

У ДК 681.511

**Е.В. Лазарева**

Севастопольский национальный технический университет  
Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: [lev@sevcom.net](mailto:lev@sevcom.net)

## МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ МНОГОТАКТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С КРАТНЫМИ ТАКТАМИ ДИСКРЕТНОСТИ

*Рассматривается задача описания линейной многотактной цифровой системы автоматического управления системой дифференциально-разностных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами.*

**Введение.** Управление современными сложными техническими объектами, характерно широким применением цифровых измерительных и управляющих устройств (рисунок 1). В общем случае подобные цифровые системы управления имеют математическое описание в классе дифференциально-разностных систем уравнений.

Представляется важным разработка методов анализа в этом классе систем, в которых одновременно происходит несколько дискретных процессов, протекающих с различными тактами, – так называемых многотактных систем. Присутствие нескольких дискретных процессов может быть обусловлено тем, что измерения величин, имеющих различную скорость изменения целесообразно производить с различными периодами.

В статье рассматриваются многотактные цифровые системы, в которых такты дискретных процессов кратны некоторой постоянной  $\tau$ . В таком случае система функционирует как однотактная с постоянным тактом квантования по времени [1, 2]. Однако эквивалентная ей модель, вообще говоря, имеет



Рисунок 1 – Схема многотактной цифровой системы автоматического управления

переменные коэффициенты. В статье предлагается построение однократной модели, которая эквивалентна рассматриваемой многократной и не имеет коэффициентов, зависящих от времени.

**1. Постановка задачи.** Объект управления описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(t),$$

где  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  – вектор состояния системы;  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  – вектор управления;  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей, характеризующие объект управления.

С помощью цифровых датчиков осуществляется формирование вектора измерений  $\mathbf{y}$ , состоящего из  $r$  независимых переменных и определённого на дискретном множестве моментов  $\Theta = \{t_k : t_k = k\tau; \tau > 0; k = 0, 1, 2, \mathbf{K}\}$ . Сигнал измерений сформирован из переменных  $y_l$ ,  $l = 1, 2, \mathbf{K}, r$ , каждая из которых измеряется со своим интервалом  $T_l$ , кратным шагу квантования системы  $\tau$ :  $T_l = N_l \tau$ . Считается, что для некоторых переменных интервалы измерений могут быть одинаковыми. Между моментами измерений значения переменных принимаются равными последнему измеренному значению:

$$y_l(t_k) = \begin{cases} \mathbf{C}_l \mathbf{x}(t_k - \tau_s), & \left\{ \frac{t_k}{T_l} \right\} = 0; \\ y_l(t_k - \tau_s), & \left\{ \frac{t_k}{T_l} \right\} \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\left\{ \frac{t_k}{T_l} \right\}$  – остаток от деления  $t_k$  на  $T_l$ ;  $\tau_s$  – запаздывание сигнала

измерений, которое предполагается бесконечно малым ( $\tau_s \approx 0$ ).

По измеренным переменным управляющий компьютер формирует цифровой сигнал обратной связи:

$$\mathbf{u}_{oc}(t) = \mathbf{K} \cdot y_l(t_{k-1}), \quad t_{k-1} \leq t < t_k,$$

где  $\mathbf{K}$  – матрица, характеризующая линейный закон управления. Перед подачей на исполнительные устройства дискретный сигнал управления экстраполируется экстраполятором нулевого порядка и суммируется с внешним задающим воздействием:  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{u}_{oc}(t)$ .

**2. Модель с переменными коэффициентами.** Рассмотрение функцию, определенную для натурального числа  $N$  на множестве целых чисел  $k$

$$\sigma_N(k) = \begin{cases} 1, & \left\{ \frac{k}{N} \right\} = 0; \\ 0, & \left\{ \frac{k}{N} \right\} \neq 0. \end{cases}$$

Примеры гистограмм двух функций  $\sigma_N(k)$  приведены на рисунке 2.

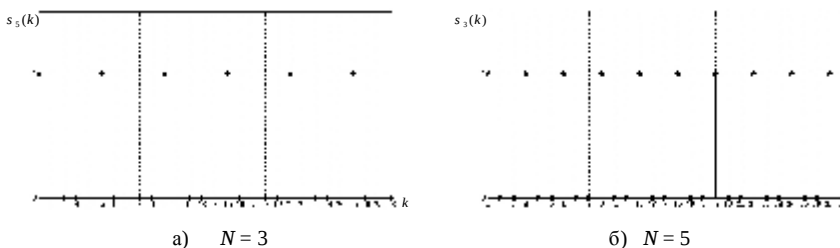


Рисунок 2 – Гистограммы функции  $\sigma_N(k)$

Переменные измерений  $y_l(t_k)$  из (1) **Ошибка! Источник ссылки не найден.** зависят через коэффициенты  $\sigma_{N_l}(k)$  от вектора состояний системы  $\mathbf{x}$  и от своего значения на предыдущем такте

$$y_l(t_k) = (1 - \sigma_{N_l}(k))y_l(t_{k-1}) + \sigma_{N_l}(k)C_l\mathbf{x}(t_k - 0). \quad (2)$$

Пусть вектор состояния системы автоматического управления состоит из переменных объекта управления  $\mathbf{x}(t)$  и  $r$  переменных, учитывающих работу датчиков  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}(t)^T, y_1(t), \mathbf{K}, y_r(t)]^T$ . Тогда многотактная цифровая система автоматического управления описывается системой дифференциально-разностных уравнений с коэффициентами, зависящими от номера такта  $k$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}_n\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_n\mathbf{u}_3(t), & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{a}_d(k)\tilde{\mathbf{x}}(t_k - 0), & t_k \in \Theta, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{S}(1) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t_0); \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{a}_o(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{L} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \sigma_{N_1}(k) \mathbf{C}_1 & (1 - \sigma_{N_1}(k)) & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ \sigma_{N_2}(k) \mathbf{C}_2 & 0 & (1 - \sigma_{N_2}(k)) & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \cdot & \cdot & \mathbf{O} & \cdot \\ \sigma_{N_r}(k) \mathbf{C}_r & 0 & 0 & \mathbf{L} & (1 - \sigma_{N_r}(k)) \end{bmatrix}.$$

**4. Комплексная модель многотактной системы управления.** Для функции  $\sigma_N(k)$  и  $N$  комплексных чисел  $1, e^{\frac{2\pi}{N}i}, e^{\frac{4\pi}{N}i}, \dots, e^{\frac{(N-1)\pi}{N}i}, \mathbf{K}, e^{\frac{2(N-1)\pi}{N}i}$  справедливо тождество

$$\sigma_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} j_N^{kl}, \quad j_N = e^{\frac{2\pi}{N}i}.$$

$$\text{Например, } \sigma_2(k) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k), \quad \sigma_3(k) = \frac{1}{3} \left( 1 + e^{\frac{4\pi}{3}ki} + e^{\frac{2\pi}{3}ki} \right),$$

$$\sigma_4(k) = \frac{1}{4}(1 + (i)^k + (-1)^k + (-i)^k),$$

$$\sigma_5(k) = \frac{1}{5} \left( 1 + e^{\frac{2\pi}{5}ki} + e^{\frac{4\pi}{5}ki} + e^{\frac{6\pi}{5}ki} + e^{\frac{8\pi}{5}ki} \right). \quad \text{Поэтому функцию}$$

$\sigma_N(k)$  можно также определить суммированием элементов функции-столбца  $\mathbf{s}^T(k) = [1 \quad j_N^k \quad j_N^{2k} \quad \mathbf{K} \quad j_N^{(N-1)k}]^T$ , обладающей свойством периодичности  $\mathbf{s}(k) = \mathbf{s}(k + N)$ :

$$\sigma_N(k) = \frac{1}{N} [1 \quad 1 \quad \mathbf{K} \quad 1] \cdot \mathbf{s}(k).$$

Рассмотрим функции  $\sigma_N(k)$  и  $\sigma_{N_0}(k)$ , такие, что число  $N$  делится нацело на  $N_0$ , т.е.  $N = n_0 N_0$ . Они формируются сложением одних и тех же компонент, но в разных степенях, так как  $j_{N_0} = (j_N)^{n_0}$ :

$$\sigma_{N_0}(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{N_0-1} e^{\frac{2\pi k l}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{N_0-1} j_N^{k(n_0 l)}. \quad (4)$$

Поэтому

$$\sigma_{N_0}(k) = \pi \cdot s(k),$$

$$\pi = \frac{1}{N_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{K} & 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 & & n_0-1 & n_0 & n_0+1 & & 2n_0-1 & 2n_0 & 2n_0+1 & & N-n_0 & N-n_0+1 & & N-1 \end{bmatrix}$$

где  $\mathbf{p}$  – матрица, в которой положение единиц соответствует слагаемым, входящим в сумму (4).

Аналогичное представление существует и для  $r$  функций  $\sigma_{N_1}(k), \sigma_{N_2}(k), \mathbf{K}, \sigma_{N_r}(k)$ , ( $N = n_l N_l$ ,  $l = \overline{1, r}$ ), которые выступают в роли сомножителей в формуле (2). Поэтому:

$$y_l(t_k) = y_l(t_k - 0) + \tilde{\mathbf{C}}_l \mathbf{\Pi}_l \cdot \mathbf{S}(k) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t_k - 0), \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{C}}_l = [\mathbf{C}_l \begin{smallmatrix} 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 1 & & l-1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 \\ & l & l-1 \end{smallmatrix} \mathbf{K} \begin{smallmatrix} 0 \\ r \end{smallmatrix}]$  – матрица-строка  $[1 \times (n + r)]$ ;

$$\mathbf{\Pi}_l = \frac{1}{N_l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \mathbf{K} & 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{K} & 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 & & n_l-1 & n_l & n_l+1 & & 2n_l-1 & 2n_l & 2n_l+1 & & N-n_l & N-n_l+1 & & N-1 \end{bmatrix}$$

– матрица, составленная из единичных и нулевых матриц размера  $[(n + r) \times (n + r)]$ ;  $\mathbf{S}^T(k) = [\mathbf{I} \ j_N^k \mathbf{I} \ j_N^{2k} \mathbf{I} \ \mathbf{K} \ j_N^{(N-1)k} \mathbf{I}]^T$ .

С учетом представления (5), матрица  $\mathbf{a}_o(k)$  эквивалентна произведению вещественной постоянной матрицы, которую мы разбили на  $N$  квадратных блоков, и комплексной матричной функции от номера такта  $k$ :

$$\mathbf{a}_o(k) = [\mathbf{L}_0 \mid \mathbf{L}_1 \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L}_{N-1}] \cdot \mathbf{S}(k).$$

Введём  $N$  дополнительных векторов размера  $(n + r)$ , отличающихся от  $\tilde{\mathbf{x}}$  умножением на один из комплексных коэффициентов столбца  $\mathbf{s}(k)$ , и составим из них расширенный комплексный вектор:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ j_N^k \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ j_N^{2k} \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ j_N^{(N-1)k} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}(k) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad t_{k-1} \leq t < t_k. \quad (6)$$

Вектор  $\mathbf{X}(t)$  на интервалах  $t_{k-1} \leq t < t_k$  изменяется непрерывно (все его компоненты характеризуются дифференциальным уравнением из системы (3)), а в моменты  $t_k \in \Theta$  его составляющие претерпевают изменения в соответствии с разностным уравнением:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{L}_0 \tilde{\mathbf{x}}(t_k - 0) + \mathbf{L}_1 (j_N^k \tilde{\mathbf{x}}(t_k - 0)) + \mathbf{K} + \mathbf{L}_{N-1} (j_N^{(N-1)k} \tilde{\mathbf{x}}(t_k - 0)).$$

Поэтому замкнутая многотактная система управления описывается системой дифференциально-разностных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_n \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_n \mathbf{U}(t), & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \mathbf{X}(t_k) = \mathbf{A}_o \mathbf{X}(t_k - 0), & t_k \in \Theta, \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{X}(t), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_n & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{O} & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{a}_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_o = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{L}_0 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L} & \mathbf{L}_{N-1} \\ \hline j_N \mathbf{L}_{N-1} & j_N \mathbf{L}_0 & j_N \mathbf{L}_1 & \mathbf{L} & j_N \mathbf{L}_{N-2} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline j_N^{N-1} \mathbf{L}_1 & j_N^{N-1} \mathbf{L}_2 & j_N^{N-1} \mathbf{L}_3 & \mathbf{L} & j_N^{N-1} \mathbf{L}_0 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_n & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{O} & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{b}_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3(t) \\ j_N^k \mathbf{u}_3(t) \\ \mathbf{M} \\ j_N^{(N-1)k} \mathbf{u}_3(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}]; \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{S}(1) \tilde{\mathbf{x}}(t_0).$$

**5. Пример.** Рассмотрим систему автоматического управления современным вертолётом боевого назначения [3]. Управляемой переменной является угол наклона  $\theta$ , изменяемый за счет углового положения несущего винта  $\delta$ . Его движение описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -0.415 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} - 0.0111 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + 6.27 \cdot \delta(t), \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 9.81 \cdot \theta(t) - 1.43 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} - 0.0198 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + 9.81 \cdot \delta(t), \end{cases}$$

где  $x$  – перемещение в горизонтальном направлении. Датчики производят измерения скоростей  $\dot{\theta}(t)$  и  $\dot{x}(t)$  с интервалом  $\tau = 0,05$  сек, а угла наклона  $\theta(t)$  с периодом

$2\tau = 0,1$  сек. Управляющий компьютер по цифровым данным генерирует сигнал управления в соответствии с линейным законом:

$$\delta(t) = u_3(t) - 6 \cdot \theta(t) - 0,6 \cdot \dot{\theta}(t) - \ddot{\theta}(t).$$

Так как система является двухтактной, то комплексный множитель  $j_2 = -1$ , а система дифференциально-разностных уравнений с комплексными коэффициентами выражается в систему с вещественными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_H \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_H \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{A}_\delta \cdot \mathbf{X}(t_k - 0),$$

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}] \cdot \mathbf{X}(t),$$

$$\text{где } \mathbf{X}(t) = [\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)]^T;$$

$$\mathbf{u}(t) = [\delta(t), (-1)^k \delta(t)];$$

$$\mathbf{a}_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,415 & -0,0111 & -37,62 & -3,762 & -6,27 \\ 9,81 & -1,43 & -0,0198 & -58,86 & -5,886 & -9,81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,27 \\ 9,81 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_\delta = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Данная цифровая система автоматического управления асимптотически устойчива, так как модули  $|\lambda|$  всех собственных чисел матрицы  $A_0 \exp(A_n \tau)$ , удовлетворяющих характеристическому уравнению  $\det[\lambda I - A_0 \exp(A_n \tau)] = 0$ , меньше единицы.

**Выводы.** Предложенный способ описания системы позволяет разрабатывать методы анализа и синтеза многотактных цифровых систем автоматического управления, сравнимые по простоте с методами, существующими для однитактных цифровых систем.

Определенные затруднения при работе с моделью (7) вызывает ее высокая размерность и присутствие комплексных коэффициентов. Однако, ресурсы современных ЭВМ допускают создание программного обеспечения для операций с большими числовыми массивами, что позволяет надеяться на эффективное использование указанной однитактной модели.

#### ***Библиографический список***

1. Барабанов А.Т. Методы ковариационного анализа многотактных нестационарных непрерывно-дискретных систем со случайными входами / А.Т. Барабанов, Е.А. Драчев, Ю.И. Томин // Адаптивные системы автоматического управления. — К.: Техника 1974. — Вып. 2. — С. 57–63.
2. Разработка математических методов и программных средств исследования аналого-цифровых систем управления многомерными объектами. Отчет о НИР (заключит.) / Севастоп. гос. техн. ун-т (СевГТУ); Руководитель А.Т. Барабанов. — № ГР0193U007446; Инв. № 0396V007342. — Севастополь, 1995. — 251 с.: ил. Отв. испол. А.Т. Барабанов. — Библиогр.: С. 248–251.
3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. — М.: Изд-во Лаборатория Базовых Знаний, 2002. — 832 с.

***Поступила в редакцию 4.04.2005 г.***