

УДК 539.3

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ В СОСТОЯНИИ НЕВЕСОМОСТИ

Исследовано такое оптимальное переносное движение в космическом пространстве упругих объектов малой жесткости с распределенной массой, которое исключает их колебания в конечном состоянии.

Быстрое (оптимальное в смысле быстродействия) транспортирование различных объектов малой жесткости, как известно, вызывает вынужденные колебания, что отрицательно влияет на выполнение последующих технологических операций с участием данных объектов. Поэтому, с целью снижения уровня колебаний (либо полного их устранения) законы оптимального управления должны учитывать динамические свойства перемещаемых объектов.

Оптимальные переносное поступательное и вращательное движения упругих объектов малой жесткости с конечным числом степеней свободы (из исходного в конечное состояния абсолютного покоя в приложении к исполнительным органам манипуляторов) рассмотрены в [1, 2]. Динамической устойчивости упругих конструкций летательных аппаратов в условиях свободного полета посвящена работа [3], но и до настоящего времени все еще задачам оптимального переносного движения нежестких крупногабаритных конструкций в космическом пространстве не уделялось должного внимания. Вместе с тем теория колебаний линейных и нелинейных систем позволяет решать сложные актуальные задачи в различных областях техники [4, 5].

Операции транспортирования и монтажа крупногабаритных нежестких конструкций в космическом пространстве не должны вызывать значительных колебаний. Для монтажа таких конструкций (в обозримом будущем) необходимо найти такие оптимальные управ-

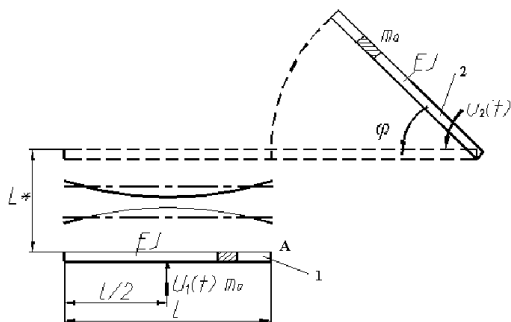


Рисунок 1 – Схема сборки объектов малой жесткости:

1 – поступательное перемещение бруса;

ления движениями, которые исключают колебания перемещаемых объектов в конце движения.

Здесь исследуются колебания нежестких объектов с распределенными массами по длине. Схема линейного и углового перемещений объектов малой жесткости (бруса либо пластин) из исходного в конечное состояния со стыковкой в точке А изображена на рисунке 1.

Движения реализуются с помощью сосредоточенных управлений в виде силы $U_1(t)$ и момента $U_2(t)$ (пары сил).

Предполагается, что концевые силы (либо моменты) могут быть отнесены к обобщенным функциям либо к граничным условиям. В качестве подвижной системы координат при поступательном движении выбраны главные центральные оси и колебания происходят относительно осей, движущихся поступательно. Ускорение поступательного перемещения находится на основании теоремы о движении центра масс, т.е. справедлива зависимость $m_0 l \ddot{W}_0(t) = U_1(t)$, где m_0 - масса единицы длины; l - длина стержня.

Тогда ускорение центра масс бруса будет равно $\ddot{W}_0(t) = \frac{U_1(t)}{m_0 l}$. Предполагается,

что изгибные волны вдоль бруса распространяются практически мгновенно, т.е. рассматриваются стоячие волны.

При поступательном движении дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний (относительное движение) прямого бруса постоянного поперечного сечения имеет, как известно, следующий вид [5]

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (1)$$

где EJ - жесткость при изгибе (E - модуль упругости; J - осевой момент инерции поперечного сечения бруса); $W = W(x, t)$ - перемещения сечений бруса в связи с его колебаниями; m_0 - масса единицы длины; $q(x, t)$ - распределенная динамическая нагрузка, обусловленная оптимальным переносным поступательным движением бруса малой жесткости.

Для решения уравнения (1) используется метод разложения перемещения и воздействия по главным координатам, согласно которому следует записать [5]

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x) \Phi_k(t), \quad (2)$$

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} m_0 Y_k(x) q_k(t), \quad (3)$$

где $Y_k(x)$ - форма (мода) колебаний; $\Phi_k(t)$ - главная координата.

После подстановки k -х слагаемых из (2) и (3) в (1) и деления на выражение $m_0 Y_k(x) \Phi_k(x)$ переменные разделяются и уравнение (1) распадается на два

$$\ddot{\Phi}_k(t) + \omega_k^2 \cdot \Phi_k(t) = -q_k(t), \quad (4)$$

$$E J Y_k^{IV}(x) - \omega_k^2 m_0 Y_k(x) = 0, \quad (5)$$

где ω_k - k -я частота собственных колебаний.

Брус имеет свободные концы и поэтому для него краевые условия следующие:

$$Y_k''(0) = 0, \quad Y_k''(l) = 0, \quad Y_k'''(0) = 0, \quad Y_k'''(l) = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (5) с использованием функций А.Н. Крылова при учете краевых условий (6) окончательно записывается как

$$Y_k(x) = S(\lambda_k) - \frac{T(\lambda_k)}{U(\lambda_k)} \cdot T(\lambda_k \frac{x}{l}),$$

где $S(\lambda_k) = \frac{1}{2}(ch\lambda_k + \cos\lambda_k)$; $T(\lambda_k) = \frac{1}{2}(sh\lambda_k + \sin\lambda_k)$;

$U(\lambda_k) = \frac{1}{2}(ch\lambda_k - \cos\lambda_k)$; $T(\lambda_k \frac{x}{l}) = \frac{1}{2}(sh\lambda_k \frac{x}{l} + \sin\lambda_k \frac{x}{l})$, $\lambda_k = \alpha_k l$.

Из уравнения (5) определяются частоты собственных колебаний согласно формуле

$$\omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}},$$

где $\lambda_k = \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot \pi$; при $k > 2$; $\lambda_1 = 4,73$; $\lambda_2 = 7,853$.

С учетом разложения сосредоточенного воздействия по главным формам (модам) колебаний выражение для k -й составляющей ускорения записывается следующим образом:

$$q_k(t) = \frac{U_1(t) \cdot Y_k(l/2)}{\int_0^l m_0 \cdot Y_k^2(x) dx}. \quad (7)$$

Выражение (3) с учетом (7) примет вид:

$$q_k(x, t) = U_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(x) \cdot Y_k(l/2)}{\int_0^l m_0 \cdot Y_k^2(x) dx}. \quad (8)$$

Интеграл в (8) представляет собой обобщенную массу, которая для k -й моды колебаний равна [4,5]:

$$M_k = \frac{m_0 l}{16} (sh \lambda_k - \sin \lambda_k)^2.$$

Для определения $\Phi_k(t)$ решено уравнение (4) с правой частью (8). Перемещение сечения бруса с координатой x (в относительном движении) в соответствии с методом Фурье вычисляется как произведение двух функций:

$$W_k(x, t) = Y_k(x) \cdot \Phi_k(t). \quad (9)$$

В переносном движении с учетом краевых условий

$$S_l(0) = 0, \quad V_l(0) = 0, \quad U_l(0) = 0, \quad S_l(T) = 0, \quad V_l(T) = 0, \quad U_l(T) = 0$$

соответственно выражения для перемещения, скорости и ускорения в произвольный момент времени в наиболее простом случае управления имеют вид [1]

$$S_1(t) = -\frac{L_*}{2\pi} \sin pt + \frac{L_* p t}{2\pi}; \quad V_1(t) = -\frac{L_* p}{2\pi} \cos pt + \frac{L_* p}{2\pi};$$

$$U_1(t) = \frac{L_* p^2}{2\pi} \sin pt,$$

где $p = \frac{2\pi}{T}$; T – время переносного движения бруса; L_* – максимальное перемещение объекта.

Время переносного движения и период основного тона колебаний в данном случае для исключения резонанса связаны зависимостью

$$T = 2T_1 = 2 \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\omega_1},$$

где ω_1 – частота первого тона собственных колебаний бруса.

Если в дифференциальном уравнении (4) в правой части положить

$$q_k(t) = a_* \frac{L_* p^2}{2\pi} \sin pt,$$

где $a_* = \frac{Y_k(l/2)}{\int_0^l m_0 Y_k^2(x) dx}$, то решение уравнения и его производные для первого тона колебаний ($k = 1$) запишутся в виде:

$$\Phi_1(t) = \frac{b}{\omega_1^2 - p^2} \left(\frac{p}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \sin pt \right), \quad \dot{\Phi}_1(t) = \frac{b}{\omega_1^2 - p^2} (p \cos \omega_1 t - p \cos pt),$$

$$\ddot{\Phi}_1(t) = \frac{b}{\omega_1^2 - p^2} (-p \omega_1 \sin \omega_1 t - p^2 \sin pt).$$

С учетом только первой моды колебаний из (9) следует выражение для перемещения произвольной точки бруса в связи с его колебаниями:

$$W_1(x, t) = Y_1(x)\Phi_1(t).$$

Численный пример. Исходные данные: $l = 12,9$ м; $b = 0,05$ м; $h = 0,01$ м; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Вычисляемые величины: $m_0 = b \cdot h \cdot \rho = 3,9$ кг/м; $J = b \cdot h^3/12 = 0,417 \cdot 10^{-8}$ м⁴. Частота первого тона $\omega_1 = 2,013 \approx 2$ с⁻¹. Период первого тона колебаний упругого объекта $T_1 = 2\pi/\omega_1 \approx 3,14$ с и $p = \omega_1/2 \approx 1,0$ с. Время движения $T = 2T_1 \approx 6,28$ с. Величина поступательного перемещения равна $L_* = 10,0$ м. Обобщенная масса $M_1 = 10082,4$ кг.

Выполнены численные эксперименты с визуализацией результатов. Анализ полученных результатов для различных краевых условий подтверждает эффективность использования управления, обеспечивающего отсутствие колебаний в конечном состоянии упругого объекта с распределенными параметрами при движении в космическом пространстве. Следует подчеркнуть, что в общем случае выполнение условия $p < \omega_1/n$, где $n = 2, 3, \dots$, не только устраняет резонанс движения и обеспечивает покой в конечном состоянии, но и снижает в несколько раз максимальные перемещения на временном интервале движения.

Поведение объекта во времени и пространстве изображено на рисунке 2. Как следует из рисунка, колебания бруса наблюдаются только в процессе движения; в конечном состоянии такие колебания равны нулю. Ранее в [1] для системы с одной степенью свободы было показано, что переносное ускорение при согласовании времени движения и периода колебаний обеспечивает устранения колебаний в конце движения.

Рисунок 2 – Поведение бруса малой жесткости в оптимальном переносном движении (с учетом первой моды колебаний)

Рисунок 3 – Поведение бруса в оптимальном движении (с учетом первой и второй мод колебаний)

Для исследования колебаний, возникающих в связи с вращательным движением нежесткого бруса, может быть использован аналогичный подход, основанный на использовании метода главных координат. Практическая реализация управлений может осуществляться с помощью импульсных реактивных двигателей, когда непрерывное управление заменяется дискретным. Результаты исследований могут быть полезны при практической реализации процессов сборки крупногабаритных космических конструкций малой жесткости, для которых характерны сложные оптимальные движения.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Оптимальное переносное движение упругих систем / А.И. Бохонский // Вестн. СевГТУ: Сб. научн. тр. — Севастополь, 2002. — Вып. 38. — С. 33–38.
2. Бохонский А.И. Колебания телескопической руки манипулятора при оптимальном вращательном движении / А.И. Бохонский, Д.В. Волнухин // Вестн. СевГТУ: Сб. научн. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 23. — С. 54–58.
3. Горошко О.А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета / О.А. Горошко. — К.: Наук. думка, 1965. — 168 с.
4. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стаценко. — М.: Высш. шк., 1973. — 456 с.
5. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний: Учеб. пособие / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1972. — 416 с.

Поступила в редакцию 20.09.2002 г.