

УДК 681.511

**Пряшников Ф.Д., проф, д-р техн. наук, Кудашев В.С., аспирант,
Ларионова Е.Н.**

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ Д-РАЗБИЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Предлагается метод решения уравнений Д-разбиения в задачах оптимизации систем автоматического управления по критериям качества, позволяющий определять вещественные корни алгебраического уравнения. Предложена модификация, ускоряющая сходимость метода. Рассмотрен пример решения уравнения Д-разбиения автоматической системы управления курсом судна.

Рассматривается система автоматического управления с передаточной функцией $W(s, \lambda) = \frac{B(s, \lambda)}{A(s, \lambda)}$, в которой коэффициенты числителя и знаменателя зависят от параметра λ . Задача оптимизации такой системы по критериям качества (время регулирования, перерегулирование, запасы устойчивости и другие) решается на множестве значений параметра λ , для которых передаточная функция $W(s, \lambda)$ является устойчивой.

Цель работы – предложить метод для определения областей устойчивости системы автоматического управления, обладающий малой погрешностью и возможно большей скоростью решения.

В настоящее время для определения областей устойчивости в пространстве одного варьируемого параметра широко используется метод Д-разбиения. Этот метод позволяет определить области устойчивости, если

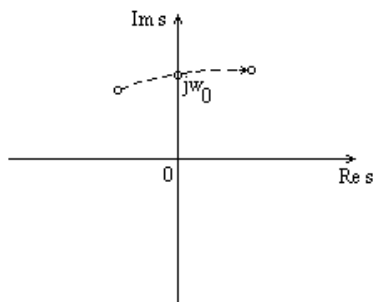


Рисунок 1 – Изменение устойчивости системы

варьируемый параметр входит в коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции линейно. Тогда метод Д-разбиения позволяет разделить область допустимых значений параметра λ на области, в каждой из которых при всех значениях параметра, входящих в них, система либо устойчива, либо неустойчива.

Метод Д-разбиения определяет границы областей устойчивости, т.е. те

точки, в которых происходит переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое или наоборот. При этом по крайней мере один из корней характеристического уравнения на комплексной плоскости переходит из левой полуплоскости в правую (из правой в левую), как показано на рисунке 1. Граничное значение корня равно в этом случае $j\omega$, где ω - некоторое действительное число. Перебирая все значения ω от $-\infty$ до ∞ , можно по характеристическому уравнению найти те значения λ , при которых система находится на границе устойчивости. Для этого из всех значений λ , получаемых при переборе ω , выбираются те, которые являются вещественными.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$A(s, \lambda) = 0.$$

При переборе всех чисто мнимых корней получается

$$A(j\omega, \lambda) = 0.$$

Это уравнение можно решить либо графически (как чаще всего и поступают), либо алгебраически.

Поскольку в методе Д-разбиения варьируемый параметр λ входит линейно, то можно записать

$$\begin{aligned} \lambda R(j\omega) + P(j\omega) &= 0, \\ \lambda &= -\frac{P(j\omega)}{R(j\omega)}. \end{aligned}$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\lambda = -\frac{P(j\omega)\overline{R(j\omega)}}{R(j\omega)\overline{R(j\omega)}},$$

где $\overline{R(j\omega)}$ - выражение, комплексно сопряженное с $R(j\omega)$.

Далее,

$$\lambda = U(\omega) + jV(\omega). \quad (1)$$

Так как $P(j\omega)$ и $R(j\omega)$ - это многочлены от ω с комплексными коэффициентами, то $U(\omega)$ и $V(\omega)$ - это многочлены от ω с действительными коэффициентами.

При построении кривой Д-разбиения ω изменяется от $\omega_{\min}$ до $\omega_{\max}$ с шагом $d\omega$. Значения λ , найденные путем подстановки ω в уравнение (1), откладываются на комплексной плоскости. Пересечение кривой Д-разбиения с вещественной осью и даст границы областей устойчивости. Для проверки того, является ли система в какой-то области устойчивой, достаточно проверить на устойчивость любую точку области, так как все точки области определяют либо устойчивую, либо неустойчивую систему.

Основное достоинство графического определения областей устойчивости – простота и наглядность.

Графическое построение кривой имеет следующие недостатки:

1. Исследуются не все значения ω , а только часть из них (от $\omega_{\min}$ до $\omega_{\max}$). Это значит, что нет гарантии того, что не будут пропущены области устойчивости (неустойчивости).

2. Перебор значений ω ведется с некоторым $d\omega > 0$. В этом случае также нет гарантии, что между двумя соседними значениями ω не будет пропущена область устойчивости (неустойчивости).

3. Пересечение с вещественной осью определяется в результате перехода кривой из нижней полуплоскости в верхнюю или наоборот. При этом точки, по которым строилась кривая, могут не лежать на оси, из-за чего точность определения границ областей устойчивости уменьшается.

4. Задача нахождения областей устойчивости при помощи кривой Д-разбиения трудно алгоритмизируется.

Предлагается определять области устойчивости алгебраическое путем нахождения их границ. Начало решения такой проблемы можно найти, например, в [1,4].

Границами областей устойчивости являются те значения λ , для которых справедливо

$$\lambda = U(\omega_i),$$

где ω_i определяются из условия

$$V(\omega_i) = 0.$$

Таким образом, задача определения границ областей устойчивости сводится к задаче отыскания вещественных корней полиномиального уравнения с вещественными коэффициентами.

Существует несколько методов определения вещественных корней многочлена, которые основаны на применении: 1) теоремы Ролля [3]; 2) теоремы Штурма [2,3]; 3) теоремы Бюдана-Фурье [3]; 4) теоремы Декарта [2,3]; 5) обобщенной теоремы Рауса [1].

Все эти методы отличаются способом отделения вещественных корней. Сами корни находятся путем деления отрезков с отделенными корнями в некотором отношении (например, половинное деление). Перечисленные методы обладают существенным недостатком – они требуют преобразования исходного многочлена, в результате чего погрешность определения корней может сильно повыситься, особенно при высоких степенях многочлена.

Для определения вещественных корней многочленов также может использоваться метод, позволяющий определять вещественные корни более

широкого класса функций. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a; b]$. Если функция представима в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(x),$$

причем, $\varphi_i(x)$, $i=0..N$ монотонно не убывает или монотонно не возрастает на $[a; b]$, то можно получить условие отсутствия вещественных корней уравнения $f(x) = 0$ при $x \in [a; b]$.

Так как $\varphi_i(x)$ либо не убывают, либо не возрастают, то на одном из концов интервала $[a; b]$ они принимают наибольшее, а на другом – наименьшее значения.

Пусть

$$\varphi_{\min i} = \begin{cases} \varphi_i(a) & \text{при } \varphi_i(a) < \varphi_i(b), \\ \varphi_i(b) & \text{при } \varphi_i(a) \geq \varphi_i(b), \end{cases}$$

$$\varphi_{\max i} = \begin{cases} \varphi_i(a) & \text{при } \varphi_i(a) \geq \varphi_i(b), \\ \varphi_i(b) & \text{при } \varphi_i(a) < \varphi_i(b), \end{cases}$$

$$f_{\max} = \sum_{i=0}^N \varphi_{\max i}, \quad f_{\min} = \sum_{i=0}^N \varphi_{\min i}.$$

В таком случае условие отсутствия корней уравнения $f(x) = 0$ на $x \in [a; b]$ можно записать, как

$$\begin{cases} f_{\max} < 0, \\ f_{\min} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если делить исходный отрезок на части и отбрасывать те из них, на которых выполняется (2), то рано или поздно будут получаться такие интервалы, которые можно принимать с заданной степенью точности за точки. Тогда в любой точке этих интервалов проверяется условие $|f(x)| < \varepsilon$, где ε - наперед заданное малое значение. Если условие соблюдается, то любая точка из отрезка может быть принята в качестве корня.

Если $f(x)$ - многочлен степени n , то для $x \in (0; +\infty)$ $\varphi_i(x) = a_i x^i$, если $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Метод обладает следующими достоинствами:

1) не требуется специального метода отделения корней. Корни определяются и отделяются одинаковым способом;

2) на каждом шаге деления необходимо вычислять значения функции в двух точках; никаких дополнительных вычислений не требуется;

3) исходный многочлен не преобразовывается. Это означает, что общая погрешность результата уменьшается по сравнению с другими методами.

Основной недостаток – медленная сходимость к корням.

Для многочленов одной переменной предлагается модификация, позволяющая значительно повысить скорость сходимости.

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Функцию можно представить в виде $f(x) = u(x) - v(x)$, причем

$$u_i = \begin{cases} a_i & \text{при } a_i > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} a_i & \text{при } a_i > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} -a_i & \text{при } a_i < 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $x > 0$ функции $u(x)$ и $v(x)$ неотрицательны. Кроме того, неотрицательны и все их производные, т.е. $u(x)$ и $v(x)$ не убывают.

На интервале $(a; b)$ при $0 \leq a < b$

$$u_{\min} = u(a); \quad u_{\max} = u(b);$$

$$v_{\min} = v(a); \quad v_{\max} = v(b);$$

$$f_{\min} = u_{\min} - v_{\max};$$

$$f_{\max} = u_{\max} - v_{\min}.$$

Из условия (2) получается

$$\begin{cases} u_{\min} - v_{\max} > 0, \\ u_{\max} - v_{\min} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть, для определенности, $u(a) > v(a)$, т.е. $u_{\min} > v_{\min}$. Случай $u_{\min} < v_{\min}$ полностью аналогичен с точностью до обозначений.

Условие (3) приобретает вид:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{du}{dx} \Big|_{x=a} (b-a) + u(a) > v(b), \\ \frac{dv}{dx} \Big|_{x=a} (b-a) + v(a) > u(b). \end{array} \right. \quad (4)$$

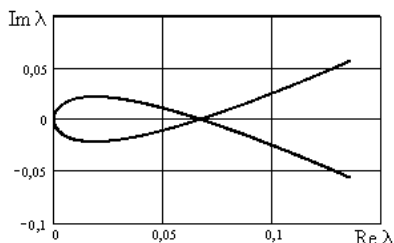


Рисунок 2 – Кривая Д-разбиения

При использовании этой модификации скорость сходимости увеличивается в десятки (при малых степенях) и сотни (для высоких степеней) раз.

В качестве примера рассматривается система управления курсом судна. Варьируемым параметром является коэффициент усиления интегрирующего канала ПИД-регулятора.

Передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$Wr = 6,2 \frac{(s^2 + s + \lambda)(9,8s + 1)}{s^2(s^2 + 67,5s + 89,8)(3,3s + 1)(28,6s + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы представляется в виде

$$Wz = 6,2 \frac{(s^2 + s + \lambda)(9,8s + 1)}{94,7s^6 + 6421,5s^5 + 10656,1s^4 + 2994,2s^3 + 157,1s^2 + (6,2 + 61,1\lambda)s + 6,2\lambda}.$$

Кривая Д-разбиения изображена на рисунке 2. Видно, что определение границ областей устойчивости возможно лишь приблизительно (0,07).

Уравнение Д-разбиения принимает вид

$$\omega(578,2\omega^6 - 61089,7\omega^4 - 904,7\omega^2 + 3,9) = 0.$$

Его решение дает следующие значения ω : 0, $\pm 0,0589$, $\pm 10,2794$.

Тогда границами областей являются значения λ : 0, 0,06697.

Видно, что определение границ областей устойчивости производится точнее, чем с использованием кривой Д-разбиения. Кроме того, для данного примера определение корней уравнения занимает меньше времени, чем построение кривой.

Проверка показывает, что областью устойчивости является интервал (0;0,06697).

Для данной системы номинальным значением коэффициента усиления интегрирующего канала ПИД-регулятора является $\lambda = 0,02$, находящееся в области устойчивости.

Одним из возможных направлений развития данной работы является рассмотрение полиномиальной зависимости коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции от варьируемого параметра, что невозможно при использовании Д-разбиения. Полиномиальная зависимость может использоваться по следующим причинам:

- 1) линейное вхождение параметра менее распространено, чем полиномиальное (квадратичное, кубическое);
- 2) при получении уравнений границ областей качества происходят, в частности, перемножения выражений, что повышает степень вхождения варьируемого параметра;
- 3) при неполиномиальной зависимости коэффициентов от параметра можно применить разложение в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки с конечным числом членов разложения.

Библиографический список

- 1 Барабанов А.Т. Полное решение общей проблемы Рауса в теории систем / А.Т. Барабанов // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1991. — №2. — С.39 – 47.
- 2 Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные методы / Д. Кнут. — М.: Мир, 1977. — 728 с.
- 3 Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М: Наука, 1968. — 432 с.
- 4 Пряшникова П.Ф. Алгебраизация построения областей устойчивости систем автоматического управления с несколькими запаздываниями / П.Ф. Пряшникова // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 4. — С. 157 – 164.

Поступила в редакцию 14.01.2003 г.