

УДК 681.5.09

Л.Е. Карташов, доц., В.Я. Копп, проф., д-р техн. наук

О.В. Филипович, ассистент, М.В. Замоленов, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗАКОНА ЭРЛАНГА ПРИ

МОДЕЛИРОВАНИИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ

ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы получения композиций различных законов распределения случайных величин и их использования при моделировании участков асинхронных автоматизированных линий.

Общий подход к построению марковских моделей одно- и многопоточных асинхронных автоматизированных линий (ААЛ) подробно изложен в [1]. При сохранении общей методологии итерационного подхода возможна разработка полумарковских моделей таких объектов, при этом в ходе итерационной процедуры необходимо анализировать параметры функционирования участков ААЛ (структур технологическая ячейка (ТЯ) – накопитель). В [2] рассмотрена модель ТЯ с временным резервом, где задача ставится следующим образом: по известным функциям распределения времен наработки на отказ и восстановления ячейки и по заданному временному резерву абсолютно надежного накопителя, эквивалентно заменить участок линии простейшим элементом, для которого определены функции распределения времени наработки на отказ и восстановления. При этом функция распределения времени наработки на отказ полученного элемента определяется соотношением

$$K_0(t) = \overline{F}_{10}(\tau_n) \int_{\tau_n}^t q_{01}(t-u) \left[1 + \int_0^{u-\tau_n} U(y) dy \right] du, \quad (1)$$

где $U(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^{*n}(y)$, а выражение

$$\tilde{q}(t) = \int_0^t q_{10}(t-u) q_{01}(u) du -$$

свертка функций q_{01} и q_{10} , равных:

$$q_{01}(u) = \frac{dQ_{01}(u)}{du}; \quad q_{10}(u) = \frac{dQ_{10}(u)}{du},$$

причем

$$\begin{cases} Q_{10}(t) = \begin{cases} F_{10}(t), & t < \tau_n, \\ F_{10}(\tau_n), & t \geq \tau_n, \end{cases} \\ Q_{01}(t) = F_{01}(t), \\ Q_{12}(t) = \begin{cases} 0, & t \geq \tau_n, \\ 1 - F_{10}(\tau_n) = \bar{F}_{10}(\tau_n), & t < \tau_n, \end{cases} \end{cases}$$

где $F_{10}(t)$, $F_{01}(t)$ – функции распределения времен наработки на отказ и восстановления ТЯ соответственно; τ_n – временной резерв, обеспечиваемый накопителем.

Основную сложность при расчетах по формуле (1) представляет определение функции $U(y)$. Достаточно часто в качестве функций распределения указанных выше случайных величин используются следующие законы: экспоненциальный со смещением, обобщенный закон Эрланга второго порядка, обобщенный закон Эрланга второго порядка со смещением. Процедура определения сверток, начиная со свертки третьего порядка, является достаточно громоздкой, а для достижения достаточной точности в расчетах иногда необходимо определять свертки более высоких порядков. Задача ставится следующим образом: получить аналитические зависимости для сверток порядка n (n – произвольное целое число) рассмотренных выше законов распределения случайных величин.

Последующие рассуждения основаны на следующем известном факте: если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – взаимонезависимые случайные величины с показательным распределением, плотность которого определяется по формуле

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

то сумма $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ имеет плотность q^{*n} , которая задается формулой

$$q^{*n}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Рассмотрим n -кратную свертку от функции $q(t)$, которая является плотностью суммы двух независимых случайных величин $X + Y$, плотно-

сти которых распределены показательными:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad g(x) = \mu e^{-\mu x}.$$

Выражение $q(t)$ определяется по формуле

$$q(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = f(x) * g(x).$$

Для n -кратной свертки функции $q(t)$ оператор свертки необходимо выполнить $n - 1$ раз

$$q^{*n}(t) = \underbrace{q(t) * q(t) * \dots * q(t)}_n. \quad (3)$$

В силу свойств коммутативности и ассоциативности операции свертки выражение (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} q^{*n}(t) &= \underbrace{q(t) * q(t) * \dots * q(t)}_n = \underbrace{(f(t) * g(t)) * (f(t) * g(t)) * \dots * (f(t) * g(t))}_n = \\ &= \underbrace{(f(t) * f(t) * \dots * f(t))}_n * \underbrace{(g(t) * g(t) * \dots * g(t))}_n = f^{*n}(t) * g^{*n}(t). \end{aligned}$$

Но тогда можно использовать выражение (1) для определения функций $f^{*n}(t)$ и $g^{*n}(t)$:

$$f^{*n}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad g^{*n}(t) = \mu \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t},$$

а для определения функции $q^{*n}(t)$ достаточно найти одну свертку

$$q^{*n}(t) = f^{*n}(t) * g^{*n}(t),$$

которая равна:

$$\begin{aligned} q^{*n}(t) &= \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t \lambda \mu \frac{(\lambda(t-x))^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-x)} e^{-\mu x} dx = \\ &= e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}t} \sqrt{\pi} t^{n-\frac{1}{2}} (\lambda \mu)^n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{it(\mu-\lambda)}{2}\right)}{\Gamma(n)(i(\mu-\lambda))^{n-\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где i – мнимая единица; $\Gamma(n)$ – гамма-функция; $J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{it(\mu-\lambda)}{2}\right)$ –

функция Бесселя первого рода порядка $n - \frac{1}{2}$, равная [3]

$$J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{it(\mu - \lambda)}{2}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma\left(n + v + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{it(\mu - \lambda)}{4}\right)^{n+2v-\frac{1}{2}}.$$

В случае использования обобщенного закона Эрланга второго порядка, выражения для определения n -кратной свертки становятся значительно более громоздкими. Для упрощения этой операции воспользуемся следующим приемом: представим выражение для функции $f(t)$ в виде свертки двух функций с показательными распределениями

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = f_1(t) * f_2(t),$$

где $f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$.

Аналогично, для функции $g(x)$:

$$g(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}) = g_1(t) * g_2(t),$$

где $g_1(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t}$, $g_2(t) = \mu_2 e^{-\mu_2 t}$.

Тогда, используя приведенные выше рассуждения, получаем

$$q^{*n}(t) = f_1^{*n}(t) * f_2^{*n}(t) * g_1^{*n}(t) * g_2^{*n}(t), \quad (5)$$

где $f_1^{*n}(t) = \lambda_1 \frac{(\lambda_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 t}$, $f_2^{*n}(t) = \lambda_2 \frac{(\lambda_2 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_2 t}$,

$$g_1^{*n}(t) = \mu_1 \frac{(\mu_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_1 t}, \quad g_2^{*n}(t) = \mu_2 \frac{(\mu_2 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_2 t}.$$

Формулу (5) в соответствии с соотношением (4) можно переписать в виде

$$q^{*n}(t) = f^{*n}(t) * g^{*n}(t),$$

$$\text{где } f^{*n}(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}t} \sqrt{\pi} t^{n-\frac{1}{2}} (\lambda_1 \lambda_2)^n}{\Gamma(n)(i(\lambda_2 - \lambda_1))^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left(\frac{it(\lambda_2 - \lambda_1)}{4}\right)^{n+2v-\frac{1}{2}}}{v! \Gamma\left(n + v + \frac{1}{2}\right)};$$

$$g^{*n}(t) = \frac{e^{-\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}t} \sqrt{\pi} t^{n-\frac{1}{2}} (\mu_1 \mu_2)^n}{\Gamma(n)(i(\mu_2 - \mu_1))^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{it(\mu_2 - \mu_1)}{4} \right)^{n+2k-\frac{1}{2}}}{k! \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q^{*n}(t) &= f^{*n}(t) * g^{*n}(t) = \int_0^t f^{*n}(t-x) g^{*n}(x) dx = \\ &= \frac{\pi (\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2)^n e^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}t}}{\Gamma^2(n)(-\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1))^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^t e^{\frac{x(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2)}{2}} (x(t-x))^{n-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \left(\frac{i(t-x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{4} \right)^{n+2v-\frac{1}{2}}}{v! \Gamma\left(n+v+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{ix(\mu_2 - \mu_1)}{4} \right)^{n+2k-\frac{1}{2}}}{k! \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)} dx. \end{aligned}$$

Меняя операции суммирования и интегрирования местами в предположении, что ряды в подынтегральном выражении сходятся, получаем:

$$\begin{aligned} q^{*n}(t) &= \frac{\pi (\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2)^n e^{-\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}t}}{\Gamma^2(n)(-\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1))^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v+k}}{v! k! \Gamma\left(n+v+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)} \times \\ &\times \int_0^t e^{\frac{x(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2)}{2}} (x(t-x))^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{i(t-x)(\lambda_2 - \lambda_1)}{4} \right)^{n+2v-\frac{1}{2}} \left(\frac{ix(\mu_2 - \mu_1)}{4} \right)^{n+2k-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательный вид выражения $q^{*n}(t)$ здесь не приводится ввиду его громоздкости.

В случае использования показательного распределения со смещением, плотность которого определяется по формуле

$$f(t) = 1(t - \tau) \lambda e^{-\lambda(t-\tau)},$$

где $1(t - \tau)$ – единичная функция, равная

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ 1, & t \geq \tau, \end{cases}$$

можно применить формулу

$$q^{*n}(t) = 1(t - n\tau)\lambda \frac{(\lambda(t - n\tau))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-n\tau)}. \quad (7)$$

Данное утверждение может быть доказано по методу математической индукции. Действительно, при $n = 1$ выражение (7) сводится к формуле плотности. При $n + 1$ плотность определяется сверткой

$$q^{*n+1}(t) = \int_0^t q^{*n}(t-x)q^{*1}(x)dx.$$

В предположении, что формула (7) справедлива, получаем

$$\begin{aligned} q^{*n+1}(t) &= \int_0^t 1(t - n\tau - x)\lambda \frac{(\lambda(t - n\tau - x))^{n-1}}{(n-1)!} e^{n\lambda\tau} e^{-\lambda(t-x)} 1(x - n\tau)\lambda e^{\lambda\tau} e^{-\lambda x} dx = \\ &= 1(t - (n+1)\tau)\lambda \frac{(\lambda(t - (n+1)\tau))^n}{n!} e^{-\lambda(t-(n+1)\tau)}, \end{aligned}$$

следовательно, утверждение верно. Определим n -кратную свертку от функции $q(t)$ двух независимых случайных величин, распределенных показательно с различными параметрами и одинаковым смещением:

$$f(t) = 1(t - \tau)\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad g(x) = 1(t - \tau)\mu e^{-\mu(t-\tau)}.$$

Тогда

$$q^{*n}(t) = 1(t - 2n\tau) e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}(t-2n\tau)} \sqrt{\pi} (t - 2n\tau)^{n-\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{i(t-2n\tau)(\mu-\lambda)}{2}\right)}{\Gamma(n)(i(\mu-\lambda))^{n-\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

)

где

$$J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{i(t-2n\tau)(\mu-\lambda)}{2}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma\left(n+v+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{i(t-2n\tau)(\mu-\lambda)}{4}\right)^{n+2v-\frac{1}{2}};$$

$$1(t - 2n\tau) = \begin{cases} 0, & t < 2n\tau; \\ 1, & t \geq 2n\tau. \end{cases}$$

Свертка порядка n двух независимых случайных величин, распределенных показательно с различными параметрами и смещениями

$$f(t) = 1(t - \tau_1)\lambda e^{-\lambda(t-\tau_1)}, \quad g(x) = 1(t - \tau_2)\mu e^{-\mu(t-\tau_2)},$$

определяется соотношением

$$q^{*n}(t) = 1(t - n(\tau_1 + \tau_2)) e^{-\frac{\lambda + \mu}{2}(t - n(\tau_1 + \tau_2))} \sqrt{\pi} (t - n(\tau_1 + \tau_2))^{n-\frac{1}{2}} (\lambda \mu)^n \times \\ \times \frac{J_{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{i(t - n(\tau_1 + \tau_2))(\mu - \lambda)}{2} \right)}{\Gamma(n)(i(\mu - \lambda))^{n-\frac{1}{2}}}, \quad (9)$$

где

$$J_{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{i(t - n(\tau_1 + \tau_2))(\mu - \lambda)}{2} \right) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma \left(n + v + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{i(t - n(\tau_1 + \tau_2))(\mu - \lambda)}{4} \right)^{n+2v-\frac{1}{2}}; \\ 1(t - n(\tau_1 + \tau_2)) = \begin{cases} 0, & t < n(\tau_1 + \tau_2); \\ 1, & t \geq n(\tau_1 + \tau_2). \end{cases}$$

Для плотности распределения в виде обобщенного закона Эрланга второго порядка со смещением воспользоваться формулой (5) нельзя, поскольку его не удастся представить в виде свертки двух экспонент со смещением. Предположим, что данный закон можно представить в виде композиции двух законов: экспоненциального и экспоненциального со смещением. Докажем это предположение. Так, если даны две плотности

$$f(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \text{ и } g(t) = 1(t - \tau) \lambda_2 e^{-\lambda_2(t - \tau)},$$

то выражение для их свертки имеет вид:

$$q(t) = f(t) * g(t) = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-x)} 1(x - \tau) e^{-\lambda_2(x - \tau)} dx = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 \tau} \int_0^t 1(x - \tau) e^{-x(\lambda_1 + \lambda_2)} dx = \\ = 1(x - \tau) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (e^{-\lambda_1(t - \tau)} - e^{-\lambda_2(t - \tau)}).$$

В результате композиции получен обобщенный закон Эрланга второго порядка со смещением, что и требовалось доказать. Тогда можно воспользоваться выражением (5) и получить функцию $q^{*n}(t)$, являющуюся сверткой порядка n плотностей распределения случайных величин

$$f(t) = 1(t - \tau) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1(t - \tau)} - e^{-\lambda_2(t - \tau)});$$

$$g(t) = 1(t - \tau) \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} (e^{-\mu_1(t - \tau)} - e^{-\mu_2(t - \tau)}),$$

распределенных по обобщенным законам Эрланга второго порядка с различными параметрами и смещениями, которая в этом случае равна

$$q^{*n}(t) = f_1^{*n}(t) * f_2^{*n}(t) * g_1^{*n}(t) * g_2^{*n}(t),$$

где

$$f_1^{*n}(t) = 1(t - n\tau_1) \lambda_1 \frac{(\lambda_1(t - n\tau_1))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1(t - n\tau_1)}; \quad f_2^{*n}(t) = \lambda_2 \frac{(\lambda_2 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_2 t};$$

$$g_1^{*n}(t) = 1(t - n\tau_2) \mu_1 \frac{(\mu_1(t - n\tau_2))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_1(t - n\tau_2)}; \quad g_2^{*n}(t) = \mu_2 \frac{(\mu_2 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_2 t}.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$q^{*n}(t) = f^{*n}(t) * g^{*n}(t) = \int_0^t f^{*n}(t-x) g^{*n}(x) dx, \quad (10)$$

где

$$f^{*n}(t) = f_1^{*n}(t) * g_1^{*n}(t) = 1(t - n(\tau_1 + \tau_2)) e^{-\frac{\lambda_1 + \mu_1}{2}(t - n(\tau_1 + \tau_2))} \frac{\sqrt{\pi} (t - n(\tau_1 + \tau_2))^{n-\frac{1}{2}} (\lambda_1 \mu_1)^n}{\Gamma(n) (i|\mu_1 - \lambda_1|)^{n-\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma\left(n + v + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{i(t - n(\tau_1 + \tau_2)) |\mu_1 - \lambda_1|}{4} \right)^{n+2v-\frac{1}{2}};$$

$$g^{*n}(t) = f_2^{*n}(t) * g_2^{*n}(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda_2 + \mu_2}{2}t} \sqrt{\pi} t^{n-\frac{1}{2}} (\lambda_2 \mu_2)^n}{\Gamma(n) (i|\mu_2 - \lambda_2|)^{n-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(n + k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{it |\mu_2 - \lambda_2|}{4} \right)^{n+2k-\frac{1}{2}}.$$

Окончательный вид функции $q^{*n}(t)$ здесь не приводится ввиду громоздкости входящих в нее выражений. Следует отметить, что вычисления значительно упрощаются при подстановке численных значений параметров, входящих в приведенные выше соотношения.

Таким образом, для определения n -кратной свертки в случае показательных законов без смещения с одинаковыми параметрами можно использовать соотношение (2), с различными – (4); для показательных законов со смещением и одинаковыми параметрами – выражение (7), с различными параметрами и одинаковым смещением – (8), с различными параметрами и смещениями – (9). Если случайные величины распределены в соответствии с обобщенным законом Эрланга второго порядка без смещения, то определение n -кратной свертки сводится к использованию формулы (6), со смещением – (10).

Полученные выражения позволяют существенно упростить процедуру вычисления сверток и могут быть применены при моделировании как отдельных участков автоматизированных линий, так и линий в целом.

Библиографический список

1. Транспортно–накопительные системы в сборочном производстве / Е.В. Пашков, В.Я. Копп, А.Г. Карлов. — К.: УМК ВО, 1992. — 536 с.
2. Копп В.Я. Полумарковская модель производственной ячейки, снабженной временным резервом /В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, Е.Н. Машенко // Вестн. СевГТУ: Сб. научн. тр. – Севастополь, 1996. — Вып.2. — С. 41 – 53.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — 13–е изд., испр. — М.: Наука, 1986. — 544 с.

Поступила в редакцию 05.12.2002 г.