

У ДК 65.018.2: 531.7

И.В. Кудрявченко, канд. техн. наук,

В.В. Кудрявченко

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

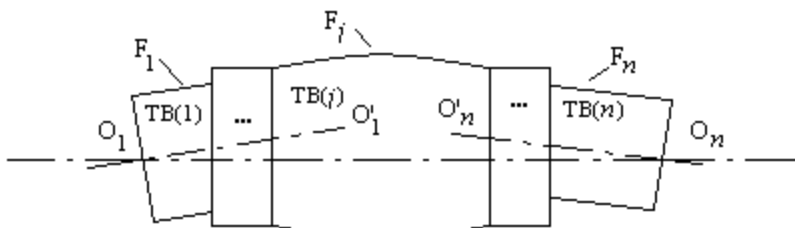
root@sevgtu.sebastopol.ua

ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ КООРДИНАТ ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Анализируется погрешность измерения координат составных тел вращения, связанная с их несоосностью. Значения оценки шумов квантования получены на основе метода статистических испытаний. Даны рекомендации по оптимальному размещению датчиков расстояний и по числу отсчетов, снимаемых с каждого датчика за один цикл измерений.

В электротехнике применяются конструкции содержащие две и более деталей, расположенных коаксиально, каждая из которых является телом вращения (ТВ). Такую конструкцию будем называть составным телом вращения (СТВ). В частности, к СТВ можно отнести вакуумные дугогасительные камеры (ВДК), широко применяемые в коммутационной аппаратуре [1]. Технология производства ВДК такова, что ее корпус изготавливают непосредственно в процессе сборки, получая при этом неразъемное соединение. Особое значение имеет соосное расположение всех частей: даже незначительные перекосы приводят к нежелательному изменению распределения электромагнитного поля внутри ВДК в процессе коммутаций и, как следствие, к преждевременному выходу из строя дорогостоящей аппаратуры. Поэтому одной из основных целей измерения координат поверхности СТВ является определение несоосности СТВ. Учитывая случайный характер допускаемых перекосов, необходимо так оптимизировать измерительный процесс, чтобы приемлемая погрешность измерений обеспечивалась при минимальном числе отсчетов.

На рисунке 1 изображена фронтальная проекция СТВ, содержащего n ТВ. Поверхность каждого j -го ТВ можно получить в результате вращения образующей F_j вокруг оси $O_j - O'_j$. Ось



$O_1 - O_n$ проходит через центры торцевых поверхностей ТВ(1) и ТВ(n) и является общей осью симметрии СТВ. Из рисунка 1 видно, что если несоосность отсутствует то, во-первых, оси $O_j - O'_j$ (где $j = \overline{1, n}$) и $O_1 - O_n$ совпадают, а, во-вторых, линия границы проекции СТВ на плоскость F_{CTB} не зависит от угла поворота СТВ вокруг оси $O_1 - O_n$ и равна сумме образующих F_j :

$$F_{CTB} = \sum_{j=1}^n F_j . \quad (1)$$

Постановка задачи. Предположим, что для измерения координат поверхности СТВ имеются идеальные точечные датчики D_i с одинаковыми метрологическими характеристиками, причем погрешность измерения расстояния датчиком пренебрежимо мала. Каждый датчик может быть размещен в точке пространства, точные значения координат которой известны. Необходимо а) дать оценку предельных значений погрешностей квантования, обусловленных несоосностью ТВ в составе СТВ, б) минимизировать число отсчетов, получаемых с каждого датчика в цикле измерения, в) ограничить число датчиков и сформулировать правила их размещения.

При решении поставленной задачи будем использовать метод статистических испытаний.

Описание математической модели. Отдельно рассмотрим ТВ(1), изображенное на рисунке 1. Для определенности будем полагать, что в процессе измерений СТВ поворачивается относительно оси $O_1 - O_n$, а датчики $D_1 - D_k$ размещены в плоскости нулевого меридиана на одинаковых расстояниях l_0 от оси $O_1 - O_N$ (рисунок 2).

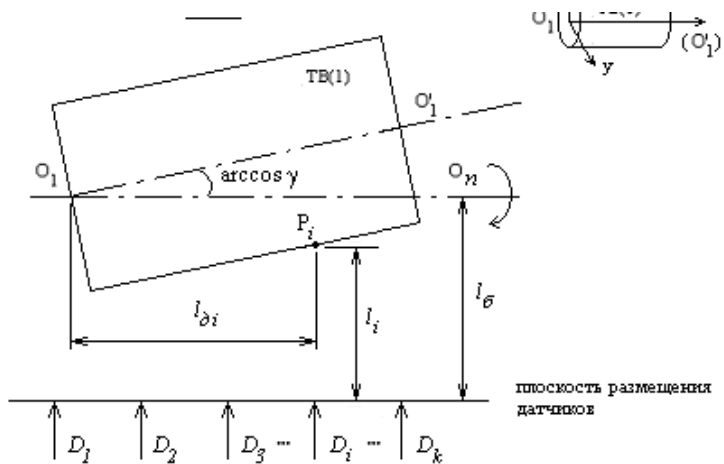


Рисунок 2 – Проекция ТВ(1) на плоскость нулевого меридиана ($\theta = 0$)

Тогда поворот СТВ на угол θ относительно «измерительной» оси $O_1 - O_n$ отобразит точку $P_i(x, y, z)$, принадлежащую СТВ и расположенную на расстояниях l_i от плоскости размещения датчиков и l_{oi} от начала координат O_1 , в точку $P'_i(x', y', z')$ в соответствии с формулами перехода [2]

$$\left. \begin{aligned} x' &= x(\cos \theta + \alpha^2(1 - \cos \theta)) + y(\gamma \sin \theta + \alpha\beta(1 - \cos \theta)) + z(-\beta \sin \theta + \alpha\gamma(1 - \cos \theta)); \\ y' &= x(-\gamma \sin \theta + \alpha\beta(1 - \cos \theta)) + y(\cos \theta + \beta^2(1 - \cos \theta)) + z(\alpha \sin \theta + \beta\gamma(1 - \cos \theta)); \\ z' &= x(\beta \sin \theta + \alpha\gamma(1 - \cos \theta)) + y(-\alpha \sin \theta + \beta\gamma(1 - \cos \theta)) + z(\cos \theta + \gamma^2(1 - \cos \theta)), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где O_1 - начало координат;

α, β, γ - направляющие косинусы оси $O_1 - O_n$ относительно координатных осей $O_1 x, O_1 y, O_1 z$ соответственно, причем должно выполняться соотношение

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (3)$$

Тогда расстояние Δr между точками $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$, которое и будет определять шумы квантования, находим по формуле

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad (4)$$

где выражения для $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ получаем непосредственно из (2):

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x' - x = (1 - \cos \theta) [x(\alpha^2 - 1) + y\alpha\beta + z\alpha\gamma] + \sin \theta (y\gamma - z\beta); \\ \Delta y &= y' - y = (1 - \cos \theta) [x(\alpha^2 - 1) + y\alpha\beta + z\alpha\gamma] + \sin \theta (y\gamma - z\beta); \\ \Delta z &= z' - z = (1 - \cos \theta) [x(\alpha^2 - 1) + y\alpha\beta + z\alpha\gamma] + \sin \theta (y\gamma - z\beta). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Анализ выражений (4) и (5) дает минимально и максимально возможные значения функции $\Delta r(\theta)$: $\Delta r_{\min} = 0$

при $\theta = 0$;

$$\Delta r_{\max} = \sqrt{\Delta x_{\max}^2 + \Delta y_{\max}^2 + \Delta z_{\max}^2} \quad \text{при } \theta = 90^\circ, \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{\max} &= x(\alpha^2 - 1) + y(\alpha\beta + \gamma) + z(\alpha\gamma - \beta); \\ \Delta y_{\max} &= x(\alpha\beta - \gamma) + y(\beta^2 - 1) + z(\alpha + \beta\gamma); \\ \Delta z_{\max} &= x(\alpha\gamma + \beta) + y(\beta\gamma - \alpha) + z(\gamma^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Описание вычислительного эксперимента. В основу вычислительного эксперимента положена программа, написанная в системе проектирования Delphi 7.0 и предназначенная для расчета верхней границы доверительного интервала шумов квантования ($\Delta r(p)$). При расчете $\Delta r(p)$ строится бинарное дерево результатов [3], расположенных в порядке возрастания. Доверительная вероятность p , выраженная в процентах, задает число «удачных» испытаний от общего числа испытаний, которые должны быть учтены. Остальные результаты не учитываются. Для наихудшего из оставленных результатов находится значение вершины бинарного дерева, которое и является верхней оценкой $\Delta r(p)$.

Программа поддерживает графический интерфейс, который позволяет устанавливать следующее

1. Число опытов при статистических испытаниях – от 10 до 10^6 .
2. Точность округления результатов вычислений – до 6 знаков после запятой.
3. Законы распределения случайных величин – нормальный и равномерный.
4. Доверительная вероятность – от 1 до 100%.
5. Диапазоны, в которых могут быть заданы параметры вычислительного процесса по формулам (2) – (5):
 - от 0 до 90 градусов для средних значений аргументов направляющих косинусов $\arg \alpha$, $\arg \beta$, $\arg \gamma$;

- от 0 до 90 градусов для интервалов отклонения аргументов направляющих косинусов $\Delta \arg \alpha$, $\Delta \arg \beta$, $\Delta \arg \gamma$;
- от 10^{-3} до 10^3 для координат x, y, z .

Нормальный закон распределения реализован с помощью процедуры RandG, которая генерирует последовательность случайных чисел, распределенных относительно среднего значения в заданном диапазоне.

Для реализации равномерного закона распределения применяется процедура Random, которая возвращает целые случайные числа в диапазоне от нуля до установленного максимального значения. Учитывая, что аргументы направляющих косинусов могут принимать действительные значения, все полученные целые числа нормируются на соответствующий поправочный множитель. В приведенном ниже фрагменте программы вычисляется направляющий косинус α (alpha).

```
...
begin //равномерное распределение
  RanNum:=random(round(power(10,aspect+1)));

devNesm:=((2*StrToFloat(DevA.Text))/power(10,aspect+1))*RanNum;
  alpha:=cos(DegToRad(StrToFloat(MeanA.Text)-
StrToFloat(DevA.Text)+devNesm));
```

...
Целое число aspect характеризует точность округления (число значащих цифр) результата вычислений. Видно, что случайное число RanNum, полученное при выполнении процедуры random, домножается на коэффициент $2/\text{power}(10, \text{aspect}+1)$.

Результаты эксперимента. При исследовании модели СТВ были учтены два возможных закона распределения случайных величин: нормальный и равномерный. Очевидно, что осознанный выбор того или иного закона распределения возможен лишь после дополнительного изучения особенностей технологии изготовления и сборки реального устройства.

В ходе эксперимента были исследованы следующие зависимости:

$$\Delta r = f(\alpha, \beta, \gamma) \Big|_{\theta = \text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}; x, y, z = \text{const}};$$

$$\Delta r = f(\theta) \Big|_{\overline{\arg \alpha}, \overline{\arg \beta}, \overline{\arg \gamma} = \text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}; x, y, z = \text{const}};$$

$$\Delta r = f\left(\frac{x}{z}\right) \Big|_{x=y, \theta = \text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}}.$$

Основные результаты вычислений (в каждом опыте число испытаний составляло 10^5 , вероятность – 95 % , точность округления – 4) приведены в таблицах 1–3.

Примечание. В таблицах 1 – 3 в скобках даны значения $\Delta r(p)$ и Δr при равномерном законе распределения α, β, γ .

Таблица 1 – Результаты исследования

$$\Delta r = f(\alpha, \beta, \gamma) \Big|_{\theta = \text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}; x, y, z = \text{const}}$$

при нормальном и равномерном законах распределения

$$(\Delta \arg \alpha = \Delta \arg \beta = \Delta \arg \gamma = 5^\circ)$$

Номер опыта		1	2	3	4
Угол θ , град		1			
Координаты x, y, z		1,1,1			
Средние значения аргументов, град	$\overline{\arg \alpha}$	0	90	90	54,7
	$\overline{\arg \beta}$	90	45	26,6	54,7
	$\overline{\arg \gamma}$	90	45	63,4	54,7
Интервал $\Delta r(p)$		0,0245 (0,0247)	0,025 (0,0196)	0,0271 (0,0217)	0,0173 (0,0059)
Среднее арифметическое Δr		0,005715 (0,005915)	0,017527 (0,017475)	0,019221 (0,019153)	0,003782 (0,002293)

Таблица 2 – Результаты исследования

$$\Delta r = f(\theta) \Big|_{\overline{\arg \alpha}, \overline{\arg \beta}, \overline{\arg \gamma} = \text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}; x, y, z = \text{const}}$$

при нормальном и равномерном законах распределения

$$(\overline{\arg \alpha} = 0^\circ; \overline{\arg \beta} = \overline{\arg \gamma} = 90^\circ; \Delta \arg \alpha = \Delta \arg \beta = \Delta \arg \gamma = 5^\circ)$$

Номер опыта		1	2	3	4
Угол θ , град		2	3	5	10
Координаты x, y, z		1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
Интервал $\Delta r(p)$		0,0491 (0,0512)	0,0733 (0,0739)	0,1224 (0,123)	0,2447 (0,2461)
Среднее арифметическое Δr		0,011630 (0,024162)	0,017261 (0,017793)	0,028740 (0,029528)	0,057367 (0,059643)

Таблица 3 – Результаты исследования

$$\Delta r = f\left(\frac{x}{z}\right)_{x=y, \theta=\text{const}; \Delta \arg \alpha, \Delta \arg \beta, \Delta \arg \gamma = \text{const}}$$

при нормальном и равномерном законах распределения
 $(\overline{\arg \alpha} = 0^\circ; \overline{\arg \beta} = \overline{\arg \gamma} = 90^\circ; \Delta \arg \alpha = \Delta \arg \beta = \Delta \arg \gamma = 5^\circ)$

Номер опыта	1	2	3	4
Угол θ , град	1			
Координаты x, y, z	0,1; 0,1; 1	0,5; 0,5; 1	1,1,10	5,5,10
Интервал $\Delta r(p)$	0,0175 (0,0175)	0,0194 (0,0195)	0,175 (0,1754)	0,194 (0,1948)
Среднее арифметическое Δr	0,004333 (0,004343)	0,004633 (0,004776)	0,043377 (0,043505)	0,046528 (0,047790)

Как видно из таблицы 1, минимальное значение погрешности квантования наблюдается в случае максимальной симметрии, т.е. при условии, что $\overline{\arg \alpha} = \overline{\arg \beta} = \overline{\arg \gamma} = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ$.

Из таблицы 2 следует, что максимальное значение погрешности квантования линейно зависит от угла поворота θ при условии, что остальные параметры эксперимента остаются без изменений.

Из таблицы 3 следует, что при неизменном соотношении координат x/z (при $x = y$) погрешность квантования линейно зависит от размеров ТВ(1).

Выводы

1. Погрешность квантования $\Delta r(p)$ («шум квантования»), связанная с несоосностью ТВ в составе СТВ, является нелинейной функцией от координат точки поверхности ТВ x, y, z и угла поворота θ относительно измерительной оси. При значениях $x = y = z = 1$, $\theta = 1^\circ$ и $\Delta \arg \alpha = \Delta \arg \beta = \Delta \arg \gamma = 5^\circ$ максимальные погрешности квантования составляют примерно 2,5 % при нормальном и равномерном распределениях. При последующем увеличении линейных размеров СТВ или углов поворота θ погрешность квантования растет по линейному закону.

2. Соотношения (2) – (7) дают предельную оценку шумов квантования. При выборе датчиков расстояний не следует завышать требования к их метрологическим характеристикам.

Например, достаточно потребовать, чтобы погрешность измерения расстояний датчиком не превышала величины $(0,1 \dots 0,3) \Delta r(p)_{\max}$, где $\Delta r(p)_{\max}$ верхняя граница шума квантования. В этом случае можно не учитывать погрешность определения расстояния датчиком в общей погрешности измерений.

3. Угол поворота θ в формулах для расчета шумов квантования следует понимать как погрешность отсчета поворотного устройства. Поэтому при измерении координат поверхности СТВ рекомендуется подбирать шаг поворота $\Delta\theta$ из условия $\Delta\theta = (10 \dots 20) \theta_{\min}$, где $\theta_{\min}$ – погрешность отсчета поворотного устройства. Например, если $\theta_{\min} = 5^\circ$, то разумно выбирать шаг поворота СТВ $\Delta\theta = 60^\circ$ или $\Delta\theta = 90^\circ$. При этом число отсчетов, снимаемых с одного датчика за один цикл измерений, составит $360/60=6$ или $360/90=4$.

4. Размещать датчики для измерения координат поверхности ТВ(j) желательно на расстоянии не менее $10 \Delta r(p)$ друг от друга. Если образующая ТВ(j) является отрезком прямой линии, то для измерения координат поверхности ТВ(j) достаточно двух датчиков. Если образующая является квадратичной параболой – то следует применять три датчика, если кубической параболой, то четыре датчика и т.д.

5. Координаты поверхности СТВ в точках измерения дают значения функции $F_{СТВ}$, определяемой по формуле (1), с учетом погрешности, обусловленной шумами квантования.

Перспективы дальнейших исследований заключаются в развитии математического аппарата для определения несоосности СТВ на основе теории информационной оптимизации.

Библиографический список

1. Сивяков С.К. Вакуумные коммутационные аппараты нового поколения/ С.К.Сивяков// Электротехника — 2003. — №12. — С. 54 – 57.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов/ И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: Наука 1986. — 544 с.
3. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Основные алгоритмы / Д.Э.Кнут. — М.: Изд-во «Вильямс», 2000. — 720 с.

Поступила в редакцию 30.08.2004 г.

