

УДК 681.511

В.С. Кудашев, аспирант; Ф.Д. Пряшников, проф, д-р техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Предлагается метод определения вещественных корней полиномиальных уравнений одной неизвестной в задачах оптимизации систем автоматического управления по критериям качества. Предложена модификация, значительно ускоряющая сходимость метода.

Рассматривается линейная система автоматического управления с передаточной функцией $W(s, \lambda) = \frac{B(s, \lambda)}{A(s, \lambda)}$, в которой коэффициенты числителя и знаменателя полиномиально зависят от параметра λ . Задача оптимизации такой системы по критериям качества (время регулирования, перерегулирование, запасы устойчивости и другие) решается на множестве значений параметра λ , для которых удовлетворяются требования по устойчивости и качеству.

Цель работы – предложить метод решения границ областей устойчивости и качества системы автоматического управления, обладающий малой погрешностью.

Данная задача, в основном, решается для определения областей устойчивости при линейной зависимости коэффициентов передаточной функции от варьируемого параметра (например, Д-разбиение). Предлагается метод, позволяющий решать задачу определения границ областей устойчивости и заданного качества для полиномиальной зависимости коэффициентов передаточной функции от λ .

Существует метод [1] определения вещественных корней функции $a(x)$ при $x > 0$, если функция представима в виде

$$a(x) = \sum_{i=0}^n \delta_i(x),$$

причем для любых x_1 и x_2 , $0 < x_1 \leq x_2$, каждая из функций $\delta_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ непрерывна и дифференцируема и либо не возрастает, либо не убывает. Это означает, что для отрезка $[x_1; x_2]$ каждая из функций $\delta_i(x)$ на одном конце принимает наибольшее значение $\delta_{\max i}$, а на другом – наименьшее значение $\delta_{\min i}$. Следует отметить, что $a(x) \not\equiv \text{const}$.

Для такой функции $a(x)$ можно формулировать достаточное условие отсутствия вещественных корней на отрезке. Тогда процесс нахождения вещественных корней функции сведется к следующей последовательности:

- 1) определяется исходный отрезок $[x_0; x_0 + \Delta]$, где $x_0, \Delta > 0$, на котором ищутся вещественные корни;
- 2) отрезок делится на меньшие отрезки до тех пор, пока на них не выполнится либо достаточное условие отсутствия корней, либо отрезок не будет принят за точку, причем в этом случае нужно проверить, является ли полученная точка корнем.

Данный метод позволяет определить все вещественные корни функции $a(x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + \Delta]$. Однако для использования метода необходимо вывести достаточное условие отсутствия корней на отрезке и доказать, что всякий отрезок, не имеющий корней, может быть за конечное число делений разбит на более мелкие отрезки, в каждом из которых будет выполняться это достаточное условие.

Для отрезка $[x_1; x_2]$, где $0 < x_1 \leq x_2$, для каждой из функций $\delta_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, справедливы следующие равенства:

$$\delta_{\min i} = \begin{cases} \delta_i(x_1), & \text{если } \delta_i(x_1) < \delta_i(x_2), \\ \delta_i(x_2), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\delta_{\max i} = \begin{cases} \delta_i(x_1), & \text{если } \delta_i(x_1) > \delta_i(x_2), \\ \delta_i(x_2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть

$$\delta_{\min} = \sum_{i=0}^n \delta_{\min i}, \quad \delta_{\max} = \sum_{i=0}^n \delta_{\max i}.$$

Тогда для $a(x)$ на $[x_1; x_2]$ справедливо неравенство

$$\delta_{\min} \leq a(x) \leq \delta_{\max}.$$

Достаточным условием отсутствия вещественных корней на отрезке будет являться

$$\begin{aligned} \delta_{\min}^{\text{н}} &> 0, \\ \delta_{\max}^{\text{к}} &< 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Представим $a(x)$ в виде $a(x) = u(x) - v(x)$, где $u(x) \geq 0, v(x) \geq 0$ на $[x_1; x_2]$. Отсюда

$$\begin{cases} \delta_{\max} = u(x_2) - v(x_1), \\ \delta_{\min} = u(x_1) - v(x_2). \end{cases} \tag{2}$$

Лемма 1. Для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что на отрезке $[x_1; x_1 + \varepsilon]$ будет выполняться неравенство

$$\delta_{\max} \leq \delta_{\min} + \delta.$$

Действительно, в точке $x = x_1$ (т.е. $\varepsilon = 0$) $\delta_{\max} = \delta_{\min}$. Далее, по мере увеличения ε , вследствие $a(x) \text{ No. const}$, будет либо увеличиваться $\delta_{\min}$, либо увеличиваться $\delta_{\max}$, так как, по крайней мере, либо $u(x) \text{ No. const}$, либо $v(x) \text{ No. const}$.

Теорема 1. Любой отрезок, не имеющий вещественных корней, можно разбить за конечное число операций деления на меньшие отрезки, в каждом из которых выполнится условие (1).

Для доказательства рассмотрим отрезок $[x_1; x_1 + \Delta]$. Пусть на нем отсутствуют вещественные корни и не выполняется достаточное условие отсутствия корней (1). Это значит, что $\delta_{\max} > 0$, а $\delta_{\min} > 0$. Подберем такое $\varepsilon > 0$, что на $[x_1; x_1 + \varepsilon]$, если $\delta_{\max} > 0$, то для $\delta_{\min} = \delta_{\max} - \delta$ будет выполняться неравенство $\delta_{\min} > 0$, либо, если $\delta_{\min} < 0$, то для $\delta_{\max} = \delta_{\min} + \delta$ справедливо $\delta_{\max} < 0$. Это можно сделать по лемме 1, учитывая, что если бы значение x_1 было корнем $a(x)$, то для него выполнялось бы равенство $\delta_{\min} = \delta_{\max} = 0$. Тогда на $[x_1; x_1 + \varepsilon]$ будет выполнено (1). Аналогично рассматривается оставшийся отрезок $[x_1 + \varepsilon; x_1 + \Delta]$ до тех пор, пока он не будет разбит последовательно на отрезки, в каждом из которых выполняется (1). Таким образом, теорема доказана.

Для многочлена

$$a(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

можно принять при $x > 0, i = \overline{0, n}$, что

$$\delta_i(x) = a_i x^i.$$

В этом случае при $a_i \geq 0$ $\delta_i(x)$ не убывает, а при $a_i \leq 0$ $\delta_i(x)$ не возрастает.

Данный метод отыскания вещественных корней многочлена обладает, по сравнению с существующими методами, следующими преимуществами:

- 1) не требуется преобразования многочлена, что уменьшает ошибки округления и повышает численную устойчивость;
- 2) не требуется построение дополнительной полиномиальной системы, что ускоряет расчеты и позволяет более экономно расходовать память;
- 3) нет необходимости в определении числа вещественных корней на отрезке, что не требует использования различных алгоритмов для отделе-

ния корней и их уточнения; все корни ищутся при помощи однотипных простых операций.

Однако метод обладает существенным недостатком: он имеет медленную сходимость к корням.

Предлагается модификация метода для ускорения его сходимости.

Пусть

$$a(x) = u(x) - v(x),$$

где

$$u(x) = \sum_{i=0}^r u_i x^i, \quad v(x) = \sum_{i=0}^s v_i x^i,$$

причем

$$u_i \geq 0, i = \overline{0, r}; v_i \geq 0, i = \overline{0, s}. \quad (3)$$

Условие (1) с учетом (2) можно записать в виде

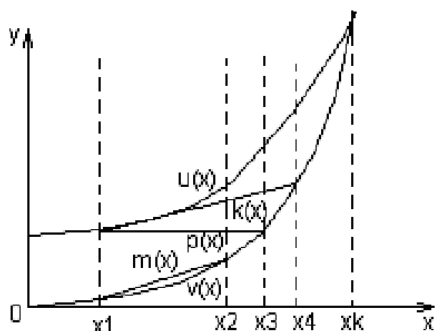


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация достаточного условия отсутствия вещественных корней на отрезке

$$\begin{aligned} u(x_1) &> v(x_2), \\ \bigcap_{k=1}^K v(x_1) &> u(x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Первое и второе неравенства в (4) означают, по сути, одно и то же, только первое неравенство может выполняться при $u(x_1) > v(x_1)$, а второе – при $v(x_1) > u(x_1)$. Пусть, для определенности, будем всегда полагать, что

$$u(x_1) > v(x_1). \quad (5)$$

Для ситуации $v(x_1) > u(x_1)$ все нижесказанное также остается в силе, если поменять обозначения между u и v , так как уравнение $a(x) = 0$ можно записать не только как $u(x) - v(x) = 0$, но и как $v(x) - u(x) = 0$.

Следует также отметить, что ввиду условия (3), все производные функций $u(x)$ и $v(x)$ при $x > 0$ неотрицательны.

Для дальнейших рассуждений будем использовать геометрическую интерпретацию задачи нахождения вещественных корней многочлена. Для этого воспользуемся декартовой системой координат, по оси абсцисс которой будем откладывать значения аргумента x , а по оси ординат – значения функций $u(x)$ и $v(x)$ (рисунок 1). В этом случае корнем многочлена являют-

ся такие значения абсцисс, при которых графики функций $u(x)$ и $v(x)$ пересекаются (значения x_k на рисунке 1).

Условие (4) при выполнении (5) можно интерпретировать для $x \in [x_1; x_2]$ как то, что $p(x)$ лежит выше $v(x)$ ($p(x) = u(x_1)$).

Для упрощения доказательства нижеследующих лемм и теоремы необходимо будет смещать начало координат на d единиц влево по оси x и на k единиц вниз по оси y , что для функций $u(x)$ и $v(x)$ равнозначно введению в тех же координатах вспомогательных функций

$$u_1(x) = u(x + d) + k \text{ и } v_1(x) = v(x + d) + k.$$

Лемма 2. Взаимное расположение точек $((x + r_1); u_1(x + r_1))$ и $((x + r_2); v_1(x + r_2))$ такое же, как и взаимное расположение точек $((x + d + r_1); u(x + d + r_1))$ и $((x + d + r_2); v(x + d + r_2))$.

Действительно, разности одноименных координат для первой пары точек равны разностям одноименных координат второй пары точек.

Случай для $d = x_1$ и $k = -v(x_1)$ показан на рисунках 2 и 3, причем

$$x_0 = x_2 - x_1.$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=n_1}^{n_2} f_i x^i; \quad f_i \geq 0; \quad i = \overline{n_1, n_2}; \quad n_1 \leq n_2; \quad f_{n_1} \neq 0; \quad f_{n_2} \neq 0.$$

Пусть также

$$g(x) = g_{n_1} x^{n_1} \text{ либо } g(x) = g_{n_2} x^{n_2}.$$

Лемма 3. Многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$ на $x \in (0; \infty)$ имеет не более одного вещественного корня.

Пусть для определенности $g(x) = g_{n_2} x^{n_2}$ (для $g(x) = g_{n_1} x^{n_1}$ лемма

доказывается аналогично). Поскольку в системе коэффициентов $f(x)$ нет ни одной перемены знаков, то $f(x)$ на $(0; \infty)$ не имеет по теореме Декарта [2] ни одного вещественного корня. Если $g_{n_2} \leq f_{n_2}$, то $h(x)$ также не имеет на $(0; \infty)$ вещественных корней. При $g_{n_2} \geq f_{n_2}$ в системе коэффициентов $h(x)$ будет ровно одна перемена знаков, что по теореме Декарта

Рисунок 2 – К доказательству теоремы 2

Рисунок 3 – К доказательству леммы 4

означает наличие на $(0; \infty)$ одного вещественного корня. Таким образом, лемма доказана.

Следствие из леммы 3. Если $f(x_1) \geq g(x_1)$, то при $0 \leq x_1 < x_2$ $f(x) \geq g(x)$ тогда, когда либо $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} > \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_1}$ и $f(x_2) \geq g(x_2)$, либо $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_1}$ и $f(x_2) > g(x_2)$.

Это следует из того факта, что $h(x_1) \geq 0$, и при $h(x_1) > 0$ $h(x)$ в точке $x = x_1$ не убывает, а при $h(x_1) = 0$ $h(x)$ в точке $x = x_1$ возрастает; при этом значение $h(x) = 0$ при $x > x_1 \geq 0$ функция может принять только один раз (по лемме 3), а если $h(x_2) \geq 0$, то $h(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.

Пусть имеется функция

$$v(x) = v_0 + v_1 x + \dots + v_s x^s; \quad v_i \geq 0; \quad i = \overline{0, s}.$$

Введем функцию $v_1(x) = v(x + x_1) - v(x_1)$ (рисунок 3).

Лемма 4. Для некоторой точки $x = x_0$ функция $v_1(x)$ при $x > 0$ лежит не ниже касательной к ней в точке $x = 0$ и не выше хорды, соединяющей точки $v_1(0)$ и $v_1(x_0)$.

На рисунке 3 касательная – это функция $k_2(x)$, а хорда – $m_1(x)$.

Можно записать уравнения касательной и хорды:

$$v_1(x) = \bar{v}_1 x + \bar{v}_2 x^2 + \dots + \bar{v}_s x^s; \quad k_2(x) = \left. \frac{dv_1}{dx} \right|_{x=0}; \quad k_2(x) = \bar{v}_1 x;$$

$$m_1(x) = \frac{v_1(x_0) - v_1(0)}{x_0 - 0} x; \quad m_1(x) = \frac{v(x_0)}{x_0} x.$$

Далее, применяя следствие из леммы 3 и сравнивая $v_1(x)$ и $k_2(x)$, доказывается утверждение леммы.

Теорема 2. Достаточным условием отсутствия вещественных корней на отрезке $[x_1; x_2]$ при $u(x_1) > v(x_1)$ является выполнение неравенства

$$u(x_1) + \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_1} (x_2 - x_1) > v(x_2). \quad (6)$$

Для доказательства воспользуемся рисунком 2. Согласно лемме 2 для $d = x_1$ и $k = -v(x_1)$ неравенство (6) можно переписать в виде

$$u_1(0) + \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=0} > v_1(x_0). \quad (7)$$

Уравнение касательной к $u_1(x)$ в точке $x = 0$ имеет вид

$$k_1(x) = \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} x + u_1(0) \, .$$

Уравнение хорды имеет вид

$$m_1(x) = \frac{v_1(x_0)}{x_0} x.$$

При $x = x_0$ получаем

$$k_1(x) = \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} x_0 + u_1(0) ; m_1(x_0) = v_1(x_0) .$$

Тогда неравенство (7) можно представить в виде

$$k_1(x_0) > m_1(x_0),$$

кроме того,

$$k_1(0) > m_1(0)$$

ввиду $u(x_1) > v(x_1)$.

По следствию из леммы 3 это означает, что

$$k_1(x) > m_1(x) \quad (8)$$

при $x \in [0; x_0]$.

С другой стороны, по лемме 4 находим

$$k_1(x) \leq u_1(x); \quad m_1(x) \geq v_1(x). \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) получается

$$u_1(x) > v_1(x) \text{ при } 0 \leq x \leq x_0,$$

что означает отсутствие корней на отрезке. Теорема доказана.

Следует отметить, что условие (6) ускоряет сходимость по сравнению с условием (4), так как из рисунка 1 видно, что условие (4) выполняется для $x_1 < x_2 < x_3$, а условие (6) – для $x_1 < x_2 < x_4$, а x_4 ближе к корню x_k .

Таким образом, достаточным условием отсутствия вещественных корней на отрезке является следующее:

$$\begin{aligned} & \mathbb{K}_{\Pi}^{\mathbb{M}} u(x_1) > v(x_1), \\ & \mathbb{K}_{\Pi}^{\mathbb{H}} u(x_1) + \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_1} (x_2 - x_1) > v(x_2), \\ & \mathbb{K}_{\Pi}^{\mathbb{M}} v(x_1) > u(x_1), \\ & \mathbb{K}_{\Pi}^{\mathbb{H}} v(x_1) + \frac{dv}{dx} \Big|_{x=x_1} (x_2 - x_1) > u(x_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Пример. Передаточная функция замкнутой системы управления курсом судна представлена в виде:

$$Wz = 6,2 \frac{(s^2 + s + \lambda)(9,8s + 1)}{94,7s^6 + 6421,5s^5 + 10656,1s^4 + 2994,2s^3 + 157,1s^2 + (6,2 + 61,1\lambda)s + 6,2\lambda}.$$

Уравнение Д-разбиения относительно параметра λ имеет вид полиномиального уравнения

$$\omega (578,2\omega^6 - 61089,7\omega^4 - 904,7\omega^2 + 3,9) = 0. \quad (11)$$

Решение дает следующие значения ω :

$$0; \pm 0,0589; \pm 10,2794.$$

Границами областей являются значения λ : $0; 0,06697$. Решение (11) по условию (1) и (4) выполнено за 91 мс и 7682 итераций. Решение (11) по условию (10) выполнено за 30 мс и 1600 итераций.

Перспективы исследований. В качестве возможных направлений дальнейших исследований можно отметить:

- 1) обобщение метода на уравнения с несколькими неизвестными;
- 2) алгоритмическая и программная реализация метода с использованием современных математических пакетов или языков программирования высокого уровня.

Библиографический список

1. Пряшников П.Ф. Алгебраизация построения областей устойчивости систем автоматического управления с несколькими запаздываниями. / П.Ф. Пряшников // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 4. — С. 157–164
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. — М: Наука, 1968. — 432 с.

Поступила в редакцию 24.11.2003 г.