

УДК 681.511

А.Т. Барабанов, проф., д-р техн. наук

Е.В. Лазарева

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача построения оптимального регулятора для линейного объекта с переменными состояниями и управления непрерывными почти всюду на конечном интервале за исключением заданного множества меры нуль. Рассматривается вопрос существования решения задачи и предлагается способ её решения.

Современное развитие техники обуславливает появление сложных объектов, требующих присутствия в системе управления цифровых измерительных и управляющих устройств. В ряде случаев, особенно при достаточно больших периодах квантования по времени, переход к однородному описанию в виде разностных уравнений неадекватен. Поэтому, в некоторых случаях требуется рассматривать «гибридные» системы управления, имеющие как непрерывные, так и дискретные свойства. Одним из видов моделей, учитывающих дискретный характер цифровой техники и непрерывный характер объекта управления, являются непрерывно-дискретные модели, которые представляют собой системы дифференциальных и разностных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n(t), & t \in I \setminus \theta, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t-0) + \mathbf{B}_o \mathbf{u}_o(t), & t \in \theta.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{u}_n \in R^{m_n}$; $\mathbf{u}_o \in R^{m_o}$; $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{A}_o$ и $\mathbf{B}_o$ – матрицы соответствующих размерностей; $I = [0, \infty)$; $\theta = \{t_k : t_k = kh, h > 0, k = 1, 2, \dots\}$.

Решениями таких «гибридных» систем являются кусочно-непрерывные функции, которые на конечных интервалах времени удовлетворяют дифференциальным уравнениям системы, а в заданные моменты t_k претерпевают разрывы первого рода в соответствии с конечно-разностными уравнениями.

Следует отметить, что дискретный характер описания системы (1) может обуславливаться не только присутствием в системе цифровых управляющих и измерительных устройств, но и свойствами самой системы. В частности, уравнениями такого вида при некоторых допущениях описывается движение шагающих аппаратов.

Постановка задачи. При проектировании систем подобного класса возникают различные задачи синтеза САУ. Например, задача построения оптимального управления по линейно-квадратическому критерию качества [1, 2] и, в частности, задача построения оптимального стабилизирующего регулятора. В этой задаче требуется построить регулятор вида

$$\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{C}_n(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}_d(t_k) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(t_k - 0), \quad (2)$$

стабилизирующий систему (1), т.е. так чтобы замкнутая непрерывно-дискретная система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n\mathbf{C}_n(t)] \cdot \mathbf{x}(t), \quad t \in I \setminus \theta, \\ \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{C}_d] \cdot \mathbf{x}(t - 0), \quad t \in \theta \end{aligned} \quad (3)$$

была асимптотически устойчива при любых начальных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, а функционал качества

$$\begin{aligned} J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_n^T(t) \mathbf{R}_n \mathbf{u}_n(t) \} dt + \\ + \sum_{k=1}^l \{ \mathbf{x}^T(t_k - 0) \mathbf{Q}_d \mathbf{x}(t_k - 0) + \mathbf{u}_d^T(t_k) \mathbf{R}_d \mathbf{u}_d(t_k) \}. \end{aligned}$$

где $\mathbf{Q}_n$ и $\mathbf{Q}_d$ – неотрицательно определённые матрицы; $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_d$ – положительно определённые матрицы, достигал минимального значения.

Существует ряд работ, в которых рассматриваются подобные задачи. Например, в [3] решается аналогичная задача при условии, что $\det \mathbf{A}_d \neq 0$. Однако свойством вырожденности матрицы $\mathbf{A}_d$ обладает целый ряд систем, подходящих под описание в виде непрерывно-дискретной модели. В частности, САУ движением антропоморфного шагающего аппарата или системы, имеющие запаздывания в обработке управляющего сигнала или измерения. С другой стороны, известны труды (например, [4], где есть дальнейшие ссылки), посвящённые решению алгебраического дискретного уравнения Риккати, в которых допускается условие $\det \mathbf{A}_d = 0$. Однако в них не учитываются непрерывные свойства системы и наличие непрерывной обратной связи $\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{C}_n(t)\mathbf{x}(t)$. Из вышесказанного вытекает необходимость расширения известных результатов на класс непрерывно-дискретных систем с вырожденными матрицами $\mathbf{A}_d$.

Теорема. Для того чтобы задача оптимизации имела решение при любых начальных условиях (т.е. оптимальное управление существовало при любом $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$) необходимо и достаточно, чтобы непрерывно-дискретная система (1) была стабилизируемой. Тогда оптимальный процесс доставляется регулятором

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(t) &= -\mathbf{R}_h^{-1}\mathbf{B}_h^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{u}_\theta(k) &= -\left(\mathbf{R}_\theta + \mathbf{B}_\theta^T\mathbf{P}(t_k)\mathbf{B}_\theta\right)^{-1}\mathbf{B}_\theta^T\mathbf{P}(t_k)\mathbf{A}_\theta\mathbf{x}(t_k - 0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{P}(t)$ – h -периодическая симметрическая матричная функция $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)^T = \mathbf{P}(t + h)$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}_h^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_h + \mathbf{Q}_h - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}_h\mathbf{R}_h^{-1}\mathbf{B}_h^T\mathbf{P}(t) = \mathbf{0}, & t \in I \setminus \theta, \\ \mathbf{P}(t - 0) = \mathbf{Q}_\theta + \mathbf{A}_\theta^T\mathbf{P}(t)\mathbf{A}_\theta - \mathbf{A}_\theta^T\mathbf{P}(t)\mathbf{B}_\theta\left(\mathbf{R}_\theta + \mathbf{B}_\theta^T\mathbf{P}(t)\mathbf{B}_\theta\right)^{-1}\mathbf{B}_\theta^T\mathbf{P}(t)\mathbf{A}_\theta, & t \in \theta. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание 1. Вопрос о проверке стабилизируемости системы не входит в рамки данной статьи и должен быть рассмотрен отдельно.

Замечание 2. Так как $\mathbf{P}(t)$ – h -периодическая матричная функция, то в дискретные моменты $t_k \in \theta$ матрица $\mathbf{P}(t_k) = \mathbf{P}(t_k + h) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\mathbf{P}}$ постоянна и не зависит от такта k . Очевидно, что матрица $\left(\mathbf{R}_\theta + \mathbf{B}_\theta^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}_\theta\right)^{-1}\mathbf{B}_\theta^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A}_\theta$, определяющая обратную связь в дискретные моменты времени, также постоянна и не зависит от k .

Д о с т а т о ч н о с т ь . Допустим, что система (1) является стабилизируемой. Тогда можно построить регулятор вида (2), благодаря которому замкнутая система (3) становится асимптотически устойчивой. При $t_f \rightarrow \infty$ значение функционала $J(t_f)$ сходится к конечному числу, которое представляет собой верхнюю границу для минимальной величины критерия. Можно показать, что минимальное значение $J(t_f)$ является монотонно неубывающей функцией t_f (также, как и соответствующие аналоги для непрерывных или дискретных стационарных систем). Это доказывает, что минимальная величина $J(t_f)$ имеет предел при $t_f \rightarrow \infty$. Следовательно, если система (1) стабилизируема, то задача оптимизации имеет решение при любых начальных условиях, и достаточность условия теоремы доказана.

Покажем, что если решение задачи оптимизации существует, то это – h -периодическая симметрическая матричная функция, удовлетворяющая системе уравнений (5).

Так как на интервалах непрерывности изменение матрицы $\mathbf{P}$ описывается одними и теми же уравнениями, то для всех k выполняется условие

$$\mathbf{P}(t_k) = \mathbf{P}(t_k + h) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\mathbf{P}}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Покажем, что $\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}(t_1 + h)$. Пусть $\mathbf{P}(t_1) = \bar{\mathbf{P}}$ – решение задачи оптимизации в точке t_1 при $t_f \rightarrow \infty$. Найдём матрицу $\mathbf{P}'(t)$ – решение задачи оптимизации при $t'_f = t_f + h$. Так как $t_f \rightarrow \infty$, то и $t'_f \rightarrow \infty$. Следовательно, $\mathbf{P}'(t_1) = \bar{\mathbf{P}}$.

С другой стороны, так как (1) – система с h -периодическими коэффициентами, то $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t+h)$ и $\mathbf{P}(t_1+h) = \mathbf{P}'(t_1) = \bar{\mathbf{P}}$. Следовательно, $\mathbf{P}(t_1+h) = \mathbf{P}(t_1)$ и выполняется условие (6).

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_n - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{B}_n^T \mathbf{P}(t) = \mathbf{0}, & t \in [t_k; t_{k+1}), \\ \mathbf{P}(t_k - 0) = \mathbf{Q}_\partial + \mathbf{A}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{A}_\partial - \mathbf{A}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{B}_\partial \times \\ \quad \times (\mathbf{R}_\partial + \mathbf{B}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{B}_\partial)^{-1} \mathbf{B}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{A}_\partial, & t_k \in \Theta, \\ \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}. \end{cases} \quad (7)$$

Можно показать [1, 2], что управления (4), определяемые через $\mathbf{P}(t)$ из (7), задают оптимальное управление системой. С другой стороны, система уравнений (5) является частным случаем системы (7) (при $t_f \rightarrow \infty$ и с дополнительными условиями (6) и $\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Следовательно, если $\mathbf{P}(t)$ – решение системы уравнений (5), то она также задаёт оптимальный регулятор через формулы (4).

Условие $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)^T$ доказывается транспонированием системы уравнений (5) с учётом симметричности матриц $\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{Q}_\partial$, $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_\partial$.

Необходимость. Если задача имеет решение, то существуют матрицы

$$\mathbf{C}_n(t) = -\mathbf{R}_n^{-1}(t) (\mathbf{B}_n^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{N}_n(t)) \quad \text{и}$$

$\mathbf{C}_\partial = -(\mathbf{R}_\partial + \mathbf{B}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{B}_\partial)^{-1} (\mathbf{B}_\partial^T \mathbf{P}(t_k) \mathbf{A}_\partial + \mathbf{N}_\partial)$, определяемые через h -периодическую симметрическую матричную функцию $\mathbf{P}(t)$ из (5), такие что замкнутая непрерывно-дискретная система (3) является асимптотически устойчивой, т.е. система (1) является стабилизируемой и теорема доказана.

Рассмотрим способ вычисления матрицы $\bar{\mathbf{P}}$. Добавляя вектор сопряжённых переменных $\boldsymbol{\Psi}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$, систему (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{B}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{B}_n^T \\ -\mathbf{Q}_n & -\bar{\mathbf{A}}_n^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\Psi}(t) \end{bmatrix}, & t \in I \setminus \Theta, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\partial^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k) \\ \boldsymbol{\Psi}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\partial & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_\partial & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k - 0) \\ \boldsymbol{\Psi}(t_k - 0) \end{bmatrix}, & t_k \in \Theta. \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы (8) в дискретные моменты времени определяется уравнением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\partial^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k) \\ \boldsymbol{\Psi}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\partial & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_\partial & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Z}_n \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_{k-1}) \\ \boldsymbol{\Psi}(t_{k-1}) \end{bmatrix}, \quad t \in \Theta, \quad (9)$$

где $\mathbf{Z}_n = \exp\{h \cdot \mathbf{H}_n\}$, $\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{B}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{B}_n^T \\ -\mathbf{Q}_n & -\mathbf{A}_n^T \end{bmatrix}$.

Искомое решение выражается через собственные векторы $\mathbf{a}_i$ обобщённой задачи на собственные значения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\partial & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_\partial & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Z}_n \mathbf{a}_i = \mu_i \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\partial^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_i, \text{ в которой } \mu_i \text{ являются}$$

корнями характеристического уравнения

$$\det \left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\partial & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_\partial & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Z}_n - \mu \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\partial^T \end{bmatrix} \right] = 0. \quad (10)$$

Можно показать, что корни μ_i характеристического уравнения (10) симметричны относительно окружности единичного радиуса.

Если $\mathbf{A}_\partial$ — невырожденная матрица, то существует матрица

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T (\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \end{bmatrix}, \text{ и уравнение (9) можно свести к более простому}$$

виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k) \\ \Psi(t_k) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_{k-1}) \\ \Psi(t_{k-1}) \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\partial + \mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T (\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \mathbf{Q}_\partial & -\mathbf{B}_\partial \mathbf{R}_\partial^{-1} \mathbf{B}_\partial^T (\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \\ (\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \mathbf{Q}_\partial & (\mathbf{A}_\partial^T)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Z}_n.$$

В этом случае корни характеристического уравнения (10) одновременно являются собственными числами матрицы $\mathbf{H}$. Дальнейший поиск матрицы $\bar{\mathbf{P}}$ эквивалентен решению алгебраического дискретного уравнения Риккати. Подобный случай рассмотрен в [3].

Если же матрица A_0^{-1} не существует или матрица A_0 плохо обусловлена, то процедура поиска решения состоит в нахождении ортогональных матриц W и U , таких, что WH_1U и WH_2U являются верхними блочно-треугольными матрицами. Блоки, стоящие на диагоналях этих матриц должны быть упорядочены так, что в верхнем левом углу располагаются блоки, соответствующие устойчивым собственным значениям ($|\mu_i| < 1$). Тогда стабилизирующее решение системы уравнений (5) в дискретные моменты выражается через блоки матрицы $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$:

$$P(t_k) = \bar{P} = U_{21}U_{11}^{-1}.$$

Как доказывалось выше, h -периодическая матрица $P(t)$, удовлетворяющая системе уравнений (5) и задающая оптимальное управление, определяется дифференциальным уравнением Риккати:

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = -A_n^T P(t) - P(t)A_n - Q_n + P(t)B_n R_n^{-1} B_n^T P(t), & t \in I \setminus \theta, \\ P(t_k) = \bar{P}, & t_k \in \theta. \end{cases}$$

поэтому, достаточно проинтегрировать это уравнение на интервале времени длиной h с начальным условием в точке $t_k \in \theta$ (например, на интервале $t \in [t_1; t_1 + h)$, при $P(t_1) = \bar{P}$, $t_1 \in \theta$), а затем продолжить решение на всю временную ось с учётом периодичности матрицы ($P(t + kh) = P(t)$).

Построение оптимального регулятора для простейшей модели антропоморфного шагающего аппарата. В качестве примера, рассмотрим решение задачи синтеза оптимальной САУ антропоморфным шагающим аппаратом (ША). ША рассматривается как трехзвенник [5]. В течение k -го шага ($t_k \leq t < t_{k+1}$) начало системы координат совпадает с центром тяжести опорной ноги. Рассматривается плоское движение, т.е. вопросы вертикальной стабилизации не рассматриваются и полагается, что аппарат движется горизонтально вдоль оси x . Управление осуществляется моментами μ_1 и μ_2 ($u'_n = [\mu_1, \mu_2]$): μ_1 – момент между корпусом и опорной ногой, μ_2 – между корпусом и переносимой ногой. В качестве вектора состояния системы приняты следующие переменные: x_1 – координата точки подвеса ног, $x_2 = \dot{x}_1$, x_3 – смещение центра тяжести корпуса относительно точки подвеса ног, $x_4 = \dot{x}_3$, x_5 – координата конца переносимой ноги, $x_6 = \dot{x}_5$. Предполагается, что в течение k -го шага (период опирания на одну ногу) изменение

вектора $\mathbf{x}$ с достаточной точностью можно описать линейной системой дифференциальных уравнений.

В моменты смены опорной ноги происходит скачкообразное изменение фазовых координат аппарата, которое можно отразить в виде линейной системы разностных уравнений $\mathbf{x}(t_k + 0) = \mathbf{A}_\theta \mathbf{x}(t_k - 0)$,

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому поведение шагающего аппарата приближённо может быть описано с помощью системы дифференциальных и разностных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n(t), \quad t \in I \setminus \theta,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_\theta \mathbf{x}(t - 0) + \mathbf{B}_\theta \mathbf{u}_\theta(t), \quad t \in \theta.$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6$; $\mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^2$; $\mathbf{u}_\theta \in \mathbf{R}^1$; $I = [0, \infty)$;

$\theta = \{t_k : t_k = kh; h = 0.5 \text{ сек}; k = 1, 2, 3, \dots\}$; $\mathbf{B}_\theta = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.6951 & 0 & -21.4864 & 0 & 1.2782 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.9541 & 0 & 23.2017 & 0 & -0.4624 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5227 & 0 & 10.7746 & 0 & -14.0313 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.9091 & 0.9091 \\ 0 & 0 \\ 18.9036 & 18.9036 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.9091 \end{bmatrix}.$$

Для функционала качества

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \right\} dt$$

(т.е. $\mathbf{Q}_c = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_c = \mathbf{I}_{m_c}$, $\mathbf{Q}_d = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_d = \mathbf{I}_{m_d}$) с помощью разработанной нами программы было вычислено значение h -периодической матрицы $\mathbf{P}(t)$ в момент времени $t_1 \in \Theta$:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.6379 & 0.1817 & -0.9461 & -0.0852 & 0.0765 & -0.0235 \\ 0.1817 & 0.0522 & -0.2613 & -0.0222 & 0.0219 & -0.0068 \\ -0.9461 & -0.2613 & 1.5623 & 0.1665 & -0.1112 & 0.0325 \\ -0.0852 & -0.0222 & 0.1665 & 0.0215 & -0.0096 & 0.0025 \\ 0.0765 & 0.0219 & -0.1112 & -0.0096 & 0.0092 & -0.0029 \\ -0.0235 & -0.0068 & 0.0325 & 0.0025 & -0.0029 & 0.0009 \end{bmatrix}.$$

Выполнено моделирование поведения системы. Графики зависимости координат $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $x_5(t)$, а также скоростей их изменения $\dot{x}_2(t)$, $\dot{x}_4(t)$ и $\dot{x}_6(t)$ от времени t при начальных значениях

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_4(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ приведены на рисунке.}$$

Выводы. Таким образом, результаты работы показывают, что для стабилизируемой непрерывно-дискретной системы (1) всегда можно построить оптимальный регулятор, задаваемый периодической матричной функцией, которая определяется как решение системы непрерывного и дискретного уравнений Риккати. Способы решения такой системы похожи на известные методы решения дискретных алгебраических уравнений Риккати и могут быть реализованы программно. Полученный результат позволяет значительно упростить решение задачи синтеза оптимального регулятора для непрерывно-дискретных систем по линейно-квадратическому критерию качества.

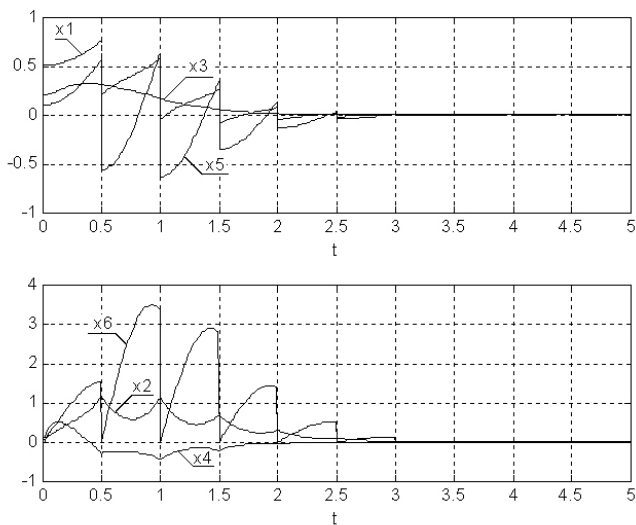


Рисунок – Моделирование поведения оптимальной системы

Библиографический список

1. Барабанов А.Т. Линейные модели и оптимизация непрерывно-дискретных динамических систем / А.Т. Барабанов, Г.А. Агранович // Динамические системы. — 1983. — Вып. 2. — С. 17–24.
2. Барабанов А.Т. Построение оптимального управления линейной непрерывно-дискретной системой методом полного квадрата / А.Т. Барабанов, Е.В. Лазарева // Вестн. СевГТУ. — 2003. — Вып. 49. — С. 12–19.
3. Старожилов Е.Ф. Об оптимальной стабилизации линейных непрерывно-дискретных систем управления / Е.Ф. Старожилов // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1999. — Вып. 2. — С. 149–154.
4. Ларин В.Б. Методы решения алгебраических уравнений Риккати / В.Б. Ларин // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1983. — № 2. — С. 186–199.
5. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами / В.Б. Ларин. — К.: Наук. думка, 1980. — 168 с.

Поступила в редакцию 12.01.2004 г.