

УДК 519.873

Ю.Е. Обжерин, проф., д-р. техн. наук;

А.И. Песчанский, доцент, канд. физ.-мат. наук;

С.Г. Глеч, ассистент; Р.А. Приходько, аспирант

Севастопольский национальный технический университет.

Студгородок, г.Севастополь, Украина, 99053

E-mail: rlg@mail.ru

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ПРОФИЛАКТИКИ

Обобщены результаты моделирования двухэлементной последовательной технологической системы с учётом профилактики на любое число элементов. Построена математическая модель и найдены приближенные значения стационарных характеристик надежности рассматриваемой системы.

При эксплуатации гибких производственных систем актуальной является проблема определения оптимальных параметров профилактики для обеспечения максимально возможной надёжности.

Известна математическая модель функционирования двухэлементной технологической системы с учётом проведения профилактики [1]. Интерес представляет обобщение этой модели на случай произвольного числа элементов.

Цель данной статьи – построить математическую модель функционирования системы, состоящей из конечного числа последовательно соединённых технологических ячеек (ТЯ) с учётом проведения профилактики, найти среднюю стационарную наработку на отказ, среднее стационарное время восстановления и стационарный коэффициент готовности системы.

Опишем функционирование рассматриваемой системы. Система состоит из n последовательно соединённых ТЯ. При отказе одной ТЯ вся линия отключается. Время безотказной работы ячеек – случайные величины (СВ) $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, с функциями распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$, время восстановления ячеек – СВ $\beta_i, i = \overline{1, n}$, с ФР $G_i(t) = P(\beta_i \leq t)$. В случайные моменты времени (через промежутки времени α_{n+1} с ФР $F_{n+1}(t) = P(\alpha_{n+1} \leq t)$) проводится профилактика, время проведения профилактики – СВ β_{n+1} с ФР $G_{n+1}(t) = P(\beta_{n+1} \leq t)$. При этом профилактика проводится только в том случае, если в момент проведения плановой профилактики все ТЯ находились в работоспособном состоянии. После проведения профилактики все надёжностные свойства ТЯ полностью обновляются. СВ $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, n}$, предполагаются независимыми, имеющими конечные ма-

тематические ожидания и дисперсии: у ФР $F_i(t), G_i(t)$, существуют плотности $f_i(t), g_i(t)$. Таким образом, функционирование i -й ТЯ, $i = \overline{1, n}$, представляет собой последовательность следующих друг за другом периодов работы (с возможными периодами отключения), восстановления и профилактики.

Функционирование исходной системы опишем полумарковским процессом (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством [2]. Введем множество полумарковских состояний системы

$$E = \left\{ i\bar{d}\bar{x}^{(i)} : i = \overline{1, n+1}; \bar{d} = (d_1, \dots, d_{n+1}); \bar{x}^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \right\} \cup \{0\} \cup \{1\},$$

где i ($i = \overline{1, n}$) – номер ТЯ, изменившей свое состояние последней; если $i = n+1$, то это означает, что последним изменением состояния системы было наступление планового момента проведения профилактики.

Первые n компонентов d_k вектора $\bar{d}$ фиксируют состояние соответствующих ТЯ: $d_i = 1$ – i -я ТЯ находится в работоспособном состоянии, $d_i = 0$ – i -я ТЯ восстанавливается; если $d_{n+1} = 1$, тогда система находится в ожидании профилактики. Значением компонента x_k $k = \overline{1, n}$, вектора $\bar{x}^{(i)}$ является время, оставшееся до ближайшего момента изменения состояния k -й ТЯ, x_{n+1} – время до ближайшего планового момента проведения профилактики. Состояние 0 состоит в том, что работа всех ТЯ прерывается и начинается профилактика, состояние 1 означает, что профилактика завершилась и работа всех ТЯ начинается сначала.

Для нахождения стационарных характеристик системы используем приближённый метод, основанный на алгоритме фазового укрупнения [2,3].

Выберем опорную систему S_0 . Предположим, что у системы времена безотказных работ значительно больше соответствующих времен восстановления и времени проведения профилактики. Это приводит к тому, что опорной системой S_0 будет система, которая восстанавливается мгновенно и имеет мгновенную профилактику.

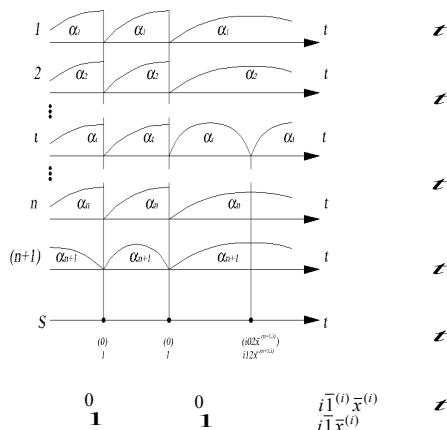


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования опорной системы

Временная диаграмма функционирования опорной системы изображена на рисунке 1.

Таким образом, опорная система имеет пространство состояний

$$E^0 = \{i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}, i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\} \cup \{0\} \cup \{1\},$$

где $\bar{1} - (n+1)$ -мерный вектор, все компоненты которого равны 1,

$\bar{1}^{(i)} - (n+1)$ -мерный вектор, у которого i -тый компонент равен 0, а все остальные равны 1.

Состояния 0 и $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}$ являются мгновенными.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ полумарковского процесса, описывающего функционирование опорной системы.

1. Из состояния 0 система с вероятностью 1 переходит в состояние 1, $P_0^1 = 1$.

2. Из состояния $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}$ система с вероятностью 1 переходит в состояние $i\bar{1}\bar{x}^{(i)}$, $P_{i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}}^{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}} = 1$.

3. Из состояния 1 система переходит в состояние 0 с вероятностью $P_1^0 = \int_0^\infty \prod_{k=1}^n \bar{F}_k(t) f_{n+1}(t) dt$.

4. Из состояния $i\bar{1}\bar{x}^{(i)}$ система может перейти в состояния:

а) $i\bar{1}^{(i)}(\bar{x}^{(i)} - \bar{t}^{(i)})$, $(\bar{t}^{(i)} - (n+1))$ -мерный вектор, i -ый компонент которого равен 0, а остальные t , если $\alpha_i < \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} x_k$, с плотностью вероятности перехода

$$p_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}}^{i\bar{1}^{(i)}(\bar{x}^{(i)} - \bar{t}^{(i)})} = f_i(t);$$

б) в состояние $j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}$, $y_i > 0, y_k = x_k - x_j, j \neq n+1, k \neq i$, если $x_j = \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \alpha_k < \alpha_i$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}}^{j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}} = f_j(x_j + y_i)$;

в) в состояние 0, если $x_{n+1} = \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} x_k < \alpha_i$, с вероятностью перехода:

$$P_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}}^0 = \bar{F}_i(x_{n+1}).$$

Обозначим через ρ_0 и ρ_1 значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ на состояниях 0 и 1 и предположим существование стационарных плотностей $\rho(i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)})$ и $\rho(i\bar{1}\bar{x}^{(i)})$ для состояний $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}$ и $i\bar{1}\bar{x}^{(i)}$ соответственно.

По определению стационарные плотности удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \rho_1 \int_0^\infty \int_{k=1}^n \bar{F}_k(t) f_{n+1}(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \bar{F}_i(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^\infty \dots \int_{x_{n+1}}^\infty \rho(i\bar{1}\bar{x}^{(i)}) d\bar{x}^{(i, n+1)}, \\ \rho(i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}) = \rho_1 \int_0^\infty f_i(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} f_k(x_k + t) dt + \sum_{\substack{k=1 \\ x_i=0}}^n \int_0^\infty f_k(x_k + t) \rho(k\bar{1}(\bar{x}^{(i)} + \bar{t})^{(k)}) dt, i = \overline{1, n}, \\ \rho_1 = \rho_0; \rho(i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}) = \rho(i\bar{1}\bar{x}^{(i)}), \\ \rho_0 + \rho_1 + \sum_{i=1}^n \int_{R_+^{n,i}} [\rho(i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}) + \rho(i\bar{1}\bar{x}^{(i)})] d\bar{x}^{(i)} = 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\bar{x}^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$,

$\bar{x}^{(i, n+1)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n, 0)$,

$(\bar{x}^{(i)} + \bar{t})^{(k)} = (x_1 + t, \dots, x_{i-1} + t, t, x_{i+1} + t, \dots, x_{k-1} + t, 0, x_{k+1} + t, \dots, x_{n+1} + t)$,

$R_+^{n,i} = \{\bar{x}^{(i)}, x_k \geq 0, k = \overline{1, n+1}\}$.

Доказывается, что решения системы уравнений (1) задаются формулами

$$\rho(i\bar{1}\bar{x}^{(i)}) = \rho_1 \int_0^\infty h_i(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n v_k(t, x_k) f_{n+1}(x_{n+1} + t) dt, i = \overline{1, n},$$

где $h_i(t) = \sum_{n=1}^\infty f_i^{*(n)}(t)$ — плотность функции восстановления, порожденной

СВ α_i , $v_k(t, x_k) = f_k(t + x_k) + \int_0^t f_k(t + x_k - s) h_k(s) ds$ — плотность функции

распределения прямого остаточного времени процесса восстановления, порождённого СВ α_k

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty h_i(t) \bar{F}_{n+1}(t) dt \right)^{-1}.$$

Для исходной системы с указанным критерием отказа множество работоспособных E_+ состояний имеет вид:

$$E^+ = \left\{ 1, i \overline{1} \overline{x}^{(i)}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Ко множеству отказовых состояний относятся все оставшиеся состояния системы.

Среднюю стационарную наработку на отказ T^+ и среднее стационарное время восстановления T^- найдем приближенно, используя формулы [3]

$$T^+ \approx \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad T^- \approx \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad (2)$$

где $\rho(dz)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы; $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях исходной системы; $P(z, dy)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ исходной системы.

Вычислим $\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)$. Для этого предварительно определим вероятности перехода реальной системы в отказовые из эргодических состояний, входящих во множество работоспособных состояний E_+ . Реальная система за один шаг из работоспособных состояний E_+ перейдет в подмножество отказовых состояний: из состояний 1 и $i \overline{1} \overline{x}^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ система с вероятностью 1 переходит в отказовые состояния. Поэтому

$$\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-) = \int_{E_+} \rho(dx) = \rho_1^+ \rho_1 \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i}^n \int_0^\infty h_i(t) dt \int_{R_c^{n+1,i}} v_k(t, x_k) f_{n+1}(x_{n+1}^+ + t) d\overline{x}^{(i)} = \frac{1}{2}.$$

Для вычисления $\int_{E_+} m(z) \rho(dz)$ предварительно найдём средние времена $m(z)$ пребывания в состояниях E_+ реальной системы.

$$m(1) = M\left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \alpha_i\right) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n+1} \overline{F}_i(t) dt,$$

$$m(i \overline{1}^{(i)} \overline{x}^{(i)}) = M(\alpha_i \wedge x_{\min}^{n+1,i}) = \int_0^{x_{\min}^{n+1,i}} \overline{F}_i(t) dt, i = \overline{1, n}.$$

Здесь $x_{\min}^{n+1,i} = \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} x_k$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{E_+} m(z) \rho(dz) &= \rho_1 m(1) + \sum_{i=1}^n \int_{R_+^{n+1,i}} \rho(i \bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)}) m(i \bar{1} \bar{x}^{(i)}) d\bar{x}^{(i)} = \rho_1 \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n+1} \bar{F}_k(t) dt + \\ &+ \rho_1 \sum_{i=1}^n \int_0^\infty h_i(t) dt \int_{R_+^{n+1,i}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n v_k(t, x_k) f_{n+1}(x_{n+1} + t) d\bar{x}^{(i)} \int_0^{x_{\min}^{n+1,i}} \bar{F}_i(z) dz = \\ &= \rho_1 \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n+1} \bar{F}_k(t) dt + \rho_1 \sum_{i=1}^n \int_0^\infty h_i(t) dt \int_0^\infty \bar{F}_i(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \bar{V}_k(t, z) \bar{F}_{n+1}(z + t) dz = M\alpha_{n+1}, \end{aligned}$$

где $\bar{V}_k(t, z) = 1 - V_k(t, z)$, $V_k(t, z)$ – ФР для прямого остаточного времени процесса восстановления, порождённого СВ α_k .

Таким образом,

$$T^+ \approx \frac{M\alpha_{n+1}}{\int_0^\infty \left[1 + \sum_{i=1}^n H_i(t) \right] f_{n+1}(t) dt}. \quad (3)$$

где $H_i(t) = \sum_{k=1}^\infty F_i^{*s(k)}(t)$ – функция восстановления, порожденная СВ α_i .

Перейдем к нахождению среднего стационарного времени восстановления T^- . Оценка знаменателя уже проведена при вычислении T^+ . Вычислим числитель с учётом того, что

$$m(0) = M\beta_{n+1},$$

$$m(i \bar{1}^{(i)} \bar{x}^{(i)}) = M(\beta_i \wedge x_{n+1}) = \int_0^{x_{n+1}} \bar{G}_i(z) dz;$$

$$\begin{aligned} \int_{E_-} m(z) \rho(dz) &= \rho_0 M\beta_{n+1} + \\ &+ \rho_0 \sum_{i=1}^n \left[\int_0^\infty h_i(t) dt \int_{R_+^{n+1,i}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (v_k(t, x_k) f_{n+1}(x_{n+1} + t) d\bar{x}^{(i)} \int_0^{x_{n+1}} \bar{G}_i(z) dz \right] = \\ &= \rho_0 M\beta_{n+1} + \rho_0 \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty h_i(t) \bar{G}_i(z) \bar{F}_{n+1}(z + t) dz dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T^- \approx \frac{M\beta_{n+1} + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty h_i(t) \bar{G}_i(z) \bar{F}_{n+1}(z+t) dz dt}{1 + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty H_i(t) f_{n+1}(t) dt}. \quad (4)$$

Используя формулы (2)-(4), определим стационарный коэффициент готовности $K_T = T^+ / (T^+ + T^-)$, имеем:

$$K_T \approx \frac{M\alpha_{n+1}}{M\alpha_{n+1} + M\beta_{n+1} + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty h_i(t) \bar{G}_i(z) \bar{F}_{n+1}(z+t) dz dt}. \quad (5)$$

В качестве примера использования формул (3)-(5) рассмотрим систему, состоящую из четырёх последовательно соединённых ТЯ, в которой все СВ имеют распределение Эрланга:

$$f_i(t) = \frac{\lambda_i^{k_i} t^{k_i-1} e^{-\lambda_i t}}{(k_i - 1)!}, \quad g_i(t) = \frac{\mu_i^{m_i} t^{m_i-1} e^{-\mu_i t}}{(m_i - 1)!}, \quad i = \overline{1,5}, \quad t \geq 0.$$

В таблице 1 приведены результаты расчёта данной системы. Для сравнения в таблице представлены стационарные характеристики без учёта профилирования (обозначены индексами 0).

Таблица 1 – Расчёт стационарных характеристик надёжности системы из четырёх ТЯ при различных законах распределения

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{1,}$, ч ⁻¹	0,07	0,09	0,06	0,05	0,03	0,04	0,03	0,07	0,07	0,07
k_1	4	4	2	4	3	2	3	2	4	3
$M\alpha_{1,}$, ч	57,1	44,4	33,3	80,0	100,0	50,0	100,0	28,6	57,1	42,9
$\lambda_{2,}$, ч ⁻¹	0,04	0,05	0,04	0,05	0,03	0,07	0,05	0,03	0,06	0,04
k_2	2	3	4	3	4	3	4	3	2	2
$M\alpha_{2,}$, ч	50,0	60,0	100,0	60,0	133,3	42,9	80,0	100,0	33,3	50,0
$\lambda_{3,}$, ч ⁻¹	0,03	0,06	0,05	0,01	0,02	0,04	0,05	0,09	0,02	0,09
k_3	3	4	3	2	4	4	3	4	3	4
$M\alpha_{3,}$, ч	100,0	66,7	60,0	200,0	200,0	100,0	60,0	44,4	150,0	44,4
$\lambda_{4,}$, ч ⁻¹	0,06	0,03	0,02	0,06	0,04	0,01	0,06	0,02	0,10	0,01
k_4	4	2	4	4	3	2	2	2	2	2
$M\alpha_{4,}$, ч	66,7	66,7	200,0	66,7	75,0	200,0	33,3	100,0	20,0	200,0
$\lambda_{5,}$, ч ⁻¹	0,04	0,02	0,10	0,09	0,04	0,05	0,01	0,08	0,09	0,03
k_5	4	4	4	2	2	3	2	3	3	2
$M\alpha_{5,}$, ч	100,0	200,0	40,0	22,2	50,0	60,0	200,0	37,5	33,3	66,7
$\mu_{1,}$, ч ⁻¹	1,3	1,5	1,7	1,2	1,0	1,1	0,9	0,7	1,0	1,4
m_1	2	3	2	3	4	2	3	2	2	4

$M\beta_{1, ч}$	1,5	2	1,2	2,5	4,0	1,8	3,3	2,9	2,0	2,9
$\mu_{2, ч^{-1}}$	4,0	1,3	5,0	0,9	1,0	1,8	1,0	1,9	0,7	3,0
m_2	4	4	4	4	3	4	4	3	3	2
$M\beta_{2, ч}$	1,0	3,1	0,8	4,4	3,0	2,2	4,0	1,6	4,3	0,7
$\mu_{3, ч^{-1}}$	3,0	1,2	5,0	1,1	1,4	1,2	2,0	1,0	1,4	1,0
m_3	3	2	3	2	2	2	2	4	4	3
$M\beta_{3, ч}$	1,0	1,7	0,6	1,8	1,4	1,7	1,0	4,0	2,9	3,0
$\mu_{4, ч^{-1}}$	1,0	1,6	1,0	1,0	1,3	1,1	1,0	5,0	1,0	2,0
m_4	4	3	4	2	3	3	3	3	3	4
$M\beta_{4, ч}$	4,0	1,9	4,0	2,0	2,31	0,7	3,0	0,6	3,0	2,0
$\mu_{5, ч^{-1}}$	10,0	8,0	10,0	20,0	11,0	13,0	44,0	7,0	30,0	6,0
m_5	4	4	3	2	4	4	3	4	4	3
$M\beta_{5, ч}$	0,4	0,5	0,3	0,1	0,4	0,3	0,1	0,6	0,1	0,2
T_0^+	16,00	14,46	16,22	20,34	27,91	17,14	14,46	12,90	9,60	14,12
T^+	16,85	14,81	16,29	20,91	27,84	17,37	14,75	12,92	9,53	14,33
T_0^-	1,87	2,16	1,19	2,94	2,80	2,03	2,75	2,73	3,19	2,22
T^-	1,56	2,02	0,72	2,67	1,41	1,40	2,51	1,91	2,19	1,78
$K_{\Sigma 0}$	0,90	0,87	0,93	0,87	0,91	0,89	0,84	0,83	0,75	0,86
K_{Σ}	0,92	0,88	0,96	0,89	0,95	0,92	0,85	0,87	0,81	0,89

Таким образом, построена математическая модель функционирования системы, состоящей из конечного числа последовательно соединённых технологических ТЯ с учётом проведения профилактики, найдены основные стационарные характеристики.

Полученные результаты могут быть использованы в области машино- и приборостроения при эксплуатации автоматизированных производственных систем.

Предполагаемое направление для дальнейших исследований – разработка моделей функционирования автоматизированных производственных систем с различными стратегиями проведения профилактики, а также нахождение оптимальных моментов времени её проведения.

Библиографический список

1. Песчанский А.И. Анализ надёжности двухкомпонентной технологической системы с учётом профилактики / А.И. Песчанский, С.Г. Глеч // Новые технологии в машино- приборостроении и на транспорте: Материалы междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 10–14 сент. 2001 г. — Севастополь, 2001. — С. 125–134.
2. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.
3. Корлат А.Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, А.Ф. Турбин. — Кишинёв: Штиинца, 1991. — 209 с.

Поступила в редакцию 2.02.2004 г.