n - число каналов, λ_k - интенсивность потока по k -му каналу, w_k - среднее время ожидания начала обработки сигнала по k -му каналу, η - коэффициент простоя ЦУС.

Величины η и w_k являются монотонными функциями быстродействия B процессора ЦУС, причем с ростом B η возрастает от нуля до единицы, а w_k - убывает от ∞ до нуля. Отсюда следует, что функция $C(B)$ потерь при некотором $B = B_0$ имеет минимум.

В системах управления реального времени на w_k накладываются ограничения вида $w_k \leq w_k^*$, где w_k^* - предельно допустимое время ожидания. С другой стороны, условия эксплуатации ЦУС диктуют необходимость ограничения $\eta \leq \eta^*$, где η^* - предельно допустимый коэффициент простоя ЦУС.

Эффективность ЦУС тем большая, чем меньше потери при вышеуказанных ограничениях. Таким образом, возникает задача выбора оптималь-

ного быстродействия, минимизирующего средние потери в ограниченном диапазоне его значений.

Сформулируем эту задачу математически для случая, когда сигналы по каналам управления обрабатываются в порядке относительных приоритетов. В этом случае, полагая, что ЦУС можно представить как систему массового обслуживания вида M/G/1 с приоритетами, для $w_k(B)$ получим следующие явные выражения

$$w_k(B) = \frac{r_0}{(B - r_{k-1})(B - r_k)}, \quad (2)$$

где

$$r_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^{(2)}; \quad (3)$$

$$r_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \theta_i, \quad k = 1, \dots, n; \quad (4)$$

θ_i и $\theta_i^{(2)}$ - соответственно первый и второй начальные моменты трудоемкости обработки сигнала по i -му каналу. Далее, функция $\eta(B)$ имеет вид [1]:

$$\eta(B) = 1 - \frac{r_n}{B}. \quad (5)$$

Подставляя (2) и (5) в (1), для функции $C(B)$ с учетом (3) и (4) получаем:

$$C(B) = \beta_0 \left(1 - \frac{r_n}{B}\right) + r_0 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \lambda_k}{(B - r_{k-1})(B - r_k)}. \quad (6)$$

Задача состоит в отыскании быстродействия $B_{\text{опт}}$, минимизирующего (6) при ограничениях

$$\eta(B) \leq \eta^*, \quad (7)$$

$$w_k(B) \leq w_k^*, \quad k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где $\eta(B)$ и $w_k(B)$ определяются выражениями (5) и (2) соответственно.

Насколько нам известно, решение задачи (6) – (8) начато в учебнике [1], где исследуется лишь случай, приводящий к аналитическому решению задачи, а именно, ситуация с одинаковыми коэффициентами ($\beta_1, \dots, \beta_n$) и беспriorитетными каналами управления. Результаты этих исследований положены в основу алгоритма, сформулированного в работе [2].

Целью данной статьи является получение решения задачи в общем виде, при различных весовых коэффициентах β_i и приоритетных каналах управления.

Схема решения. Заметим сначала, что ограничения (7) и (8) определяют диапазон допустимых значений B : неравенство (7) обозначает верхнюю B_η , а (8) – нижнюю B_w границы этого диапазона. Решая неравенство (7) относительно B , получаем $B \leq B_\eta$, где

$$B_\eta = \frac{r_w}{1 - \eta^*}. \quad (9)$$

Далее, неравенства (8) можно представить в виде:

$$B^2 - (r_k + r_{k-1})B - \left(\frac{r_0}{w_k^*} - r_k r_{k-1}\right) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

или

$$(B - B_{1k})(B - B_{2k}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где

$$B_{1k,2k} = \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{(r_k - r_{k-1})^2}{4} + \frac{r_0}{w_k^*}}.$$

Анализируя систему (10), легко установить, что все неравенства удовлетворяются одновременно, если

$$B \geq B_w,$$

где

$$B_w = \max_{1 \leq k \leq n} \{B_{1k}\} \quad (11)$$

и

$$B_{1k} = r_{k-1} + \frac{\lambda_k \theta_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_k \theta_k}{2}\right)^2 + \frac{r_0}{w_k^*}}.$$

Итак, границы B_w и B_η диапазона для B определяются формулами (11) и (9) соответственно.

Вычислим теперь точку B_0 минимума функции (6). Дифференцируя (6) по B и приравнявая производную нулю, находим уравнение:

$$\frac{\beta_0 r_k}{B^2} - r_0 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \lambda_k (2B - r_k - r_{k-1})}{(B - r_{k-1})^2 (B - r_k)^2} = 0. \quad (12)$$

В силу свойств функции $C(B)$ это уравнение имеет единственный корень, B_0 . Уравнение (12) в явном виде не решается, но его корень может быть найден любым численным методом, находящимся в обойме стандартного программного обеспечения персонального компьютера.

Установленные в результате анализа опорные точки позволяют сформулировать следующий алгоритм решения.

Алгоритм отыскания оптимального быстродействия

Начало.

1. Ввести $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $(\theta_1^{(2)}, \dots, \theta_n^{(2)})$, $(w_1^*, \dots, w_n^*)$ и η^* .
2. Вычислить B_w и B_η по формулам (5) и (11).
3. Если $B_w > B_\eta$, то выдать сообщение “РЕШЕНИЯ НЕТ” и перейти на конец.
4. Вычислить корень B_0 уравнения (12).
5. Если $B_w \leq B_0 \leq B_\eta$, то положить $B_{\text{опт}} = B_0$ и перейти к п.8.
6. Если $B_0 < B_w$, то положить $B_{\text{опт}} = B_w$ и перейти к п.8.
7. Положить $B_{\text{опт}} = B_\eta$.
8. Вычислить $C_{\min} = C(B_{\text{опт}})$ по формуле (6).
9. Выдать значения $B_{\text{опт}}$ и $C_{\min}$.

Конец.

Выводы. Таким образом, получено общее решение известной задачи выбора оптимального быстродействия процессора цифровой управляющей системы при ограничениях на коэффициент простоя процессора и на средние времена ожидания обработки сигналов по каналам управления в режиме относительных приоритетов.

Как и следовало ожидать, решение получено в численном виде, поскольку основное уравнение для точки минимума потерь при общих условиях в явном виде не решается; однако вид функции потерь гарантирует существование единственной такой точки, а следовательно, и единственность решения задачи.

В перспективе проблему, рассмотренную здесь, можно обобщить и на случай абсолютных, а также смешанных приоритетов, задаваемых, например, корректной матрицей приоритетности. Однако это – предмет дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Майоров С.А. Основы теории вычислительных систем/ С.А. Майоров, Г.И. Новиков, Т.И. Алиев. — М.: Высш. шк., 1978. — 408 с.
2. Кирюхин В.В. Методические указания к циклу лабораторных работ по дисциплине “Вычислительные системы” / В.В. Кирюхин. — Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. — 56 с.

Поступила в редакцию 23.12.2002 г.