

УДК 621.52

В.Я. Копц, профессор, д-р техн. наук; А.И. Балакин, ассистент;

А.А. Скидан, доцент; А.В. Коноваленко, магистрант

Севастопольский национальный технический университет

Севастопольский национальный технический университет ядерной энергии и промышленности

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: ps@sevgtu14.sebastopol.ua

ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ДВУХКООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается повышение точности измерительных систем на основании выбора числа повторных двухкоординатных измерений, минимум которых определяется на основе анализа дифференциальной энтропии измеряемых величин.

Повышение точности измерительных систем является необходимым условием улучшения качества продукции.

Известен подход [1], основанный на выборе оптимального числа повторных однокоординатных измерений, позволяющий уменьшить дисперсию их результата. В указанной работе необходимый минимум повторных измерений выбирается на основе анализа дифференциальной энтропии измеряемой величины, максимум которой соответствует наиболее неблагоприятному варианту.

Целью данной работы является распространение указанного подхода на двухкоординатные измерения. Основной сложностью является определение вида двумерной плотности распределения $p(x, y)$ случайных величин ξ_x, ξ_y , соответствующих погрешностям измерений по координатам x, y , при известных предельных значениях этих погрешностей $(\pm\alpha), (\pm\beta)$. Кроме этого предполагается, что из статистических исследований известны дисперсии σ_x^2, σ_y^2 случайных величин ξ_x, ξ_y .

Математическая постановка формулируется следующим образом.

Необходимо определить:

$$\max \rightarrow \left\{ H_{\text{диф.}} = - \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x, y) \cdot \ln p(x, y) \cdot dx \cdot dy \right\}, \quad (1)$$

при условиях:

$$\left\{ \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x, y) \cdot dx \cdot dy = 1, \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{20}[x, y], \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{02}[x, y], \right. \quad (4)$$

где $\alpha_{02}[x, y], \alpha_{20}[x, y]$ – центральные моменты случайных величин ξ_x, ξ_y .

Составляем и решаем уравнение Эйлера:

$$F_{\Sigma}(x, y) = -p(x, y) \cdot \ln p(x, y) + \lambda p(x, y) + \lambda_3 x^2 p(x, y) + \lambda_4 y^2 p(x, y)$$

$$\frac{dF_{\Sigma}(x, y)}{dP(x, y)} = -\ln P(x, y) - 1 + \lambda + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot y^2 = 0,$$

где $\lambda, \lambda_3, \lambda_4$ – множители Лагранжа,

$$p(x, y) = e^{-1+\lambda+\lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot y^2}. \quad (5)$$

Вводим допущение о независимости переменных:

$$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y). \quad (6)$$

Учитывая (6), преобразуем (3), (4):

$$\begin{aligned} \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy &= \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p_1(x) p_2(y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} p_2(y) \cdot dy \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p_1(x) \cdot dx = \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p_1(x) \cdot dx = \sigma_x^2; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\beta-\alpha}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy &= \int_{-\beta-\alpha}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 p_1(x) p_2(y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(x) \cdot dx \cdot \int_{-\beta}^{\beta} y^2 p_2(y) \cdot dy = \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} y^2 p_2(y) \cdot dy = \sigma_y^2. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (6) выражение (2) примет вид:

$$\int_{-\beta-\alpha}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} p_2(y) \cdot dy \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(x) \cdot dx = 1. \quad (9)$$

Заменим (9) двумя более жесткими ограничениями:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(x) \cdot dx = 1; \quad (10)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} p_2(y) \cdot dy = 1. \quad (11)$$

Тогда система уравнений (2) – (4) превращается, соответственно, в систему (7), (8), (10), (11), т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 p_1(x) \cdot dx = \sigma_x^2; \\ \int_{-\beta}^{\beta} y^2 p_2(y) \cdot dy = \sigma_y^2; \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(x) \cdot dx = 1; \\ \int_{-\beta}^{\beta} p_2(y) \cdot dy = 1. \end{array} \right.$$

Рассмотрим выражение (5) с учетом условия (6), сделав подстановку: $-1 + \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Тогда получаем

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y) = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot y^2} = e^{\lambda_1 + \lambda_3 \cdot x^2} \cdot e^{\lambda_2 + \lambda_4 \cdot y^2}, \quad (12)$$

где

$$p_1(x) = e^{\lambda_1 + \lambda_3 \cdot x^2}, \quad (13)$$

$$p_2(y) = e^{\lambda_2 + \lambda_4 \cdot y^2}, \quad (14)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – множители Лагранжа.

Подставляя (13), (14) в (10), (11) и в (7), (8) получаем систему:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_1 + \lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx = 1; \quad (15)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} e^{\lambda_2 + \lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy = 1; \quad (16)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\lambda_1 + \lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx = \sigma_x^2; \quad (17)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} y^2 e^{\lambda_2 + \lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy = \sigma_y^2. \quad (18)$$

Разделим обе части уравнения (17) на σ_x^2 , а уравнения (18) на σ_y^2 и от полученных выражений отнимем (15), (16) соответственно

$$\begin{aligned} \frac{e^{\lambda_1}}{\sigma_x^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx - e^{\lambda_1} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx &= 0; \\ \frac{e^{\lambda_2}}{\sigma_y^2} \int_{-\beta}^{\beta} y^2 e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy - e^{\lambda_2} \cdot \int_{-\beta}^{\beta} e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy &= 0; \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx; \\ \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\beta}^{\beta} y^2 e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy. \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx; \\ \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\beta}^{\beta} y^2 e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy = \int_{-\beta}^{\beta} e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy. \end{array} \right. \quad (20)$$

Уравнение(19) содержит только одну переменную λ_3 , а (20) λ_4 .

Алгоритм решения известен. Решив (19) и (20), получим значения λ_3 , λ_4 . Далее находим λ_1 из соотношения (15), а λ_2 – из соотношения(16):

$$e^{\lambda_1} = \frac{1}{\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda_3 \cdot x^2} \cdot dx};$$

$$e^{\lambda_2} = \frac{1}{\int_{-\beta}^{\beta} e^{\lambda_4 \cdot y^2} \cdot dy}.$$

Результаты моделирования величины $p(x,y)$ с использованием(12) показаны на рисунке 1.

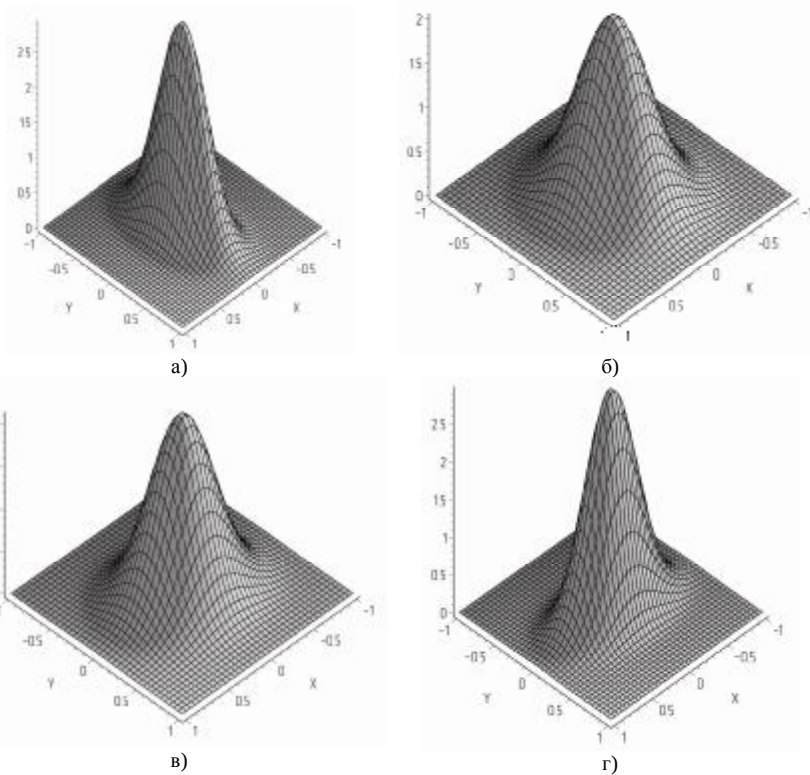


Рисунок 1 – Результаты моделирования величины $p(x,y)$:

а) $-\alpha = \pm 0,5$ $\beta = \pm 1$ $\sigma_x^2 = 0,1$ $\sigma_y^2 = 0,03$; б) $\alpha = \pm 0,8$ $\beta = \pm 0,5$ $\sigma_x^2 = 0,08$ $\sigma_y^2 = 0,08$;

в) $\alpha = \pm 1$ $\beta = \pm 0,5$ $\sigma_x^2 = 0,05$ $\sigma_y^2 = 0,1$; г) $\alpha = \pm 1$ $\beta = \pm 1$ $\sigma_x^2 = 0,03$ $\sigma_y^2 = 0,1$

Вследствие того, что прибор имеет погрешность, при его показаниях, соответствующих предельным или близким к ним значениям измеряемой величины, ограниченной допуском, нельзя достоверно утверждать, что воспроизводимая величина находится в пределах этого допуска. Поэтому, чтобы получить достоверную информацию о том, что измеряемая величина находится в допустимых пределах, необходимо уменьшить поле допуска этой величины на значение удвоенной предельной погрешности прибора. Однако это значительно сужает область допустимых значений, что усложняет в целом технологический процесс. Указанный недостаток можно устранить, повысив точность результата измерения за счёт увеличения числа повторных измерений, которые, как указывалось выше, снижают дисперсию конечного результата.

Число измерений зависит от значения измеряемой величины, находящейся в пределах поля допуска. Во всех случаях поле допуска, как по координатам, так и по координате u следует снизить соответственно на величины δ_x , δ_y , которые намного меньше допустимых погрешностей прибора: $\delta_x \ll 2\alpha$, $\delta_y \ll 2\beta$.

Величины δ_x , δ_y и вероятности выхода результатов измерений за границу полей допусков P_{Dx} и P_{Dy} задаются разработчиком, исходя из вида и устойчивости технологического процесса и метрологических характеристик средств измерения. По заданным δ_x , δ_y и P_{Dx} и P_{Dy} определяются требуемые значения верности ϵ_x^2 и ϵ_y^2 по каждой

из координат. Это осуществляется с использованием метода последовательных приближений следующим образом. Задаются ε_x^2 и ε_y^2 и решается задача (1), (15), (16), (17), (18). Необходимо отметить, что ε_x^2 и ε_y^2 подставляются в (17), (18) вместо σ_x^2 , σ_y^2 . Далее по найденным плотностям $p_1(x)$ и $p_2(y)$ определяются вероятности выхода результатов измерений за границы полей допусков и сравниваются с заданными значениями $P_{Дх}$ и $P_{Ду}$. Если они больше $P_{Дх}$ и $P_{Ду}$, то ε_x^2 и ε_y^2 уменьшаются и вновь решается задача (1 – 4). Процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены указанные условия. После того, как ε_x^2 и ε_y^2 найдены, определяются числа повторных измерений:

$$n_x = \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon_x^2}, \quad n_y = \frac{\sigma_y^2}{\varepsilon_y^2}.$$

Предложенный метод позволяет выбрать минимальное число повторных измерений, удовлетворяющее требуемому условию точности.

Предполагается построить модели для случайных зависимых величин, что и составит предмет дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список

1. Копп В.Я. Оптимальная оценка числа измерений приборных систем / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.П. Васютенко // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 36. — С. 75–80.

Поступила в редакцию 17.04.2006 г.