

УДК 62-50

Б.А. Скороход, проф., д-р техн. наук, В.С. Колежук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕКСА НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ВЕКТОРНЫМ ВЫХОДОМ

Показано, как по канонической наблюдаемой форме может быть определено минимальное число шагов, необходимое для восстановления состояния линейной системы.

Пусть задана система

$$x(t+1) = A(t)x(t), y(t) = C(t)x(t), x(t_0) = x_0, t = t_0, t_1, \dots, \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -мерная векторная функция; $y(t)$ – m -мерная векторная функция; $A(t), C(t)$ – известные матрицы размерностей соответственно $n \times n, m \times n$; x_0 – произвольный n -мерный вектор.

Система (1) называется полностью наблюдаемой, если для некоторого t_0 состояние $x(t_0)$ может быть определено по известной выходной переменной $y(t)$ для $t_0 < t < t_N$, где t_N конечно, а необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости [1] состоит в том, чтобы ранг $mN \times n$ матрицы

$$L(t_0, t_{N-1}) = [C^T(t_0), X^T(t_1, t_0)C^T(t_1), \dots, X^T(t_{N-1}, t_0)C^T(t_{N-1})]^T$$

был равен n , где

$$X(t_i, t_0) = A(t_0)A(t_1) \dots A(t_{i-1}), i = 1, \dots, N-1.$$

Интерес представляет задача определения по матрицам $A(t), C(t)$ необходимого минимального числа шагов (значения N – индекса наблюдаемости) за которое возможно восстановить состояние системы (1). Для стационарных систем оценка индекса наблюдаемости известна [2] и определяется выражением $n/m \leq N \leq n - m + 1$. Здесь показывается, что индекс наблюдаемости может быть выражен через характеристики канонической наблюдаемой формы (КНФ).

Пусть система (1) задана в КНФ, т.е., матрицы $A(t)$ и $C(t)$ имеют вид

$$A(t) = \{A_{i,j}(t)\}_{n,n}, \quad C(t) = \{C_{il}\}_{m,n},$$

где

$$A_{i,i}(t) = \{e_2 \mid e_3 \mid \dots \mid e_{n_i} \mid a_{i,i}(t)\}_{n_i, n_i}, \quad A_{i,j}(t) = \{0 \mid 0 \mid \dots \mid 0 \mid a_{i,j}(t)\}_{n_i, n_j},$$

$$a_{i,j}(t) = -\{a_{i,j}^1(t), a_{i,j}^2(t), \dots, a_{i,j}^{n_j}(t)\}^T, \quad C_{il} = e_{n_1 + n_2 + \dots + n_j}^T,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n.$$

Рассмотрим блоки матрицы $L(t_0, t_{N-1})$ соответствующие каждому шагу. Непосредственно проверяется, что

$$CX(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} A_{n1}^T(t_0) & A_{n1+n2}^T(t_0) & \dots & A_n^T(t_0) \end{pmatrix}^T, \quad \text{где } A_i(t) - i\text{-я строка матрицы } A(t). \text{ Аналогичным образом:}$$

$$CX(t_2, t_0) = \begin{pmatrix} A_{n1}^T(t_1)A_{n1}^T(t_0) & A_{n1+n2}^T(t_1)A_{n1+n2}^T(t_0) & \dots & A_n^T(t_1)A_n^T(t_0) \end{pmatrix}^T,$$

или для произвольного k

$$CX(t_k, t_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n1}^T(t_{k-1}) \times \dots \times A_{n1}^T(t_0) & A_{n1+n2}^T(t_{k-1}) \times \dots \times A_{n1+n2}^T(t_0) & \dots & A_n^T(t_{k-1}) \times \dots \times A_n^T(t_0) \end{pmatrix}^T.$$

Тогда матрица $L(t_0, t_{N-1})$ может быть переписана в следующем виде:

$$L(t_0, t_{N-1}) =$$

$$= [C^T \mid X_{n1}^T(t_0, t_0) \quad X_{n1+n2}^T(t_0, t_0) \quad \dots \quad X_n^T(t_0, t_0) \mid \dots \mid X_{n1}^T(t_{N-1}, t_0) \quad \dots \quad X_n^T(t_{N-1}, t_0)]^T.$$

Обозначим как δ_i количество блоков системы, размерность которых больше либо равна i ($\delta_1 = m$).

Тогда, записав матрицу $CX(t_0, t_0)$ в виде строк $X_{ni}(t_0, t_0)$, нетрудно видеть, что матрица $L(t_0, t_{N-1})$ после второго шага будет иметь $l_2 = n - m - (\delta_1 + \delta_2)$ нулевых столбцов. Очевидно, что именно наличие нулевых столбцов и будет определяющим фактором в достижении матрицей $L(t_0, t_{N-1})$ ранга n .

Далее находим представление для строк матрицы $CX(t_1, t_0)$. Учитывая вид матрицы $A(t)$, получаем:

$$CX(t_1, t_0) = CA(t_0) \cdot A(t_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & -a_{n1,n1}(t_0) & \mid & 0 & \dots & 0 & -a_{n1,n2}(t_0) & \mid & \dots & \mid & 0 & \dots & 0 & -a_{n1,n}(t_0) \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n2,n1}(t_0) & \mid & 0 & \dots & 1 & -a_{n2,n2}(t_0) & \mid & \dots & \mid & 0 & \dots & 0 & -a_{n2,n}(t_0) \\ \dots & & & & \mid & \dots & & & & \mid & \dots & \mid & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n,n1}(t_0) & \mid & 0 & \dots & 0 & -a_{n,n2}(t_0) & \mid & \dots & \mid & 0 & \dots & 1 & -a_{n,n}(t_0) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & \dots & 0 & -a_{1,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{1,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{1,n}(t_1) \\
1 & 0 & \dots & 0 & -a_{2,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{2,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{2,n}(t_1) \\
0 & 1 & \dots & 0 & -a_{3,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{3,n1+n2}(t_1) & \dots & 0 & \dots & 0 & -a_{3,n}(t_1) \\
& & \dots & & & & \dots & & & & & \dots & & \\
0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n1,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1,n}(t_1) \\
0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+1,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+1,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+1,n}(t_1) \\
0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+2,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+2,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+2,n}(t_1) \\
& & \dots & & & & \dots & 0 & & \dots & \dots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+n2,n1}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+n2,n1+n2}(t_1) & 0 & \dots & 0 & -a_{n1+n2,n}(t_1) \\
\hline
& \dots & & & & & \dots & & & & \dots & & \\
\hline
& & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 & -a_{n-nm+1,n}(t_1) \\
& & & & & & & & & & 1 & \dots & 0 & -a_{n-nm+2,n}(t_1) \\
& & & & & & & & & & \dots & \dots & & \\
& & & & & & & & & & 0 & \dots & 1 & -a_{n,n}(t_1)
\end{array} \right) = \\
& = (Y_1(t_1, t_0) \quad Y_2(t_1, t_0) \quad \dots \quad Y_m(t_1, t_0)), \tag{7}
\end{aligned}$$

где

$$Y_i(t_1, t_0) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & \dots & 0 & 0 & a_{n1, \sum_{j=1}^i nj}(t_0) a_{n1, \sum_{j=1}^i nj}(t_1) & \alpha \\
0 & \dots & 0 & 0 & a_{n1+n2, \sum_{j=1}^i nj}(t_0) a_{n1+n2, \sum_{j=1}^i nj}(t_1) & \alpha \\
& & \dots & & & \alpha \\
0 & \dots & 0 & 1 & a_{\sum_{j=1}^i nj, \sum_{j=1}^i nj}(t_0) a_{\sum_{j=1}^i nj, \sum_{j=1}^i nj}(t_1) & \alpha \\
0 & \dots & 0 & 0 & a_{\sum_{j=1}^{i-1} nj, \sum_{j=1}^i nj}(t_0) a_{\sum_{j=1}^{i-1} nj, \sum_{j=1}^i nj}(t_1) & \alpha \\
& & \dots & & & \alpha \\
0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n}(t_0) a_{n,n}(t_1) & \alpha
\end{array} \right), \quad \alpha - \text{возможные}$$

ненулевые элементы.

Заметим, что от шага к шагу наблюдается смещение влево столбцов в каждом из блоков, в частности, столбцов, представляющих единичные векторы.

Если матрицу $CX(t_1, t_0)$, определяемую соотношением (7), добавить к матрице $L(t_0, t_{N-1})$, полученной на предыдущем шаге, то количество нулевых столбцов в каждом из ее блоков, размерность которых больше либо равна 3, уменьшится на 1 за счет появления новых столбцов, линейно-независимых с предыдущими, т.е. суммарное количество нулевых столбцов уменьшится на δ_3 , и при этом ранг матрицы $L(t_0, t_{N-1})$ возрастет на δ_3 .

Продолжая аналогичным образом, устанавливаем, что в блоке n_i количество нулевых столбцов на j -м шаге будет определяться соотношением:

$$l_{i,j} = \begin{cases} n_i - j, n_i \geq j \\ 0, n_i < j \end{cases}. \quad (8)$$

Будем называть блок, в котором количество нулевых столбцов стало на некотором шаге равным нулю, блоком, находящимся в состоянии $\{l=0\}$.

Соотношение (8) говорит о том, что число шагов, необходимое для достижения блоком n_i состояния $\{l=0\}$, тем больше, чем больше размерность этого блока и равно n_i . Заметим здесь, что блок размерности i может дать матрице $L(t_0, t_{N-1})$ не более i линейно независимых столбцов.

Из вида матриц $A(t), C, L(t_0, t_{N-1})$ следует, что максимальное число шагов потребуется на достижение состояния $\{l=0\}$ в блоке с размерностью $\max(n_i)$. Кроме того, к моменту достижения этим блоком состояния $\{l=0\}$ все остальные блоки будут гарантированно находиться в этом состоянии, и ранг матрицы $L(t_0, t_{N-1})$ будет определяться только состоянием блока $\max(n_i)$. Это объясняется еще и тем, что пока блок $\max(n_i)$ не достигнет состояния $\{l=0\}$, матрица $L(t_0, t_{N-1})$ не будет содержать n линейно независимых столбцов, следовательно, ее ранг будет меньше n .

На шаге $i = \max(n_i)$ и этот блок достигнет состояния $\{l=0\}$, а матрица $L(t_0, t_{N-1})$ — ранга n . Это значит, что для достижения матрицей $L(t_0, t_{N-1})$ ранга n необходимо и достаточно $N = \max(n_1, n_2, \dots, n_m)$ шагов.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Индекс наблюдаемости N для системы (1) определяется соотношением:

$$N = \max(n_1, n_2, \dots, n_m).$$

Этот результат представляется весьма важным в связи с распространением результатов работ [3,4] на случай многомерных наблюдений.

Библиографический список

1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. — М.: Машиностроение, 1986. — 446 с.
2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. — М.: Наука, 1985. — 296 с.
3. Скороход Б.А., Оценивание состояния дискретных систем при неограниченном увеличении точности измерений / Б.А. Скороход, А.А. Невинский // Оптимизация производственных процес сов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 3. — С. 161–167.

4. Скороход Б.А., Оценивание состояния в слабо наблюдаемых линейных дискретных системах / Б.А. Скороход, А.А. Невинский // Научно-технический журнал Радиоэлектроники и информатики. — Харьков, 2001. — Вып. 2. — С. 66–69.

Поступила в редакцию 08.01.2003 г.