

У ДК 681.5

С.А. Конева

*Севастопольский национальный технический университет
Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053*

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА ОДНОГО КЛАССА КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Построена модель управляемого теплообменного аппарата в области изображений. Предлагаются методы анализа динамических характеристик аппарата на строгой основе, полностью учитывающей аналитический характер изображений динамических характеристик.

Исследования процессов теплообмена представляют собою обширную область современной теории теплопередачи [1,2]. Математический анализ тепловых процессов является весьма сложной задачей, в особенности это касается проблемы анализа управляемых тепловых процессов в теплообменных аппаратах (ТОА) энергетических систем.

В относительно простых случаях теплообмен в ТОА представляет собой пространственно-одномерный процесс (одна пространственная координата) и для линейных моделей теплообмена большой интерес представляет преобразование Лапласа как общее средство построения и анализа моделей управляемых ТОА. Вместе с тем построение таких моделей на основе преобразования Лапласа уравнений теплообмена в частных производных приводит к «неординарным» изображениям переменных вне класса рациональных или мероморфных функций. В силу этого в исследованиях динамики ТОА на основе преобразования Лапласа сложился упрощенный подход. Весьма часто ТОА (объект управления) грубо представляют различными комбинациями звена с запаздыванием и инерционного звена первого порядка. Это позволяет применить затем традиционные методы анализа САУ теплообменными процессами [3]. Строго говоря, такой подход оказывается необоснованным и даже непригодным в достаточно важных случаях моделей ТОА. Поэтому актуальна задача построения и анализа моделей ТОА на основе преобразования Лапласа дифференциальных уравнений процесса в частных производных, адекватных аналитической природе изображений переменных системы.

Цель исследования – анализ математической модели ТОА методами теории преобразования Лапласа, адекватно отражающими аналитическую природу изображений переменных системы.

Рассматривается цилиндрический ТОА. По внутренней трубе аппарата подается тепловыделяющий пар, а в межтрубном пространстве – топливо, подводимое из расходной емкости с целью его подогрева в заданных пределах. Пусть $T(x,t)$ – температура топлива; x – относительная координата ($0 \leq x \leq 1$); t – время; $T(0,t)$ – температура топлива на входе ТОА; $T(1,t)$ – температура на выходе; $T_T(x,t)$ – температура пара: $T_T(0,t)$ – на входе, $T_T(1,t)$ – на выходе; расход топлива $G(t)$. При равномерной по длине ТОА теплоотдаче, уравнения динамики теплообмена имеют вид [2,3]

$$v \frac{\partial T_T(x,t)}{\partial t} + T_T(x,t) = a_2 G_T(t) + T(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + b_1 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + b_2 T(x,t) = b_3 T_T(x,t) - b_4 G(t), \quad (2)$$

с неотрицательными постоянными коэффициентами.

Начальные и граничные условия обычно принимаются в виде:

$$T(x,0) = 0, \quad T_T(x,0) = 0; \quad T(0,t) = T_0(t).$$

В данной задаче управляемого теплообмена основной интерес представляет процесс изменения температуры топлива $T(1,t)$ на выходе ТОА. Возмущающими воздействиями являются температура топлива на входе $T(0,t)$ и расход топлива $G(t)$, управляющим воздействием – расход тепловыделяющего пара $G_T(t)$.

Преобразование Лапласа уравнений (1),(2) по t с изображениями $T_T(x,p)$, $T(x,p)$ дает с учетом начальных условий после исключения $T_T(x,p)$ соотношение

$$\frac{dT(x,p)}{dx} + \left(b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1} \right) T(x,p) = \frac{a_2 b_3}{vp+1} G_1(p) - b_4 G(p). \quad (3)$$

Рассмотрим построение и анализ математической модели ТОА как объекта управления. Решение дифференциального уравнения (3) с учетом граничного условия позволяет определить изображение $T(x,p)$ температуры топлива в произвольной точке ТОА

$$T(x, p) = T_0(p) e^{-A(p)x} - \frac{b_4}{A(p)} [1 - e^{-A(p)x}] G(p) + \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} [1 - e^{-A(p)x}] G_T(p), \quad (4)$$

где

$$A(p) = b_1 p + b_2 - \frac{b_3}{vp+1}. \quad (5)$$

При $x=1$ полученное выражение определяет изображение температуры топлива на выходе ТОА.

В соответствии с выражением (4) имеем три компоненты температуры теплоносителя на выходе ТОА ($x=1$)

$$T(1, p) = T_0(p) e^{-A(p)}, \quad (6)$$

$$T(1, p) = -\frac{b_4}{A(p)} [1 - e^{-A(p)}] G(p), \quad (7)$$

$$T(1, p) = \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} [1 - e^{-A(p)}] G_T(p), \quad (8)$$

порождаемые возмущениями $T_0(p)$, $G(p)$, $G_T(p)$ соответственно

Соотношение (8) определяет математическую модель ТОА в комплексной области (комплексной плоскости переменной (p)) как объекта управления с управляющим воздействием $G_T(p)$, а (6), (7) отражают возмущающие воздействия на него.

В соответствии с изображениями компонент температуры теплоносителя (6)–(8) можно рассматривать каждую компоненту температуры на выходе ТОА в виде

$$T(1, t) = \Theta(t) - \Psi(t). \quad (9)$$

Здесь второе слагаемое является интегралом обращения вида

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{pt} \Theta(p) e^{-A(p)} dp, \quad (10)$$

где $\Theta(p)$ – дробно-рациональная функция, равная

$$\Theta(p) = -T_0(p), \quad (11)$$

$$\Theta(p) = -\frac{b_4}{A(p)} G(p) \quad (12)$$

$$\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{(vp+1)A(p)} G_T(p), \quad (13)$$

для (6)–(8) соответственно. Первое слагаемое в (9) $\Theta(t) = 0$ для (6), а для (7), (8) является оригиналом изображения $\Theta(p)$,

определяемого соотношениями (12) и (13) соответственно. Таким образом, при дробно-рациональных изображениях $G_T(p)$, $G(p)$ соответствующие функции $\Theta(t)$ могут быть определены по изображениям (12), (13) любым методом обращения дробно-рациональных изображений. Поэтому основной интерес представляет интеграл (10). Учитывая выражение (5) для $A(p)$, находим

$$\Psi(t) = 0, \quad t < b_1; \quad (14)$$

$$\Psi(t) = e^{-b_2} \vartheta(t - b_1), \quad t \geq b_1, \quad (15)$$

где

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp. \quad (16)$$

Задача анализа оригинала (16) является существенной и нетривиальной частью задачи анализа температуры $T(1, t)$ на выходе ТОА как объекта управления.

Рассмотрим возможные подходы к анализу интеграла (16). Один из них состоит в выделении вычета в существенно особой точке подынтегральной функции (16). Для этого понадобится оценка функции $\gamma(p) = \exp \frac{b_3}{vp+1}$.

Пусть $p = R e^{j\alpha}$, $R = |p|$, $\alpha = \arg p$. Тогда легко находим

$$\left| \gamma(R e^{j\alpha}) \right| \leq e^{\frac{b_3(vR \cos \alpha + 1)}{v^2 R^2 + 2vR \cos \alpha + 1}} \leq e^{\frac{b_3 v R + 1}{(vR - 1)^2}}.$$

Таким образом, на всякой окружности радиуса R с центром в начале координат при $R \rightarrow \infty$ $\left| \gamma(R e^{j\alpha}) \right| \rightarrow 1$ равномерно относительно аргумента. Поскольку $\Theta(p)$ – дробно-рациональная функция, то из этого следует, что интеграл (16) допускает применение леммы Жордана. Следовательно, его можно представить в виде

$$\vartheta(t) = \oint (t) + \mu(t), \quad (17)$$

где сумма вычетов функции в полюсах изображения $\Theta(p)$

$$\oint (t) = \sum \operatorname{res} e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}}, \quad (18)$$

а вычет в существенно особой точке

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \Theta(p) e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp. \quad (19)$$

В (19) контур интегрирования представляет собой любую окружность с центром в существенно особой точке $p = \frac{-1}{v}$, которая не охватывает полюсы функции $\Theta(p)$. Выполняя экспоненциальное разложение

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z = \frac{b_3}{v} \frac{1}{p + \frac{1}{v}}, \quad p \neq \frac{-1}{v}, \quad (20)$$

получаем для (19)

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_3}{v} \right)^k \frac{1}{k!(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} e^{pt} \Theta(p) \Big|_{p=\frac{-1}{v}} = e^{\frac{-1}{v}t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_3}{v} \right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!k!} \mu_k(t, v), \quad (21)$$

где $\mu_k(t, v)$ – многочлены степени k переменной t :

$$\mu_0(t, v) = \alpha_0, \quad \mu_1(t, v) = \alpha_0 t + \alpha_1, \quad \mu_2(t, v) = \alpha_0 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_2, \dots \quad (22)$$

и $\alpha_i = \Theta^{(i)}\left(\frac{-1}{v}\right)$ – значение i -ой производной $\Theta(p)$ при $p = \frac{-1}{v}$.

В общем виде можно записать

$$\mu_k(t, v) = (t + D)^k \Theta(p) \Big|_{p=\frac{-1}{v}}, \quad (23)$$

где $D = \frac{d}{dp}$ – оператор дифференцирования и

$$D^k \Theta(p) = \frac{d^k}{dp^k} \Theta(p), \quad k = 1, 2, \dots; \quad D^0 \Theta(p) = \Theta(p). \quad (24)$$

Другой подход к анализу интеграла (16) состоит в применении функций Бесселя. В связи с разложением (21) рассмотрим контурный интеграл

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} dp,$$

где контур интегрирования охватывает точку $p = 0$. При аналогичном с (20) использовании экспоненциального разложения имеем

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{k! 2\pi j} \oint e^{pt} \frac{1}{p^{k+1}} dp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! k!} a^k t^k = I_0(2\sqrt{at}) ,$$

где $I_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, что соотношение

$$I_0(2\sqrt{at}) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p}} \right\} \quad (25)$$

представляет собой известное табличное соответствие и успешно применяется в решении задач теплообмена [2]. Покажем, как функции Бесселя с помощью (25) могут быть введены и для рассматриваемого интеграла обращения (16). Пусть

$$T_0(p) = \frac{T_0}{p}, \quad G(p) = \frac{G_T}{p}, \quad G_T(p) = \frac{G}{p},$$

где T_0, G, G_T – заданные константы. Рассмотрим функцию изображение

$$Y(p) = \frac{1}{p - \beta} e^{\frac{\alpha}{p + \lambda}} = \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p + \lambda}} + \frac{\lambda + \beta}{p - \beta} \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p + \lambda}}. \quad (26)$$

В силу (25) и теоремы смещения имеем

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \lambda} e^{\frac{\alpha}{p + \lambda}} \right\} = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}).$$

Применяя ко второму слагаемому теорему умножения получаем оригинал для (26) в виде

$$Y(t) = e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\alpha t}) + (\lambda + \beta) e^{\beta t} \int_0^t e^{-(\lambda + \beta)\tau} I_0(2\sqrt{\alpha \tau}) d\tau. \quad (27)$$

Отсюда при $\beta = 0, \lambda = \frac{1}{v}, \alpha = \frac{b_3}{v}$ для случая (11) следует оригинал (16) $\vartheta(t) = T_0 \vartheta_0(t)$, где

$$\vartheta_0(t) = e^{\frac{-1}{v}t} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}t}) + \frac{1}{v} \int_0^t e^{\frac{-1}{v}\tau} I_0(2\sqrt{\frac{b_3}{v}\tau}) d\tau.$$

Для рассмотрения случаев (12), (13) заметим, что по (5)

$$A(p) = \frac{q_0(p)}{vp + 1}, \quad q_0(p) = vb_1 p^2 + (b_1 + vb_2)p + b_2 - b_3.$$

Таким образом, в каждом из случаев (12), (13) $\Theta(p)$ имеет три полюса $p = 0, p = \lambda_1, p = \lambda_2$, где λ_1, λ_2 нули многочлена $q_0(p)$. Из этого следует разложение на простые дроби (случай кратного полюса опускаем)

$$\Theta(p) = \frac{\delta_0}{p} + \frac{\delta_1}{p - \lambda_1} + \frac{\delta_2}{p - \lambda_2}, \quad (28)$$

и для оригинала (16) найдем

$$\vartheta(t) = \delta_0 \vartheta_0(t) + \delta_1 \vartheta_1(t) + \delta_2 \vartheta_2(t), \quad (29)$$

где выражения для $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$ получаем из (27) при $\lambda = \frac{1}{v}, \alpha = \frac{b_3}{v}$

и $\beta = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ соответственно

Замечание. Следует отметить, что нули λ_1, λ_2 многочлена $q_0(p)$ вещественные. Причем, при $b_2 - b_3 > 0$ – оба отрицательные, при $b_2 - b_3 \leq 0$ – один отрицательный, а другой – неотрицательный

Заметим, что представление оригинала (16) с помощью функций типа (27) может быть распространено на более общий случай дробно-рациональных изображений $T_0(p), C_T(p), G(p)$ расширением разложений вида (28).

Рассмотрим динамические характеристики ТОА как объекта управления. В качестве исходного соотношения принимаем равенство (8), которое запишем в виде

$$T(1, p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)} [1 - e^{-A(p)}] G_T(p),$$

где многочлен $q_0(p)$ будем называть характеристическим многочленом объекта управления, а функцию

$$W_O(p) = \frac{a_2 b_3}{q_O(p)} [1 - e^{-A(p)}]$$

– передаточной функцией объекта по управляющему воздействию $G_T(p)$. В качестве динамических характеристик временной области примем весовую и единичную переходную функции объекта управления соответственно

$$g_O(t) = L^{-1}\{W_O(p)\} \quad \text{и} \quad h_O(t) = L^{-1}\left\{W_O(p) \frac{1}{p}\right\}.$$

Для построения этих функций используем соотношение (9), в котором оригинал изображения

$$\Theta(t) = L^{-1}\{\Theta(p)\},$$

а $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)} G_T(p)$ и $\Psi(t)$ определено соотношениями (10),(14)-

(16). Причем, следует принять $G_T(p) = 1$ и $G_T(p) = \frac{1}{p}$ для весовой и единичной переходной функции соответственно

При вычислении функции $\vartheta(t)$ можно использовать два типа представлений. В первом (выделение вычета в существенно особой точке), при вычислении (16) используются соотношения (17),(18) и (21)-(24) с функцией

$$\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)}.$$

Во втором (применение функций Бесселя) – функция $\Theta(p)$ представляется в виде суммы простых дробей

$$\Theta(p) = \frac{\delta_0}{p} + \frac{\delta_1}{p - \lambda_1} + \frac{\delta_2}{p - \lambda_2},$$

где λ_1, λ_2 – нули характеристического многочлена $q_0(p)$. Коэффициенты разложения (28) для весовой и единичной переходной функции соответственно равны

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = \lim_{p \rightarrow \lambda_1} (p - \lambda_1) \Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_1)}, \delta_2 = \lim_{p \rightarrow \lambda_2} (p - \lambda_2) \Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_2)}$$

и

$$\delta_0 = \frac{a_2 b_3}{q_0(0)}; \delta_1 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_1 q'_0(\lambda_1)}; \delta_2 = \frac{a_2 b_3}{\lambda_2 q'_0(\lambda_2)}.$$

Вычисление функции $\vartheta(t)$ по (16) при разложении (28) дает соотношение (29), в котором

$$\vartheta_i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \frac{1}{p - \lambda_i} e^{\frac{b_3}{vp+1}} dp, \quad i = 0, 1, 2, \quad (30)$$

причем $\lambda_0 = 0$. Интегралы (30) вычисляются с помощью соотношений (26), (27). Пусть левая часть равенства (27) записана в виде $Y(t; \beta)$. Учитывая, что в (31) $\alpha = \frac{b_3}{v}$, $\lambda = \frac{1}{v}$ – неизменные параметры, а параметр β имеет значения $\beta = 0, \beta = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ для

функций $\vartheta_0(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$ соответственно в силу соотношений (26), (27) будем иметь

$$\vartheta_0(t) = Y(t; 0), \quad \vartheta_1(t) = Y(t, \lambda_1), \quad \vartheta_2(t) = Y(t, \lambda_2).$$

Таким образом, для динамических характеристик ТОА получаем следующие представления:

Весовая функция $g_0(t)$ (представление первого типа)

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[\frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t < b_1;$$

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[\frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \vartheta(t - b_1), \quad t \geq b_1.$$

Функция $\vartheta(t)$ определена как

$$\vartheta(t) = a_2 b_3 \left[\frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_1+1}} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\frac{b_3}{v\lambda_2+1}} e^{\lambda_2 t} \right] + e^{\frac{-1}{v}t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_3}{v} \right)^{k+1} \frac{1}{k!(k+1)!} \mu_k(t, v).$$

Здесь (см. (22) – (24)) следует принять $\Theta(p) = \frac{a_2 b_3}{q_0(p)}$.

Весовая функция $g_0(t)$ (представление второго типа)

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[\frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right], \quad 0 \leq t \leq b_1;$$

$$g_0(t) = a_2 b_3 \left[\frac{1}{q'_0(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{q'_0(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \right] - e^{-b_2} \vartheta(t - b_1), \quad t \geq b_1,$$

где

$$\vartheta(t) = \delta_1 Y(t, \lambda_1) + \delta_2 Y(t, \lambda_2); \quad \delta_1 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_1)}, \quad \delta_2 = \frac{a_2 b_3}{q'_0(\lambda_2)}.$$

Аналогичным образом можно получить представления единичной переходной функции $h_0(t)$.

Заключение. Выполненное исследование применения преобразования Лапласа к анализу динамики ТОА как объекта управления имеет два основных результата. Во-первых, построена аналитическая модель ТОА как объекта управления в комплексной области (области изображений), позволяющая далее рассматривать задачи анализа САУ ТОА. Во-вторых, предложены эффективные методы анализа типовых динамических характеристик весовой и единичной переходной функции в выходном сечении ($x = 1$) ТОА. Причем, эти методы точные (адекватные первичной модели в виде дифференциальных уравнений в частных производных). Следует

отметить, что аналогичным образом динамические характеристики можно исследовать и в любом ($x \neq 1$) другом сечении ТОА.

Представляется, что полученные результаты позволят по новому подойти к анализу задачи управления (регулирования) температурой на выходе ТОА с полным учетом аналитических особенностей модели САУТОА.

Библиографический список

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе — М.: Атомиздат 1979. — 415 с.
2. Себиси Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу. — М.: Мир, 1987. — 589 с.
3. Сыромятников В.Ф. Наладка автоматики судовых энергетических установок / В.Ф. Сыромятников — Л.: Судостроение 1980. — 352 с.

Поступила в редакцию 22.02.2005 г.