

У ДК 681.511.4

Д.Н. Старинская

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА АНАЛИЗА АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Рассматривается пример модели автоколебательной системы с двумя степенями свободы – система двух связанных генераторов. Предложена алгебраическая форма метода гармонического баланса для указанной системы.

Введение

Теория нелинейных колебаний является интенсивно развивающейся ветвью современной теории управления. В автоколебательных системах с несколькими степенями свободы возможно явление синхронизации периодических режимов. В общем смысле синхронизация понимается как подстройка ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними [1]. Явление синхронизации нелинейных колебательных систем привлекает интерес многих исследователей в области теории автоматического управления, физики, теории хаоса; см., например, монографии [1,2] и библиографические обзоры в [1].

Классическим примером автоколебательной системы с двумя степенями свободы является система двух связанных генераторов. При определенных соотношениях между частотами этих генераторов в такой системе наблюдается явление взаимной синхронизации.

1. Постановка задачи

Представленная в [2] математическая модель системы двух связанных генераторов имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \mu_1 F_1(x_1, \dot{x}_1) + \omega_1^2 x_1 &= \gamma_{11} \ddot{x}_2 + \gamma_{12} \dot{x}_2 + \gamma_{13} x_2, \\ \ddot{x}_2 - \mu_2 F_2(x_2, \dot{x}_2) + \omega_2^2 x_2 &= \gamma_{21} \ddot{x}_1 + \gamma_{22} \dot{x}_1 + \gamma_{23} x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

где x_1, x_2 – напряжения на входе усилителей; ω_1, ω_2 – собственные частоты колебательных контуров; μ_1, μ_2 – превышение над порогом генерации; $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ – коэффициенты индуктивной и емкостной связи; γ_{12}, γ_{22} – коэффициенты связи через сопротивления; $F_1(x_1), F_2(x_2)$ –

функции, характеризующие нелинейные свойства усилителей. Будем рассматривать

$$F_1(x_1, \dot{x}_1) = -\gamma_1 x_1^2 \dot{x}_1, \quad F_2(x_2, \dot{x}_2) = -\gamma_2 x_2^2 \dot{x}_2. \quad (2)$$

Решения системы (1) будем искать в виде

$$x_1(t) = a_1 \sin \omega t, \quad x_2(t) = a_2 \sin \omega t,$$

где ω – частота синхронных автоколебаний а a_1, a_2 – амплитуды

В результате применения преобразования Лапласа к системе (1) получим:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \frac{s^2 + \omega_2^2}{\gamma_{21}s^2 + \gamma_{22}s + \gamma_{23}} x_2(s) - \frac{\mu_2}{\gamma_{21}s^2 + \gamma_{22}s + \gamma_{23}} F_2(x_2, s x_2) \\ x_2(s) &= \frac{s^2 + \omega_1^2}{\gamma_{11}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{13}} x_1(s) - \frac{\mu_1}{\gamma_{11}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{13}} F_1(x_1, s x_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Целью данной работы является применение к анализу системы (3) метода гармонического баланса в алгебраической (полиномиальной) форме.

Традиционно метод гармонического баланса применяется в графоаналитическом виде. Однако использование графоаналитических методов в современных САПР и АСНИ затруднительно по следующим причинам. Во-первых, при построении частотной характеристики невозможно вычислить все континуальное множество её точек, поэтому ограничиваются конечным их числом, что может привести к неправильному представлению о форме кривой, а следовательно и к неправильному выводу о свойствах системы. Во-вторых, необходимость геометрических построений и их визуального анализа исследователем ограничивает возможности автоматизации исследований.

Поэтому предложенный в [3] подход к решению ряда фундаментальных задач теории систем (в том числе, проблем исследования нелинейных САУ) как задач полиномиального анализа представляется наиболее полным, поскольку позволяет устранять все вышеперечисленные препятствия, сохраняя в то же время основные достоинства частотных методов и повышая их точность.

2. Уравнение гармонического баланса

Произведя гармоническую линеаризацию нелинейных характеристик (2), получим

$$F_1(x_1, sx_1) \approx K_1 sx_1, \quad K_1 = (-\gamma_1 / 4) a_1; \quad F_2(x_2, sx_2) \approx K_2 sx_2, \quad K_2 = (-\gamma_2 / 4) a_2 \quad (4)$$

С учетом (4) систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1(s) = -W_{12}(s)x_2(s) - W_{11}(s)K_2(a_2)x_2, \\ x_2(s) = -W_{22}(s)x_1(s) - W_{21}(s)K_1(a_1)x_1 \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} W_{11}(s) &= \frac{\mu_2 s}{\gamma_{21}s^2 + \gamma_{22}s + \gamma_{23}}, & W_{12}(s) &= -\frac{s^2 + \omega_2^2}{\gamma_{21}s^2 + \gamma_{22}s + \gamma_{23}}, \\ W_{21}(s) &= \frac{\mu_1 s}{\gamma_{11}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{13}}, & W_{22}(s) &= -\frac{s^2 + \omega_1^2}{\gamma_{11}s^2 + \gamma_{12}s + \gamma_{13}}. \end{aligned}$$

Тогда условие гармонического баланса примет вид

$$-1 = (W_{12}(s) + W_{11}(s)K_2)(-W_{22}(s) - W_{21}(s)K_1(a_1)). \quad (6)$$

Добавим к уравнению (6) соотношение между искомыми амплитудами, следующее из первого уравнения системы (5)

$$a_1 = |-W_{12}(s) - W_{11}(s)K_2(a_2)|a_2. \quad (7)$$

Применим для вещественных $P_{ij}(\omega) = \operatorname{Re} W_{ij}(j\omega)$, мнимых

$Q_{ij}(\omega) = \operatorname{Im} W_{ij}(j\omega)$ и амплитудных $M_{ij}^2(\omega) = |W_{ij}(j\omega)|^2$ частотных характеристик представления в виде дробно-рациональных функций вещественной переменной [3]

$$P_{11}(\omega) = \frac{A_{11}(\xi)}{D_1(\xi)}, \quad P_{12}(\omega) = \frac{A_{12}(\xi)}{D_1(\xi)}, \quad P_{21}(\omega) = \frac{A_{21}(\xi)}{D_2(\xi)}, \quad P_{22}(\omega) = \frac{A_{22}(\xi)}{D_2(\xi)};$$

$$\omega Q_{11}(\omega) = \frac{B_{11}(\xi)}{D_1(\xi)}, \quad \omega Q_{12}(\omega) = \frac{B_{12}(\xi)}{D_1(\xi)}, \quad \omega Q_{21}(\omega) = \frac{B_{21}(\xi)}{D_2(\xi)},$$

$$\omega Q_{22}(\omega) = \frac{B_{22}(\xi)}{D_2(\xi)}; \quad (8)$$

$$M_{11}^2(\omega) = \frac{d_{11}(\xi)}{D_1(\xi)}, \quad M_{12}^2(\omega) = \frac{d_{12}(\xi)}{D_1(\xi)}$$

где $\xi = -\omega^2$.

С учетом представлений (8) уравнение гармонического баланса (6) получит вид

$$\begin{aligned}
-1 = & -\left(\frac{A_{12}}{D_1} + j \frac{B_{12}}{\omega D_1}\right) \left(\frac{A_{22}}{D_2} + j \frac{B_{22}}{\omega D_2}\right) - \left(\frac{A_{12}}{D_1} + j \frac{B_{12}}{\omega D_1}\right) \left(\frac{A_{21}}{D_2} + j \frac{B_{21}}{\omega D_2}\right) K_1 - \\
& - \left(\frac{A_{11}}{D_1} + j \frac{B_{11}}{\omega D_1}\right) \left(\frac{A_{22}}{D_2} + j \frac{B_{22}}{\omega D_2}\right) K_2 - \left(\frac{A_{11}}{D_1} + j \frac{B_{11}}{\omega D_1}\right) \left(\frac{A_{21}}{D_2} + j \frac{B_{21}}{\omega D_2}\right) K_1 K_2
\end{aligned}
\tag{9}$$

а соотношение (7) примет форму

$$a_1^2 = \left(\frac{d_{12}}{D_1} + 2K_2 \frac{A_{11}A_{12}}{D_1^2} - 2K_2 \frac{B_{11}B_{12}}{\xi D_1^2} + K_2^2 \frac{d_{11}}{D_1} \right) a_2^2.
\tag{10}$$

Выделив в (9) уравнения для вещественной и мнимой частей, получим

$$\left. \begin{aligned}
-1 = & -\frac{A_{12}}{D_1} \frac{A_{22}}{D_2} - \frac{B_{12}}{\xi D_1} \frac{B_{22}}{D_2} - \frac{A_{12}}{D_1} \frac{A_{21}}{D_2} K_1 - \frac{B_{12}B_{21}}{\xi D_1 D_2} K_1 - \\
& - \frac{A_{11}}{D_1} \frac{A_{22}}{D_2} K_2 - \frac{B_{11}}{\xi D_1} \frac{B_{22}}{D_2} K_2 - \frac{A_{11}}{D_1} \frac{A_{21}}{D_2} K_1 K_2 - \frac{B_{11}B_{21}}{\xi D_1 D_2} K_1 K_2 \\
0 = & -\frac{A_{12}}{D_1} \frac{B_{22}}{D_2} - \frac{A_{22}}{D_2} \frac{B_{12}}{D_1} - \frac{A_{12}}{D_1} \frac{B_{21}}{D_2} K_1 - \frac{A_{21}}{D_2} \frac{B_{12}}{D_1} K_1 - \\
& - \frac{A_{11}}{D_1} \frac{B_{22}}{D_2} K_2 - \frac{A_{22}}{D_2} \frac{B_{11}}{D_1} K_2 - \frac{A_{11}}{D_1} \frac{B_{21}}{D_2} K_1 K_2 - \frac{A_{21}}{D_2} \frac{B_{11}}{D_1} K_1 K_2
\end{aligned} \right\}.
\tag{11}$$

Избавляясь от знаменателей в (10), (11) и учитывая (4), приняв для простоты $\gamma_1 = \gamma_2$, получим

$$\left. \begin{aligned}
0 = & \xi D_1 D_2 - \xi A_{12} A_{22} - B_{12} B_{22} - \xi A_{12} A_{21} K_1 - B_{12} B_{21} K_1 - \\
& - \xi A_{11} A_{22} K_2 - B_{11} B_{22} K_2 - \xi A_{11} A_{21} K_1 K_2 - B_{11} B_{21} K_1 K_2 \\
0 = & A_{12} B_{22} + A_{22} B_{12} + A_{12} B_{21} K_1 + A_{21} B_{12} K_1 + \\
& + A_{11} B_{22} K_2 + A_{22} B_{11} K_2 + A_{11} B_{21} K_1 K_2 + A_{21} B_{11} K_1 K_2 \\
0 = & K_1 \xi D_1^2 - (\xi D_1 d_{12} + 2K_2 \xi A_{11} A_{12} - 2K_2 B_{11} B_{12} + K_2^2 \xi D_1 d_{11}) K_2
\end{aligned} \right\}
\tag{12}$$

Система (12) представляет собой систему трех полиномиальных уравнений от трех неизвестных.

4. Пример

Примем следующие численные значения параметров генераторов

$$\omega_1 = 3,1; \quad \omega_2 = 3,2; \quad \mu_1 = 0,25; \quad \mu_2 = 0,3;$$

$$\gamma_{11} = 0,11; \quad \gamma_{12} = 0,12; \quad \gamma_{13} = 0,13; \quad \gamma_{21} = 0,21; \quad \gamma_{12} = 0,12; \quad \gamma_{13} = 0,13;$$

$$\gamma_1 = 0,1; \gamma_2 = 0,1.$$

Расчеты проводились в системе Matlab, с использованием средств библиотек Symbolic Math Toolbox и Extended Symbolic Math Toolbox, внедряющих возможность символьческих вычислений в среду Matlab. Средствами этих библиотек осуществляется подключение к системе Matlab ядра и пакетов системы компьютерной алгебры Maple, которая обеспечивает символьческие вычисления и содержит, в частности, пакет Groebner для работы с базисами Гребнера. Метод базисов Гребнера позволяет приводить системы полиномиальных уравнений к «треугольному» виду путем последовательного исключения переменных [5].

В результате расчетов получено значение частоты автоколебаний $\omega = \sqrt{-\xi_0} = \sqrt{8,5702} = 2,9275$.

Результаты моделирования процессов в системе двух связанных генераторов путем интегрирования дифференциальных уравнений представлены на рисунке 1.

По результатам моделирования можно рассчитать амплитуду и период (а следовательно и частоту) автоколебаний. Для переменных x_1 и x_2 эти параметры имеют значения: амплитуда $a_1 = 4,9443$; $a_2 = 6,6951$; период $T_1 = 0,9356$; $T_2 = 0,9355$; частота $\omega_{01} = 3,3578$; $\omega_{02} = 3,3581$. Видно, что наблюдается явление синхронизации $\omega_{01} \approx \omega_{02}$.

Выводы

Получена алгебраическая форма уравнения гармонического баланса для системы двух связанных генераторов, основывающаяся на представлении частотных характеристик линейных частей в виде дробно-рациональных функций вещественной переменной. Решение полученной системы полиномиальных уравнений может быть осуществлено в пакете инженерных и научных вычислений Matlab с применением библиотек системы компьютерной алгебры Maple.

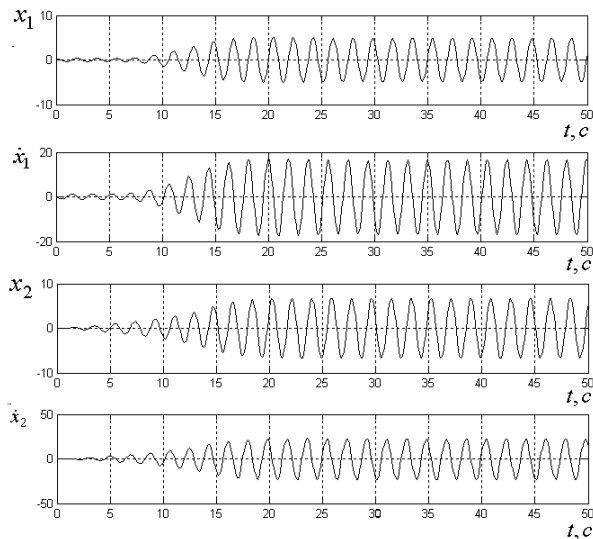


Рисунок 1 – Результаты моделирования процессов в системе двух связанных генераторов

Предложенный метод не требует графических построений и, следовательно, свободен от недостатков, присущих традиционному графоаналитическому подходу

Библиографический список

1. Пиковский А.С. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление / А.С. Пиковский, М.Г. Розенблум, Ю. Куртс — М.: Изд-во «Техносфера», 2003. — 508 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П.С. Ланда. — М.: Наука, 1980. — 360 с.
3. Барабанов А.Т. Метод Рауса в теории систем. Обобщение проблемы Рауса в задачах теории систем / А.Т. Барабанов // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 35–44.
4. Барабанов А.Т. Алгебраическая форма анализа периодических режимов в системе с релейной гистерезисной нелинейностью / А.Т. Барабанов, Д.Н. Старинская // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2003. — Вып. 49. — С. 19–24.
5. Кокс Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. — М.: Мир, 2000. — 687 с.

Поступила в редакцию 4.04.2005 г.