

УДК 519.64

В.П. Долгин, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Излагается метод оптимального выбора параметров динамической системы по критерию минимума ее добротности, определяемой косвенно по амплитудной частотной характеристике на основании минимаксного подхода к оценке качества процесса.

Оптимизация систем управления часто осуществляется с помощью оценок качества. Оценка качества систем производится на основании прямых и косвенных показателей [1]. Прямые показатели качества определяются непосредственно по характеристике переходного процесса. Использование прямых показателей качества при решении задач оптимизации часто требует введения ограничений, что сужает класс решаемых задач. Косвенные методы оценки качества не требуют наличия кривой переходного процесса. Это в ряде случаев упрощает процедуру оценки, что делает актуальной задачу исследования частотных методов оптимизации на основе формализации критериев оценки в частотной области.

Постановка задачи. Косвенно качество процесса можно оценить с помощью частотных критериев. Известно, что с уменьшением добротности системы снижается колебательность переходного процесса. Добротность системы определяет вид ее частотных характеристик и, в частности, логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) [1,2]. Находя максимум ЛАЧХ при изменении параметров системы, можно судить об изменении ее добротности. Изменение параметров системы возможно в некоторых пределах. Задавая пределы допустимых изменений параметров системы, на основе минимаксного подхода можно найти параметры системы, при которых достигается предельно достижимое качество ее работы. Таким образом, процесс оптимизации может быть сведен к минимаксной процедуре: достижение минимума максимального значения ЛАЧХ в пределах допустимых изменений параметров системы

$$\min_{a,b=\text{var}} \left\{ \max_{-\infty < \omega < \infty} |W_z(j\omega)| \right\},$$

где $|W_z(j\omega)|$ – модуль дробно-рациональной передаточной функции системы; b, a – коэффициенты ее числителя и знаменателя соответственно.

В некоторых частных случаях возможны модификации изложенного подхода: минимизация максимальных по модулю значений вещественной,

мнимой частотных функций, или их комбинаций

$$\min_{a,b=\text{var}} \left\{ \max_{-\infty < \omega < \infty} |\text{Re}(\omega)| \right\} \quad \text{и} \quad \min_{a,b=\text{var}} \left\{ \max_{-\infty < \omega < \infty} |\text{Im}(\omega)| \right\},$$

где $\text{Re}(\omega)$ – вещественная и $\text{Im}(\omega)$ – мнимая составляющие алгебраической формы представления частотной передаточной функции:

$$W_z(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega).$$

Решение задачи. Рассмотрим решение задачи на примере двухмассовой структуры (рисунок 1), характерной для компенсаторов колебаний, подвески автомобиля [2,3] и других подобных технических и технологических устройств и систем. Моделирование режимов работы указанных устройств при произвольных внешних воздействиях (например, профили покрытия дороги) является одной из трудно решаемых задач. Наиболее существенной составляющей моделирования является предварительный выбор оптимальных параметров элементов системы. Для получения решения при определении оптимальных параметров элементов системы прибегают к различного рода упрощениям, что приводит к ограничениям, сужающим спектр решаемых задач.

Одним из возможных путей решения указанной задачи в полном объеме является применение численных методов при наличии данных о параметрах системы и характеристиках, заданных в форме математического описания, либо таблично.

Для нахождения решения необходимо иметь передаточную функцию конкретной системы. Получим передаточную функцию системы подвески автомобиля в удобной для анализа форме.

Передаточная функция. Найдем операторную передаточную функцию для подвески автомобиля, схема которой приведена на рисунке 1,а. Система дифференциальных уравнений [2] описывает поведение подвески

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z} + \lambda_1 (\dot{z} - \dot{y}) + c_1 (z - y) &= 0; \\ m_2 \ddot{y} + \lambda_1 (\dot{y} - \dot{z}) + c_1 (y - z) + \lambda_2 \dot{y} + c_2 y &= \lambda_2 \dot{x} + c_2 x, \end{aligned} \quad (1)$$

где m_1 – масса поддрессоренных частей кг; m_2 – масса неподдрессоренных частей кг; λ_1 – сопротивление амортизаторов Нс/м; λ_2 – затухание в шинах Нс/м; c_1 – жесткость рессор Н/м; c_2 – жесткость шин Н/м.

Представим систему дифференциальных уравнений (1) в нормализованной операторной форме

$$\begin{cases} (p^2 + a_{11}p + c_{11})z(p) = (a_{11}p + c_{11})y(p); \\ (p^2 + (a_{12} + a_{22})p + c_{12} + c_{22})y(p) = (a_{12}p + c_{12})z(p) + (a_{22}p + c_{22})x(p), \end{cases} \quad (2)$$

где $a_{11} = \lambda_1/m_1$; $a_{12} = \lambda_1/m_2$; $a_{22} = \lambda_2/m_2$; $c_{11} = c_1/m_1$; $c_{12} = c_1/m_2$; $c_{22} = c_2/m_2$.

Обозначим $Q_z(p) = p^2 + a_{11}p + c_{11}$;
 $Q_y(p) = p^2 + (a_{12} + a_{22})p + c_{12} + c_{22}$; $R_y(p) = a_{11}p + c_{11}$; $R_z(p) = a_{12}p + c_{12}$;
 $R_x(p) = a_{22}p + c_{22}$.

Тогда система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{cases} Q_z(p)z(p) = R_y(p)y(p), \\ Q_y(p)y(p) = R_z(p)z(p) + R_x(p)x(p). \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) позволяет получить передаточные функции, описывающие поведение кузова $W_z(p) = \frac{z(p)}{x(p)}$ и колеса $W_y(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$ автомобиля, в виде

$$W_z(p) = \frac{R_x(p)R_y(p)}{Q_z(p)Q_y(p) - R_z(p)R_y(p)}, \quad (4)$$

$$W_y(p) = \frac{R_x(p)Q_z(p)}{Q_z(p)Q_y(p) - R_z(p)R_y(p)}.$$

Выражения (4) дают возможность производить комплексные исследования подвески во временной и частотной областях, а также перемещения кузова и неподдрессоренной части отдельно при допущении линейности системы.

Алгоритмическая модель подвески автомобиля в соответствии с уравнениями (1)-(4) представлена средствами математического пакета MAPLE-6 (MIN-z-MAX.mws) в заданном диапазоне частот $\omega_{\min} - \omega_{\max}$. В качестве примера реализована процедура минимизации максимального значения амплитуды частотной характеристики при изменении частоты в бес-

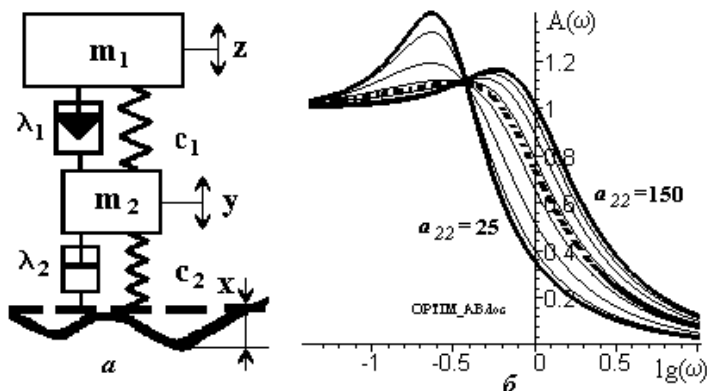


Рисунок 1–Подвеска автомобиля: а–схема, б–семейство ЛАЧХ

конечных пределах ($\omega = -\infty \dots \infty$) по параметру a_{22} . Семейство частотных характеристик при $\omega_{\min}=0,05$ и $\omega_{\max}=10$ рад/с показано на рисунке 1,б. Штриховой линией нанесена ЛАЧХ для $a_{22}=93,6$, соответствующего минимальному значению максимума ЛАЧХ.

Поверхность ЛАЧХ, полученная введением развертки в семействе ЛАЧХ по параметру a_{22} в указанном диапазоне частот, показана на рисунке 2. Утолщенной линией показана ЛАЧХ (соответствующая штриховой на рисунке 1,б) при значении $a_{22}=93,6$, найденном с помощью процедуры минимакса. На рисунке 3 изображена кривая изменения максимального значения ЛАЧХ при изменении параметра подвески a_{22} , испытывающая минимум максимального уровня при значении $a_{22}=93,6$.

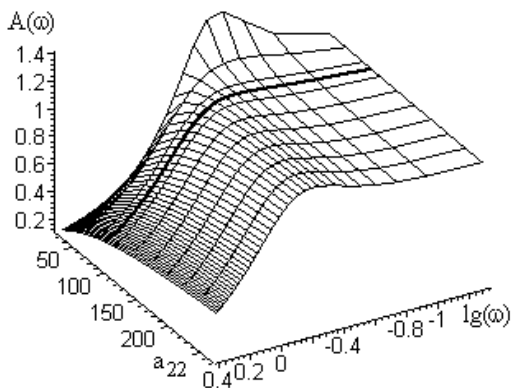


Рисунок 2—Поверхность ЛАЧХ

Если система нелинейна, то выполнить ее исследования в частотной области можно, например, по дискретным значениям переходной характеристики $Y(t)$, т.е.

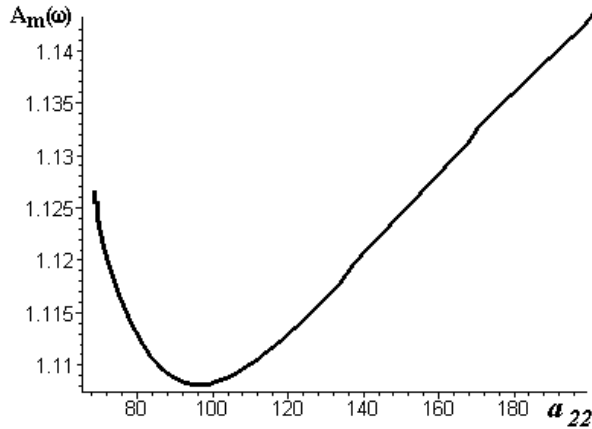


Рисунок 3 – Результат оптимизации

$$\operatorname{Re}(\omega) \approx Y(0) + \sum_{i=1}^m \cos(\omega t_i) \cdot \Delta Y(t_i);$$

$$\operatorname{Im}(\omega) \approx \sum_{i=1}^m \sin(\omega t_i) \cdot \Delta Y(t_i),$$

где $\Delta Y(t_i) = Y(t_i) - Y(t_{i-1})$.

Для получения частотных характеристик в этом случае необходимо иметь переходную характеристику, которая для нелинейной системы может быть найдена одним из численных методов. Представим решение системы уравнений (2) в рекурсивной форме [4]

$$\begin{aligned} z(p) &= \frac{a_{11}(y(p) - z(p))}{p} + \frac{c_{11}(y(p) - z(p))}{p^2}; \\ y(p) &= \frac{a_{12}(z(p) - y(p)) + a_{22}(x(p) - y(p))}{p} + \\ &+ \frac{c_{12}(x(p) - y(p)) + c_{22}(x(p) - y(p))}{p^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученные выражения изображений сигналов (5) позволяют найти на основании теоремы о среднем решение в рекуррентной форме

$$\begin{aligned} z(k) &= z(k-1) + (a_{11}(y(k) - z(k-1)) + c_{11}z_1(k))h; \\ y(k) &= y(k-1) + (a_{12}(z(k) - y(k-1)) + a_{22}(x(k) - y(k-1)) + y_1(k))h, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} z_1(k) &= z_1(k-1) + (y(k) - z(k))h, \\ y_1(k) &= y_1(k-1) + (c_{12}(z(k) - y(k)) + c_{22}(x(k) - y(k)))h, \end{aligned} \quad k - \text{номер шага (}$$

$k = [0; z]$, $k = t_0 / h$, t_0 – время процесса, z – число шагов ($z = t_0 / h$), h – величина шага.

Опишем нелинейность, обусловленную наличием амортизатора, приняв следующее:

$$\lambda_1 = \beta \left(1 + \left| \alpha \dot{z}(t) \right| \right);$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } \dot{z}(t) < 0; \\ \alpha_2 & \text{при } \dot{z}(t) \geq 0. \end{cases}$$

Положив $\beta = 1/m_1$, получим $a_{11} = \lambda_1 \left(1 + \left| \alpha \dot{z}(t) \right| \right) / m_1$.

При моделировании средствами математического пакета MAPLE-6 описания реакции кузова и колеса (6) представлены в рекурсивной форме

$$\begin{aligned} z &= z + (a_{11}(y - z) + c_{11}z_1)h; \\ z_1 &= z_1 + (y - z)h; \\ y &= y + (a_{12}(z - y) + a_{22}(x - y) + y_1)h; \\ y_1 &= y_1 + (c_{12}(z - y) + c_{22}(x - y))h. \end{aligned}$$

Решение задачи с учетом нелинейности системы позволило получить частотные характеристики, представленные на рисунке 4, где тонкими линиями показаны характеристики линейной системы.

По изложенному методу могут быть найдены любые из приведенных параметров произвольной системы, например, технологической, в заданном диапазоне их изменений. В качестве перспективной задачи для дальнейших исследований необходимо рассмотреть оптимизацию параметров многомассовой динамической системы.

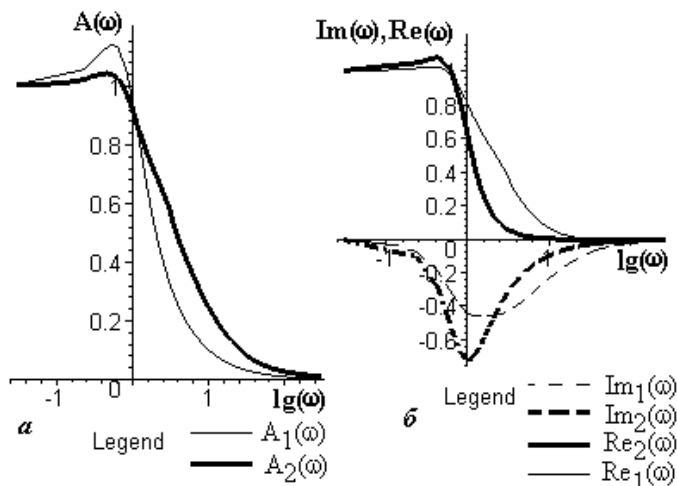


Рисунок 4 – Частотные характеристики подвески автомобиля

Библиографический список

1. Гостев В.И. Оптимальные системы управления с цифровыми регуляторами: Справочник / В.И. Гостев, В.К. Стеклов, С.Н. Скляренко.— К.: Изд-во КИРЦ «Сенс», 1995. — 484 с.
2. Говорущенко Н.Я. Системотехника транспорта (на примере автомобильного транспорта). Ч. 1. / Н.Я. Говорущенко, А.Н. Туренко. — Харьков: РИО ХГАДТУ, 1998. — 255 с.
3. Левитский Н.И. Колебания в механизмах: Учеб. пособие для вузов / Н.И. Левитский. — М.: Наука, 1988. — 336 с.
4. Долгин В.П. Метод построения рекуррентного алгоритма имитации непрерывного динамического объекта / В.П. Долгин // Электронное моделирование. — 2001. — Т. 23. — № 1. — С. 14–31.

Поступила в редакцию 23.06.2003 г.