

У ДК 681.511.46

О.Г. Подольская, ст. преподаватель

Керченский экономико-гуманитарный институт

ул Пирогова, 16, г. Керчь, Украина

E-mail: podolskie@kerch.com.ua

Е.А. Шушляпин, проф., д-р техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина

E-mail: pu541@sevcom.net

ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ И ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрены особенности алгоритмической и программной реализации одного метода терминального управления нелинейными динамическими дискретными системами (метода конечного состояния) на примере задачи управления запасами с нестационарным спросом. Приведены алгоритм метода и результаты сопоставления системы, управляемой по методу конечного состояния, с оптимальной системой. Приведен текст программы на языке Matlab.

Значительная доля математических моделей динамических систем описывается дискретными по времени (в общем случае по независимой переменной) описаниями в виде систем конечно-разностных уравнений, уравнений с разрывами решений в заданные моменты времени, рекуррентными формулами. Особенно много таких моделей применяется при описании сложных систем, когда дискретизация помогает скрыть детали их функционирования и упростить тем самым окончательный вид модели (см., например, [1]). Однако дискретные системы представляют собой в определенном смысле более сложный объект для анализа и синтеза, что проявляется в усложнении соответствующих методов. Примерами здесь могут служить дискретное преобразование Лапласа и дискретный принцип максимума. По этой причине весьма часто задачи управления динамическими дискретными системами общего вида сводят к статическим задачам, решаемых методами математического программирования. Для задач частного вида с аддитивным критерием используют также алгоритмы с последовательным анализом вариантов (динамическое программирование, «киевский веник» и др.) [2].

На протяжении последних нескольких лет нами разрабатывается метод терминального управления, названный «методом конечного состояния» (МКС) применительно к

нелинейным системам с линейно входящим (аддитивным) управлением. Разработаны варианты метода для нелинейных дифференциальных, дифференциально-функциональных, линейных непрерывно-дискретных, нелинейных дискретных систем [3]. Для каждого из упомянутых видов систем метод имеет свои особенности, однако во всех случаях имеет и общее: использование в качестве цели управления достижение заданного поведения так называемой критериальной функции. Последняя представляет собой целевую функцию терминального критерия, где компоненты вектора состояния $x(t)$ заменены соответствующими компонентами вектора так называемых «переменных конечного состояния». Переменные конечного состояния $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ зависят от двух временных параметров ϑ, t , текущего состояния $x(t)$ и имеют смысл прогноза конечного состояния при неуправляемом движении системы. Для расчета дискретного МКС-управления в каждый дискретный момент времени требуется решать относительно вектора управлений скалярное алгебраическое уравнение. Особенность последнего – рекурсивные относительно функций правых частей разностных уравнений выражения. В [3] рассмотрен простой пример, где раскрытие рекурсий и формирование алгебраических уравнений производилось вручную. Подобная ручная операция весьма трудоемка, чревата ошибками и в сложных случаях практически неприменима.

В настоящей статье предложена алгоритмическая реализация данного подхода, реализованная в виде программы на языке Matlab, применительно к частному случаю динамической задачи с нестационарным спросом [4]. Эта задача представляет собой пример нелинейной дискретной системы, для которой во-первых, известно оптимальное решение, а, во-вторых, ее нелинейность разрывна. Последнее позволяет проверить дискретное МКС-управление на достаточно сложном классе задач управления. Дискретный метод конечного состояния разработан для задач вида

$$J = J(x_N) \rightarrow J^*,$$

$$x_j = \Phi(j, x_{j-1}) + B_j u_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = x^0, \quad (1)$$

где x, u – соответственно n – и r – мерные векторы состояния и управления; x^0 – известный вектор начальных условий; j – индекс, указывающий на номер дискретной точки по оси времени; Φ –

нелинейная вектор-функция, $B - (n \times r)$ – матрица коэффициентов при r – мерном векторе управления $u(t)$.

Согласно алгоритму [3], на каждом j -м шаге вектор управления u_j определяется из нелинейного алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \bar{J}_{j-1} + (J^* - \bar{J}_{j-1})/T_u = \\ = J(\bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) + \Phi_{N-1}^{[N-j]}(\Phi(j, x_{j-1}) + B_j u_j) - \Phi_{N-1}^{[N-j]}(\Phi(j, x_{j-1}))), \end{aligned} \quad (2)$$

где обозначено

$$\Phi_j^{[k]}(x) \equiv \Phi(j, \Phi(j-1, \Phi(j-2, \dots, \Phi(j-k+1, x) \mathbf{K})); \quad (3)$$

$\bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1})$ – дискретный аналог переменной конечного состояния при значениях первого и второго дискретных моментов времени N и $j-1$ соответственно; $\bar{J}_{j-1}$ – значение критериальной функции в дискретный момент $j-1$; J^* – желаемое конечное значение терминального критерия.

Для расчета переменной конечного состояния производится вычисления по следующей из (1) однородной (при $u_j \equiv 0$) системе от момента $j-1$ до момента N при начальных условиях, равных текущему состоянию x_{j-1} . При этом искомым значением является конечное (при $j = N$) состояние однородной системы. Выражение левой части равенства (2) представляет собой правую часть конечно-разностного уравнения

$$\bar{J}_j = \bar{J}_{j-1} + (J^* - \bar{J}_{j-1})/T_u, \quad (4)$$

являющегося дискретным аналогом дифференциального уравнения $d\bar{J}/dt = (J^* - \bar{J})/T_u$, решение которого по экспоненте с постоянной времени T_u приближается к J^* . Таким образом, в методе конечного состояния задается желаемое поведение критериальной функции. Могут задаваться и другие, неэкспоненциальные формы траектории, однако опыт применения метода показал, что экспоненциальное поведение критериальных функций во многих случаях позволяет решать задачи управления. Правая часть (2) представляет собой целевую функцию критерия задачи (1), где в

качестве ее аргумента подставлено выражение, образованное алгебраическим суммированием переменной конечного состояния и двух членов, являющимися рекурсиями вектор-функции правых частей (1) Φ в соответствии с определением (3).

Следует отметить, что алгоритм (2) не накладывает каких-либо ограничений на вид компонент вектор-функции Φ , кроме естественного требования ограниченности значений при каждом j . Тем не менее, на практике при большой глубине рекурсии (т.е. при большом N) могут возникнуть непремлемые вычислительные погрешности, если отображение $x \leftarrow \Phi$ не является сжимающим.

Рассматривается задача управления запасами на N периодов [4], когда спрос за j -й период определяется величиной d_j . Введем обозначения: r_j – остаток запаса от $(j-1)$ -го периода; d_j – суммарный спрос за j -й период; z_j – запас, создаваемый в j -й период (или заказ в j -м периоде). Предполагается, что заявка на пополнение запаса исполняется мгновенно, причем расходы на выполнение заказа обозначим $c_j(r_j, z_j)$. Пусть $s_j(z_j + r_j - d_j) = s_j(r_{j+1})$ – расходы по хранению избыточного запаса в j -м периоде. Тогда суммарные расходы по снабжению за N периодов определяются как

$$J = \sum_{j=1}^N c_j(r_j, z_j) + s_j(z_j + r_j - d_j) \rightarrow \min,$$

$$z_j + r_j - d_j = r_{j+1},$$

$$j = 1, 2, \mathbf{K}, N.$$
(4)

Дополним ограничения задачи условиями неотрицательности $z_j, r_j, z_j + r_j - d_j \geq 0$, отображающие естественные требования к величинам остатков и запасов.

Сравнивая (4) с (1) и учитывая, что в роли управляющего воздействия здесь выступает z_j , видим, что в отличие от (1), здесь критерий зависит не только от конечного состояния, но и от промежуточных состояний и управления. Такой критерий аналогичен критерию задачи Коши вариационного исчисления (с интегральным функционалом) для непрерывного случая. Задача Коши легко сводится к задаче с терминальным критерием (задаче Майера).

Рассмотрим частный случай задачи (4), формулируемой с точки зрения планирования поставок продукции некоторым предприятием. Предполагается, что остаток в начале первого

периода нулевой $c_j(r_j, z_j) = 300 \cdot 1_+(z_j)$, $1_+(z_j) = \begin{cases} 1, & z_j > 0, \\ 0, & z_j = 0, \end{cases}$

$s_j(r_{j+1}) = 2 \cdot r_{j+1}$. Здесь функция c_j отображает стоимость наладки (переналадки) оборудования которая производится в начале только тех месяцев, когда изготавливается продукция, а время на выполнение заказа не учитывается. Таким образом, здесь роль запасов выполняют планируемые поставки продукции.

После преобразования (4) к виду (1) и замены требования минимизации критерия терминальной задачей, когда ищется некоторое желаемое его значение J^* , получаем следующую постановку:

$$J = y_N \rightarrow J^*,$$

$$y_j = y_{j-1} + 300 \cdot 1_+(z_{j-1} + v_{j-1}) + 2 \cdot (2z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1} - d_j) + 2v_{j-1},$$

$$r_j = z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1},$$

$$z_j = z_{j-1} + v_{j-1},$$

$$v_j = v_{j-1} + u_j,$$

$$z_j \geq 0, r_j \geq 0,$$

$$j = 1, 2, \mathbf{K}, N, \quad y_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad z_0 = z^0, \quad v_0 = v^0,$$

(5)

где параметры d_j (детерминированный спрос) для всех j следующие: $d_0 = 90$; $d_1 = 125$; $d_2 = 140$; $d_3 = 100$; $d_4 = 45$; $d_5 = 60$; $d_6 = 130$; $d_7 = 0$. Здесь v_j - искусственная переменная, введенная при преобразовании (4) к аддитивной форме.

Условия неотрицательности на остатки и запасы обеспечим путем выбора подходящих начальных условий z^0, v^0 , при которых с одной стороны, указанные условия выполняются на всем интервале функционирования системы, а с другой стороны, величины запасов наименьшие. Кроме того, необходимо выбрать параметр T_u , который не может быть меньше единицы по условиям устойчивости дискретного инерционного звена. Данный параметр обеспечивает скорость приближения критериальной функции к желаемому значению. В рассматриваемой задаче его целесообразно

выбрать равным единице, что согласно (4) обеспечит достижение J^* за один такт. Что же касается z^0, v^0 , то при их значениях 121 и 3 соответственно оказывается достижимым значение критерия 2460 при строго неотрицательных остатках и запасах на всех интервалах работы системы.

Полученные значения координат и критериальной функции в виде последовательностей при $j = 0, 1, \dots, 7$ соответственно следующие для y : 0; 300; 662; 1022; 1326,9; 1633,6; 2029; 2460; для остатков r : 0; 31; 30; 2,4; 3,3; 47,7; 65,5; 1,8; для искомых запасов z : 121; 124; 112,5; 100,9; 89,4; 77,8; 66,3; 54,7; для вспомогательной переменной v : 3; -11,6; -11,6; -11,6; -5; -11,6; -11,6; -11,6; для теоретических (согласно разностному уравнению (4)) и фактических значений критериальной функции $\bar{J}$: 3042; 2460; 2460; 2460; 2460; 2460; 2460.

Интересно сравнить полученное решение с оптимальным [4], где достигнутое значение критерия равно 1770. Мы видим, что МКС-управление дает результат, почти на 39% хуже, чем оптимальный. Это объясняется тем, что принятая экспоненциальная форма желаемой критериальной функции отличается от оптимальной, которая для $j = 0, 1, \dots, 7$ имеет вид последовательности $\bar{J}$: 550; 9630; 1050; 2490; 1470; 1770; 1770. Данную форму $\bar{J}$ можно реализовать и с помощью МКС-управления (2), заменив левую часть (2) элементами указанной последовательности (при $j=0$ – это 550, при $j=1$ – 9630 и т.д.). Были произведены соответствующие компьютерные эксперименты при начальных условиях $y_0 = 0$; $r_0 = 0$; $z_0 = 215$; $v_0 = -215$, выбранных из условия обеспечения оптимальных запасов $z_0 = 215$; $z_1 = 0$; $z_2 = 240$; $z_3 = 0$; $z_4 = 105$; $z_5 = 0$; $z_6 = z_7 = 130$ [4]. Этим запасам соответствуют $u_1 = 455$; $u_2 = -480$; $u_3 = 345$; $u_4 = -210$; $u_5 = 235$; $u_6 = -130$; $u_7 = 0$, что следует из (5). Такие же u_j получены и с помощью МКС-управления, что свидетельствует в пользу гипотезы об эквивалентности задач оптимального управления и МКС-управления с оптимальными критериальными функциями. Оказалось, однако, что для успешного решения нелинейного уравнения (2) пришлось задавать начальные точки, отличающиеся от оптимальных u_j не более,

чем на тысячные доли процента ввиду чрезвычайно «острых» минимумов для невязок.

Детали реализации алгоритма приведены в помещенном ниже тексте соответствующей программы на языке Matlab.

%Дискретное МКС-управление запасами при нестационарном детерминированном спросе
%Используемые модули общего назначения:

% Crit(ns,x) - критерий

% Nleq(u) - нелинейное алгебраическое уравнение относительно управления

% Fi(j,k,x) - рекурсия k-го уровня правых частей
% в дискретный момент j и

состоянии x

% RP_x0(ns,j,x) - правые части неуправляемой системы разностных уравнений ns-го % порядка

% B(j) - матрица в общем случае переменных по времени j коэффициентов

% при управлении

%Используемые модули для задачи управления запасами:

% c(j,x)-функция производственных затрат в j-м периоде

% s(j,x)-расходы по хранению избыточного запаса в j-м периоде

% RP_x(ns,j,x,u) - правые части управляемой системы разностных уравнений ns-го % % порядка

%Исходные параметры и начальные условия (вектор размера ns)

%Соответствие переменных

%x(1)~y_j - частичная сумма целевой функции критерия; x(2)~r_j; x(3)~z_j; x(4)~v_j

global Jz Tu N ns nu x y J_;%глобальные переменные общего назначения

Tu=1; %постоянная времени экспоненциальной желаемой критериальной функции

N=7; %количество дискретных моментов

ns=4; %порядок системы

nu=1; %число управляющих воздействий

x=[0;0;121;3]; %начальные условия

```

u0=[0];%произвольная начальная точка для функции
lsqnonlin (решение
%      систем нелинейных алгебраических
уравнений)
%Глобальные переменные специального назначения
global d XX j;
%d - спрос по периодам; XX-массив для графиков;
d=[90;125;140;100;45;60;130;0];
Jz=2650;%минимально достижимое для МКС-
управления значение критерия
%-----Моделирование системы-----
-----
%Вычисление значения переменной конечного
состояния для начального момента
y=x;
for i=1:N
    y=RP_x0(ns,i,y);
end;
%Занесение в массивы для графиков начальных
точек
JJ(1)=0;%дискретное время
XX(1,1)=x(1);XX(1,2)=x(2);XX(1,3)=x(3);XX(1,4)=x
(4);%начальное состояние
XX(1,5)=Crit(ns,y);%критериальная функция
XX(1,6)=XX(1,5);%для графика теоретической
критериальной функции
J_t=XX(1,5);%начальное условие для расчета
теоретической критериальной функции
%Цикл по дискретному времени j=1..N с шагом 1
for j=1:N
    %Расчет управления и квадратической невязки в
    [u,fval] соответственно

    [u,fval]=lsqnonlin('Nleq',u0,[],[],optimset([],['
    ],'MaxFunEvals',1000));

%*****
%*****
%Моделирование системы с управлением
x=(RP_x0(ns,j,x))'+B(j)*u;
J_t=J_t+(Jz-J_t)/Tu;%разностное уравнение для
желаемой критериальной функция

```

%Занесение в массивы для графиков
промежуточных точек

```
JJ(j+1)=j;XX(j+1,1)=x(1);XX(j+1,2)=x(2);XX(j+1,3)=x(3);
```

```
XX(j+1,4)=x(4); XX(j+1,6)=J_t;
```

%Вычисление значения переменной конечного
состояния для (j+1)-го момента

```
y=x;
```

```
for i=j+1:N
```

```
    y=RP_x0(ns,i,y);
```

```
end;
```

```
XX(j+1,5)=Crit(ns,y);%критериальную функцию в
```

массив для графика

```
end;
```

%Построение графиков

%Выходные координаты

%-----x1-----

```
subplot(5,1,1);
```

```
plot(JJ,XX(:,1));
```

```
grid;
```

```
xlabel('j');
```

```
ylabel('x1');
```

%-----x2-----

```
subplot(5,1,2);
```

```
plot(JJ,XX(:,2));
```

```
grid;
```

```
xlabel('j');
```

```
ylabel('x2');
```

%-----x3-----

```
subplot(5,1,3);
```

```
plot(JJ,XX(:,3));
```

```
grid;
```

```
xlabel('j');
```

```
ylabel('x3');
```

%-----x4-----

```
subplot(5,1,4);
```

```
plot(JJ,XX(:,4));
```

```
grid;
```

```
xlabel('j');
```

```
ylabel('x4');
```

```

%Критериальная функция
subplot(5,1,5);
plot(JJ,XX(:,5), 'b-', JJ,XX(:,6), 'r--
');%фактическая (голубая сплошная)

теоретическая (красная пунктирная)
grid;
xlabel('j');
ylabel('J_');
%end

function [f]=B(j)
f=[0;0;0;1];
%end

function f=c(j,x)
if x(3)+x(4)>0
    f=300;
else
    f=0;
end;
%end

function f=s(j,x)
global method d;
if method<3
    arg=x(2)+2*x(3)-d(j)-d(j+1);
else
    arg=x(2);
end;

if arg>0
    f=2*(arg);
else
    f=0;
end;

%end

function f=Crit(ns,x)
global method shtraf d j;
f=x(1);

```

```
%end
```

```
function [f]=Fi(j,k,x)
%Вычисление рекурсии  $\Phi(j,k,x)=\Phi(j,\Phi(j-1,\Phi(j-2,\dots,\Phi(j-k+1,x)\dots,x)))$ , где
% $\Phi$  вычисляется посредством RP_x0
global ns;
f=x;
for i=k:-1:1
    f=RP_x0(ns,j-i+2,f);
end;
%end
```

```
function f=Nleq(u)
%Нелинейное уравнение относительно вектора
управления u
%Вычисление значения критериальной функции
global Jz Tu N ns nu x y j;
J_=Crit(ns,y);
%Нелинейное уравнение
j1=N-1;kf1=N-j;
du=B(j)*u;
f11=RP_x0(ns,j,x);
f1=Fi(j1,kf1,f11+du');
f2=Fi(j1,kf1,f11);
f=J_+(Jz-J_)/Tu-Crit(ns,y+f1-f2);
%end
```

```
function [f]=RP_x0(ns,j,x)
global d;
f(1)=x(1)+c(j,x)+s(j,x);
f(2)=x(3)+x(2)-d(j);
f(3)=x(3)+x(4);
f(4)=x(4);
%end
```

Рассмотренное приложение дискретного метода конечного состояния и программное обеспечение его реализующее, свидетельствуют, во-первых, о простоте алгоритмической реализации, во-вторых, о работоспособности метода для решения практических задач и, в третьих, о больших перспективах его применения для задач управления с недифференцируемыми

нелинейностями. В самом деле, нелинейная функция c_j , присутствующая первоначально в критерии, а после приведения к виду (5) – в правой части первого уравнения, имеет релейный тип, а система четвертого порядка, тем не менее, приведена в заданное положение с практически нулевой погрешностью. Если вспомнить, насколько беден арсенал методов управления существенно нелинейными системами, ясно, что наличие дискретного метода конечного состояния, примененного к дискретизированной модели систем управления (в том числе и изначально непрерывной) позволяет управлять многомерными системами с произвольным числом нелинейностей, в том числе и разрывных.

Дальнейшие исследования в данном направлении связаны, прежде всего, с поиском практических приложений метода. Кроме того, необходимо теоретическое обоснование упомянутой выше гипотезы об эквивалентности задач оптимального управления и МКС– управления с оптимальными критериальными функциями. Видна еще одна теоретическая задача – поиск аддитивной формы алгоритма (2) или доказательство отсутствия таковой.

Библиографический список

1. Абакумов А.И. Моделирование демографических изменений при экономических ограничениях / А.И. Абакумов Е.Е. Гиричева // Экономика и математические методы. — 2002. — №4. — С. 110 – 114.
2. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилова, Е.М. Столярова — М.: Наука 1978. — 352 с.
3. Шушляпин Е.А. Управление терминальными нелинейными дискретными системами методом конечного состояния / Е.А.Шушляпин, О.Г.Подольская // Радіоелектроніка, інформатика, управління. — 2003. — №2(10). — С. 138 – 143.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. — К.: Вища шк., 1979. — 392 с.

Поступила в редакцию 20.04.2004 г.