

УДК 681.5

Ф.Д. Пряшников, проф., д-р техн. наук, В.Н. Мирянова

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

tvn@ua.fm

УРАВНЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОДНОГО ПАРАМЕТРА

Установлен аналитический вид уравнений границ областей устойчивости распределенных систем автоматического управления в пространстве одного варьируемого параметра.

Одним из средств оптимизации современных систем автоматического управления (САУ) является выбор параметров, обеспечивающих устойчивость и заданные показатели качества. Это требует построения областей устойчивости в пространстве варьируемых параметров. На сегодняшний день наиболее известным методом решения этой задачи является метод D – разбиения, который заключается в разбиении пространства параметров на области с одинаковым числом правых корней характеристического полинома замкнутой системы внутри каждой области и выделении среди полученных областей области устойчивости [1]. Однако можно отметить ряд недостатков данного метода. А именно, метод D – разбиения применяется, в основном, для анализа устойчивости обыкновенных линейных систем с сосредоточенными параметрами или систем с запаздыванием [2, 3]. Области устойчивости определяются графическими методами или методами перебора, поэтому решение является недостаточно точным или требует больших вычислительных возможностей. К тому же, задача обычно решается при линейной зависимости коэффициентов характеристического полинома от варьируемого параметра λ .

Согласно [1] для исследования устойчивости систем автоматического управления, содержащих распределенные звенья, применимы методы для сосредоточенных систем, в том числе и метод D – разбиения. В классическом варианте этот метод требует знания аналитической зависимости передаточной функции системы от параметров и приведения уравнения для построения кривой D – разбиения к виду $\lambda = f(\omega)$, где $f(\omega)$ – некоторая аналитическая функция ω ; ω – частота; λ – варьируемый параметр. Решение этого уравнения обычными способами возможно, если зависимость от ω линейная, в противном случае применяются численные методы.

Здесь решается задача построения аналитических зависимостей, определяющих границы областей устойчивости САУ с распределенными параметрами, как при линейном, так и при полиномиальном вхождении варьируемых параметров в характеристический многочлен. Причем, для рассматриваемых систем от параметра могут зависеть не только коэффициенты полиномов дробно-рациональной части, но и показатель экспоненты распределенной части системы.

Рассматриваются системы автоматического управления, включающие звенья с дробно-рациональными передаточными функциями

$$W_i(s) = \frac{b_i(s)}{a_i(s)},$$

где $b_i(s) = \sum_{k=0}^{n_i} b_{ik} s^k$, $a_i(s) = \sum_{k=0}^{m_i} a_{ik} s^k$ - полиномы; звено с распределенными параметрами, описывающееся трансцендентной передаточной функцией вида

$$W_t(s) = e^{\frac{B(s)}{A(s)}}, B(s) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i s^i, A(s) = \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i s^i, \quad (1)$$

а также суммирующие элементы. Общая структура такой системы изображена на рисунке 1.

Передаточная функция замкнутой системы запишется как

$$\Phi(s) = \frac{W(s)W_t(s)}{1 + W(s)W_t(s)},$$

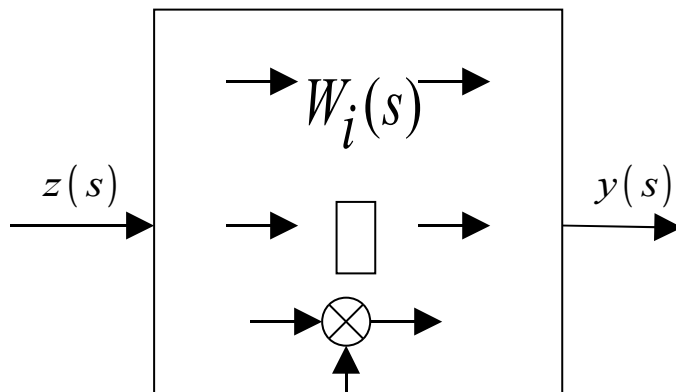


Рисунок 1 – Обобщенная структурная схема САУ с распределенными параметрами

где $W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ - передаточная функция части системы, не содержащей

распределенные звенья, где $b(s) = \sum_{l=0}^n b_l s^l$, $a(s) = \sum_{l=0}^m a_l s^l$.

Отсюда следует, что характеристический многочлен системы можно представить следующим образом:

$$q(s) = a(s) + b(s)e^{\frac{B(s)}{A(s)}}. \quad (2)$$

Коэффициенты многочленов $a(s)$, $b(s)$ и $A(s)$, $B(s)$ зависят от варьируемых параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_Q$, $Q \in \mathbb{N}$.

В общем случае зависимость характеристического полинома (2) от параметров λ можно представить в виде

$$q(\lambda, s) = a(\lambda, s) + b(\lambda, s)e^{\frac{B(\lambda, s)}{A(\lambda, s)}}, \quad (3)$$

где

$$a(\lambda, s) = \sum_{l=0}^m a_l(\lambda) s^l, \quad b(\lambda, s) = \sum_{l=0}^n b_l(\lambda) s^l, \quad A(\lambda, s) = \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i(\lambda) s^i, \quad B(\lambda, s) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i(\lambda) s^i.$$

Уравнение границ областей устойчивости согласно методу D-разбиения для характеристического полинома имеет вид

$$q(\lambda, j\omega) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \Re q(\lambda, j\omega) &= 0, \\ \Im q(\lambda, j\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Перепишем (3) при $s = j\omega$

$$q(\lambda, j\omega) = a(\lambda, j\omega) + b(\lambda, j\omega)e^{\frac{B(\lambda, j\omega)}{A(\lambda, j\omega)}} \quad (5)$$

и выделим его вещественную и мнимую части. Для полиномов $a(\lambda, j\omega)$ и $b(\lambda, j\omega)$ можно записать

$$a(\lambda, j\omega) = a_{RE}(\lambda, \omega) + ja_{IM}(\lambda, \omega), \quad (6)$$

$$b(\lambda, j\omega) = b_{RE}(\lambda, \omega) + jb_{IM}(\lambda, \omega), \quad (7)$$

$$\text{где } a_{RE}(\lambda, \omega) = \sum_{l=0}^{m/2} a_{2l}(\lambda) \omega^{2l}; \quad (8)$$

$$a_{IM}(\lambda, \omega) = \prod_{l=0}^{m/2} a_{2l+1}(\lambda) \omega^{2l+1}; \quad (9)$$

$$b_{RE}(\lambda, \omega) = \prod_{l=0}^{n/2} b_{2l}(\lambda) \omega^{2l}; \quad (10)$$

$$b_{IM}(\lambda, \omega) = \prod_{l=0}^{n/2} b_{2l+1}(\lambda) \omega^{2l+1}. \quad (11)$$

Представим показатель экспоненты в (5) в виде

$$\frac{B(\lambda, j\omega)}{A(\lambda, j\omega)} = \frac{\tilde{b}_{RE}(\lambda, \omega) + j\tilde{b}_{IM}(\lambda, \omega)}{\tilde{a}_{RE}(\lambda, \omega) + j\tilde{a}_{IM}(\lambda, \omega)} = M(\lambda, \omega) + jN(\lambda, \omega), \quad (12)$$

где $\tilde{a}_{RE}(\lambda, \omega)$, $\tilde{a}_{IM}(\lambda, \omega)$, $\tilde{b}_{RE}(\lambda, \omega)$, $\tilde{b}_{IM}(\lambda, \omega)$ записываются аналогично (8)-(11):

$$\tilde{a}_{RE}(\lambda, \omega) = \prod_{i=0}^{\tilde{m}/2} \tilde{a}_{2i}(\lambda) \omega^{2i}, \quad (13)$$

$$\tilde{a}_{IM}(\lambda, \omega) = \prod_{i=0}^{\tilde{m}/2} \tilde{a}_{2i+1}(\lambda) \omega^{2i+1}, \quad (14)$$

$$\tilde{b}_{RE}(\lambda, \omega) = \prod_{i=0}^{\tilde{n}/2} \tilde{b}_{2i}(\lambda) \omega^{2i}, \quad (15)$$

$$\tilde{b}_{IM}(\lambda, \omega) = \prod_{i=0}^{\tilde{n}/2} \tilde{b}_{2i+1}(\lambda) \omega^{2i+1}. \quad (16)$$

После преобразования получаем

$$M(\lambda, \omega) = \frac{\tilde{a}_{RE}(\lambda, \omega)\tilde{b}_{RE}(\lambda, \omega) + \tilde{a}_{IM}(\lambda, \omega)\tilde{b}_{IM}(\lambda, \omega)}{\tilde{a}_{RE}^2(\lambda, \omega) + \tilde{a}_{IM}^2(\lambda, \omega)}, \quad (17)$$

$$N(\lambda, \omega) = \frac{\tilde{a}_{RE}(\lambda, \omega)\tilde{b}_{IM}(\lambda, \omega) - \tilde{a}_{IM}(\lambda, \omega)\tilde{b}_{RE}(\lambda, \omega)}{\tilde{a}_{RE}^2(\lambda, \omega) + \tilde{a}_{IM}^2(\lambda, \omega)}. \quad (18)$$

Уравнение (3) с учетом (12) перепишем в виде

$$q(\lambda, j\omega) = a(\lambda, j\omega) + e^{M(\lambda, \omega)} b(\lambda, j\omega) [\cos N(\lambda, \omega) + j \sin N(\lambda, \omega)]. \quad (19)$$

Подставляя в (19) формулы (6) и (7) и отделяя вещественную и мнимую части, получаем (4) в виде системы двух трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} \Re a_{RE}(\lambda, \omega) + e^{M(\lambda, \omega)} [b_{RE}(\lambda, \omega) \cos N(\lambda, \omega) - b_{IM}(\lambda, \omega) \sin N(\lambda, \omega)] &= 0, \\ \Im a_{IM}(\lambda, \omega) + e^{M(\lambda, \omega)} [b_{RE}(\lambda, \omega) \sin N(\lambda, \omega) + b_{IM}(\lambda, \omega) \cos N(\lambda, \omega)] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим систему (20) в пространстве одного варьируемого параметра.

Пусть от λ линейным образом зависят коэффициенты полиномов, входящих в показатель степени экспоненты трансцендентной передаточной функции (1). В этом случае с учетом (12), (17) и (18) можно записать

$$M(\lambda, \omega) = \frac{[\tilde{a}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{RE2}(\omega)][\tilde{b}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{b}_{RE2}(\omega)] + [\tilde{a}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{IM2}(\omega)][\tilde{b}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{b}_{IM2}(\omega)]}{[\tilde{a}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{RE2}(\omega)]^2 + [\tilde{a}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{IM2}(\omega)]^2}, \quad (21)$$

$$N(\lambda, \omega) = \frac{[\tilde{a}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{RE2}(\omega)][\tilde{b}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{b}_{IM2}(\omega)] - [\tilde{a}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{IM2}(\omega)][\tilde{b}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{b}_{RE2}(\omega)]}{[\tilde{a}_{RE1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{RE2}(\omega)]^2 + [\tilde{a}_{IM1}(\omega) + \lambda \tilde{a}_{IM2}(\omega)]^2}. \quad (22)$$

Выполнив преобразования, получаем

$$M(\lambda, \omega) = \frac{\tilde{a}(\omega)\lambda^2 + \tilde{b}(\omega)\lambda + \tilde{c}(\omega)}{\tilde{k}(\omega)\lambda^2 + 2\tilde{p}(\omega)\lambda + \tilde{r}(\omega)}, \quad (23)$$

$$N(\lambda, \omega) = \frac{\tilde{d}(\omega)\lambda^2 + \tilde{e}(\omega)\lambda + \tilde{h}(\omega)}{\tilde{k}(\omega)\lambda^2 + 2\tilde{p}(\omega)\lambda + \tilde{r}(\omega)}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\omega) &= \tilde{a}_{RE2}(\omega)\tilde{b}_{RE2}(\omega) + \tilde{a}_{IM2}(\omega)\tilde{b}_{IM2}(\omega); & \tilde{b}(\omega) &= \tilde{b}_{RE2}(\omega)\tilde{a}_{RE}(\omega) + \tilde{b}_{IM2}(\omega)\tilde{a}_{IM}(\omega); \\ \tilde{c}(\omega) &= \tilde{a}_{RE1}(\omega)\tilde{b}_{RE1}(\omega) + \tilde{a}_{IM1}(\omega)\tilde{b}_{IM1}(\omega); & \tilde{d}(\omega) &= \tilde{a}_{RE2}(\omega)\tilde{b}_{IM2}(\omega) - \tilde{a}_{IM2}(\omega)\tilde{b}_{RE2}(\omega); \\ \tilde{e}(\omega) &= \tilde{b}_{IM2}(\omega)\tilde{a}_{RE}(\omega) - \tilde{b}_{RE2}(\omega)\tilde{a}_{IM}(\omega); & \tilde{h}(\omega) &= \tilde{a}_{RE1}(\omega)\tilde{b}_{IM1}(\omega) - \tilde{a}_{IM1}(\omega)\tilde{b}_{RE1}(\omega); \\ \tilde{k}(\omega) &= \tilde{a}_{RE1}^2(\omega) + \tilde{a}_{IM1}^2(\omega); & \tilde{p}(\omega) &= \tilde{a}_{RE1}(\omega)\tilde{a}_{RE2}(\omega) + \tilde{a}_{IM1}(\omega)\tilde{a}_{IM2}(\omega); \\ \tilde{r}(\omega) &= \tilde{a}_{RE2}^2(\omega) + \tilde{a}_{IM2}^2(\omega). \end{aligned}$$

Уравнения границ областей устойчивости рассматриваемой САУ с учетом (21) – (24) примут вид:

$$\begin{aligned} \Re a_{RE}(\omega) + e^{M(\lambda, \omega)}[b_{RE}(\omega) \cos N(\lambda, \omega) - b_{IM}(\omega) \sin N(\lambda, \omega)] &= 0, \\ \Im a_{IM}(\omega) + e^{M(\lambda, \omega)}[b_{RE}(\omega) \sin N(\lambda, \omega) + b_{IM}(\omega) \cos N(\lambda, \omega)] &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, исходя из вида вещественной и мнимой частей (23), (24) показателя степени экспоненты, входящей в характеристический квазиполином (3), можно сделать вывод о том, что при линейной зависимости коэффициентов ее полиномов от одного варьируемого параметра λ в уравнения границ областей устойчивости (25) САУ с распределенными параметрами этот параметр уже входит полиномиальным образом, а точнее, в виде дробно-рациональных функций - в показатель экспоненты и под знак синуса и косинуса. В дальнейшем будем рассматривать случаи полиномиального вхождения варьируемых параметров в характеристический квазимногочлен.

Пусть от λ полиномиальным образом зависят коэффициенты многочленов, входящих в показатель степени экспоненты характеристического

многочлена (3). В этом случае для показателя степени экспоненты можно записать

$$\frac{B(\lambda, s)}{A(\lambda, s)} = \frac{\prod_{i=0}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i(\lambda)(s)^i}{\prod_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i(\lambda)(s)^i},$$

где $\tilde{b}_i(\lambda) = \prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \tilde{b}_{i\tilde{u}} \lambda^{\tilde{u}}$, $\tilde{a}_i(\lambda) = \prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \tilde{a}_{i\tilde{r}} \lambda^{\tilde{r}}$, или меняя порядок суммирования и подставляя $s = j\omega$, находим:

$$\frac{B(\lambda, j\omega)}{A(\lambda, j\omega)} = \frac{\prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \tilde{b}_{i\tilde{u}}(j\omega)^i}{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \prod_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{a}_{i\tilde{r}}(j\omega)^i}. \quad (26)$$

Выделим вещественную и мнимую части (26). Для этого, опираясь на формулы (12) – (18), запишем

$$\frac{B(\lambda, j\omega)}{A(\lambda, j\omega)} = \frac{\prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} (\tilde{b}_{RE\tilde{u}}(\omega) + j\tilde{b}_{IM\tilde{u}}(\omega))}{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} (\tilde{a}_{RE\tilde{r}}(\omega) + j\tilde{a}_{IM\tilde{r}}(\omega))},$$

тогда согласно (17) и (18) получаем уравнения для вещественной и мнимой частей (26):

$$M(\lambda, \omega) = \frac{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{RE\tilde{r}}(\omega) \prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} \tilde{b}_{RE\tilde{u}}(\omega) + \prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{IM\tilde{r}}(\omega) \prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} \tilde{b}_{IM\tilde{u}}(\omega)}{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{RE\tilde{r}}(\omega)^2 + \prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{IM\tilde{r}}(\omega)^2}, \quad (27)$$

$$N(\lambda, \omega) = \frac{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{RE\tilde{r}}(\omega) \prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} \tilde{b}_{IM\tilde{u}}(\omega) - \prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{IM\tilde{r}}(\omega) \prod_{\tilde{u}=0}^{\tilde{v}} \lambda^{\tilde{u}} \tilde{b}_{RE\tilde{u}}(\omega)}{\prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{RE\tilde{r}}(\omega)^2 + \prod_{\tilde{r}=0}^{\tilde{p}} \lambda^{\tilde{r}} \tilde{a}_{IM\tilde{r}}(\omega)^2}. \quad (28)$$

Уравнения границ областей устойчивости САУ с распределенными параметрами в данном случае определяются формулами (25) с учетом (27) и (28). Как видно из полученных уравнений, варьируемый параметр λ входит в показатель экспоненты $M(\lambda, \omega)$ и под знаки функций синуса и коси-

нуса $N(\lambda, \omega)$ с той же степенью, с которой он входит в характеристический квазиполином системы.

Рассмотрим теперь случай, когда от параметра λ полиномиальным образом зависят коэффициенты многочленов дробно-рациональной части системы. В этом случае для характеристического квазимногочлена системы можно записать:

$$q(\lambda, s) = a(\lambda, s) + b(\lambda, s)e^{\frac{B(s)}{A(s)}}, \quad (29)$$

$$a(s, \lambda) = \sum_{l=0}^m a_l(\lambda) s^l, \quad b(s, \lambda) = \sum_{l=0}^n b_l(\lambda) s^l, \quad a_l(\lambda) = \sum_{r=0}^p a_{lr} \lambda^r, \quad b_l(\lambda) = \sum_{u=0}^v b_{lu} \lambda^u. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и меняя порядок суммирования, получаем

$$q(s, \lambda) = \sum_{r=0}^p \lambda^r \sum_{l=0}^m a_{lr} s^l + \sum_{u=0}^v \lambda^u \sum_{l=0}^n b_{lu} s^l e^{\frac{B(s)}{A(s)}}.$$

Уравнение, определяющее границы областей устойчивости рассматриваемой САУ, можно записать в виде

$$\sum_{r=0}^p \lambda^r (a_{REr}(\omega) + j a_{IMr}(\omega)) + \sum_{u=0}^v \lambda^u (b_{REu}(\omega) + j b_{IMu}(\omega)) e^{M(\omega) + jN(\omega)} = 0,$$

где $a_{REr}(\omega)$, $a_{IMr}(\omega)$, $b_{REu}(\omega)$, $b_{IMu}(\omega)$ определяются формулами (8) – (11) с добавлением индексов r или u ; $M(\omega)$, $N(\omega)$ определяются формулами (17) и (18) в случае независимости от λ . С учетом сказанного перейдем к виду (20) уравнений границ областей устойчивости САУ с распределенными параметрами:

$$\sum_{r=0}^M \lambda^r a_{REr}(\omega) + e^{M(\omega)} \sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \cos N(\omega) - b_{IMu}(\omega) \sin N(\omega)] = 0,$$

$$\sum_{r=0}^M \lambda^r a_{IMr}(\omega) + e^{M(\omega)} \sum_{u=0}^v \lambda^u [b_{REu}(\omega) \sin N(\omega) + b_{IMu}(\omega) \cos N(\omega)] = 0.$$

Полученные аналитические зависимости могут применяться для построения областей устойчивости распределенных систем путем решения уравнений, определяющих границы этих областей. Такие области являются основой для решения задачи многокритериального синтеза при проектировании САУ с распределенными параметрами.

Библиографический список

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы / А.А. Воронов. — М.: Энергия, 1981. — 304 с.

2. Николаев Ю.П. Запас устойчивости по фазе и пространство параметров непрерывной линейной системы / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. — 2000. — №3. — С. 102 – 113.

3. Обжерин Ю.Е. Исследование уравнений границ областей устойчивости и запасов устойчивости систем автоматического управления с несколькими запаздываниями / Ю.Е.Обжерин, П.Ф. Пряшникова // Автоматика. — 2000: Тр. междунар. конф. по управлению, Львов, сентябрь 2000 г. — Львов, 2000. — Т. 2. — С. 183 – 188.

Поступила в редакцию 23.10.2002 г.